Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

1. KOMBINATORIK

* braucht man zum Beispiel in der Genetik und in der Ehe, dazu noch

www.schweizermonat.ch/in-der-genetik-gibt-es-keine-drittel
www.schweizermonat.ch/auf-wie-viele-arten-koennen-sich-zwei-ehepaare-streiten

* wird nur kurz besprochen, falls neu: im Buch lesen (eigentlich Mittelschulstoff)
* Nicht auswendig lernen, sondern anhand von kleinen Zahlen selber herleiten können

Wichtige mathematische Ausdrücke sind in Kapitel 1:

Fakultät, engl: "n factorial"

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1,$$

wir *definieren* weiter $0! := 1$.

Binomialkoeffizient, mit $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Auf Deutsch nennt man das "n tief k"; auf Englisch wunderschön - der Name ist Programm "n choose k":

Berechnen Sie jetzt

$$\binom{7}{5}$$

1.3 Variationen ohne Wiederholung (man variiert Objekte)

Aufgabe: Aus n Objekten sind k, $k \leq n$, herauszugreifen und in eine Folge anzuordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
Idee: Für die erste Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die zweite Stelle noch deren $(n-1)$ und so weiter; für die k-te Stelle noch $(n-k+1)$. Anzahl Möglichkeiten:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.4 Permutationen

Aufgabe: Auf wieviele Arten kann man n Objekte in eine Folge anordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt?
Idee (Spezialfall von 1.3 mit $k = n$): Für die erste Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die zweite noch deren $(n-1)$ und so weiter; für die zweitletzte Stelle bleiben noch 2 Möglichkeiten. Anzahl Möglichkeiten:

$$n!$$

1.5 Kombinationen ohne Wiederholung

Aufgabe: Es sei eine Menge von n Elementen gegeben. Wieviele Teilmengen von k Elementen $(0 \leq k \leq n)$ gibt es?

Idee: Wegen Fall 1.3. gibt es mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten, eine Folge von k Objekten zu wählen. Da es aber innerhalb der k-elementigen Teilmengen nicht auf die Reihenfolge ankommt, ist diese Zahl durch $k!$ zu dividieren. Anzahl Möglichkeiten:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Eben: n choose k.

1.6 Variationen mit Wiederholung

Aufgabe: Gegeben sind n Objekte $A_1, \ldots, A_n$. Wieviele Folgen (dh Reihenfolge relevant) der Länge r kann man bilden, falls jedes Objekt beliebig oft gewählt werden darf?
Idee: Für die erste Stelle gibt es n Möglichkeiten, ebenso für alle weiteren, bis zur r-ten Stelle. Total also

$$n^r$$

Möglichkeiten.

Merke: Variationen: Reihenfolge relevant - im Gegensatz zu Kombinationen!

engl: "order of selection does (not) matter", Combinations, Permutations, "with(out) repetition"; für "Variationen" ist keine gebräuchliche Übersetzung bekannt.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch (Kapitel 1).
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.

Lessons learnt:

Nicht auswendig lernen, sondern anhand von kleinen Zahlen selber herleiten können

Fakultät, engl: "n factorial"

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1,$$

wir *definieren* weiter $0! := 1$.

Binomialkoeffizient, mit $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Auf Deutsch nennt man das "n tief k"; auf Englisch wunderschön, der Name ist Programm, "n choose k":

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Wie ist $n!$ definiert?

Frage 2: Wie viel ergibt 4!

(a) 24
(b) 16
(c) 32

Frage 3: Wie viel ergibt $\frac{5!}{3!}$?

(a) 20
(b) 10
(c) 5

Frage 4: Wie viel ergibt $\frac{3!}{0!}$?

(a) Unlösbar
(b) 6
(c) 3

Frage 5:

Sei $n > k$. Formel für den Binomialkoeffizient lautet wie?

Frage 6: Wie viel ergibt $\binom{4}{2}$?

(a) 6

(b) 8

(c) 4

Frage 7: Wie viel ergibt $\binom{5}{3}$?

(a) 15

(b) 10

(c) 20

Frage 8: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus 5 Objekten 2 auszuwählen, wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt (Variation ohne Wiederholung)?

(a) 10

(b) 15

(c) 20

Frage 9: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben A, B, C, D in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen (Permutation)?

(a) 24

(b) 16

(c) 12

Frage 10: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 6 Objekten 3 auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt (Kombination ohne Wiederholung)?

(a) 15

(b) 20

(c) 10

Frage 11: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus 4 Objekten 3 auszuwählen, wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt und jedes Objekt mehrfach gewählt werden kann (Variation mit Wiederholung)?

(a) 64

(b) 24

(c) 12

Lösungen zu Klickerfragen:

Frage 1: $n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$; Frage 2: (a) 24; Frage 3: (a) 20; Frage 4: (b) 6. Achtung: $0! = 1$ per Definition; Frage 5: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$; Frage 6: (a) 6; Frage 7: (b) 10; Frage 8: (c) 20. Die Formel fr die Variation ohne Wiederholung lautet: $\frac{n!}{(n-k)!}$. Setzen wir die Werte ein: $\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$; Frage 9: (a) 24. Die Anzahl der Permutationen von n Objekten wird durch die Fakultät $n!$ berechnet: Setzen wir den Wert ein: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; Frage 10: (b) 20. Die Formel für die Kombination ohne Wiederholung lautet: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Setzen wir die Werte ein: $\frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$; Frage 11: (a) 64. Die Formel für die Variation mit Wiederholung lautet: n^k. Setzen wir die Werte ein: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.