Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

3. WAHRSCHEINLICHKEIT P (PROBABILITY)

Der grosse Block von Kapitel 3-7 ist einerseits wichtiges Fundament für die nachfolgende Statistik ab Kapitel 8. Andererseits wird in Kapitel 3-7 eine Sprache gelernt (die Sprache der Stochastik), mit der in vielen Gebieten der Naturwissenschaften zufällige Mechanismen modelliert werden, unabhängig von einer nachfolgenden statistischen Auswertung von Daten. Das ist quasi das stochastische Gegenstück zu den deterministischen Differentialgleichungen von MAT 182. Unter anderem ist die ganze "Computational Biology" voll von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Verteilungen.

3.1 Grundbegriffe

1969: NASA will die Saturn 5 mit der Apollo 11 und 3 Astronauten für 100'000'000 US $ versichern (Totalverlust). Wieviel Prämie soll man da verlangen?

Wissenschaftler: "Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Freilandversuch mit genmanipulierten Organismen eine Katastrophe passiert, ist 5 %."

Besprechen jetzt 4 anschauliche, intuitive Wahrscheinlichkeitsbegriffe als Motivation für den abstrakten (axiomatischen) Wahrscheinlichkeitsbegriff (siehe 3.3).

3.1.1 Klassische Wahrscheinlichkeit (theoriegetrieben)

Idee ist:

$$P = \frac{G}{M},$$

wobei P = Wahrscheinlichkeit, G = Anzahl **g**ünstige Fälle und M = Anzahl **m**ögliche Fälle. Vorsicht: alle Möglichkeiten haben die gleiche W'keit. Triviale Beispiele sind der Münzwurf ($\frac{1}{2}$) und der Würfel ($\frac{1}{6}$) .

Wir lösen gemeinsam Aufgabe 3-5: Wir würfeln gleichzeitig mit zwei Würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Augenzahlen verschieden sind und die grössere durch die kleinere teilbar ist,

b) dass sich die beiden Augenzahlen um 2 unterscheiden,

c) dass sich die beiden Augenzahlen um mindestens 2 unterscheiden, > HA

d) dass die eine Augenzahl genau doppelt so gross ist wie die andere? > HA

Welchen Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie verwendet?

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

3.1.2 Idealisierte relative Häufigkeit (empirisch, mit Daten)

Aussage: "W'keit, dass das nächste in der Stadt Zürich geborene Kind ein Knabe ist, beträgt 51.3 %." Wie kommt man zu dieser Aussage?

Was ist der medizinische Grund, dass wir nicht näher bei 50 % sind?

Praxis: Was, wenn wir statt 51.3 % Zahlen wie 62.5 %, 16.67 % oder 42.86 % haben?

Wir lösen gemeinsam Aufgabe 3-2: In einer menschlichen Population beträgt die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe 0 bzw. A 0.40 bzw. 0.42. Blutgruppe B ist doppelt so wahrscheinlich wie Blutgruppe AB.

a) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten für B und AB?

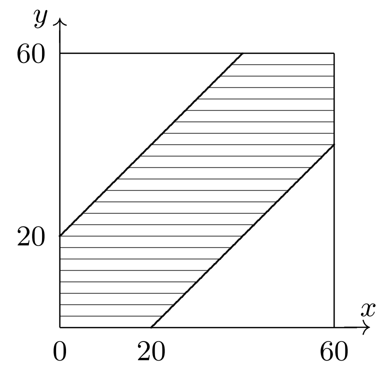
b) Wie gross ist die W'keit dafür, dass jemand Blutgruppe A oder AB hat?

c) Zusatzfrage Vlsg: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für "nicht-B"?

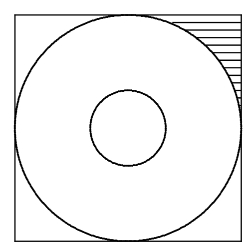
Welche Interpretation der Wahrscheinlichkeit haben Sie hier verwendet?

3.1.3 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Idee: Wahrscheinlichkeit proportional zum Flächeninhalt der einzelnen Stücke (ähnlich 3.1.1 (endlich mit $p = g/m$)). Gehen zu Beispiel 3.1.3.F im Buch, dort finden Sie auch ausführlichere Informationen dazu:



Wir lösen gemeinsam Aufgabe 3-9: Eine Zielscheibe für das Pfeilwurfspiel hat eine Seitenlänge von 30 cm. Der Zentrumskreis hat 10 cm Durchmesser. Ein Pfeil trifft zufällig die Scheibe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er a) den Zentrumskreis, b) den schraffierten Spickel rechts oben? Mit welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie gearbeitet?



https://schweizermonat.ch/warum-hauptstaedte-selten-in-der-mitte-des-landes-liegen/

3.1.4 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Nicht weiter von Belang für diese Vlsg; 2 Beispiele:

* NASA-Bsp: W'keit nicht möglich, da keine Erfahrungswerte bzw zu komplex
* Freilandversuch GenTech: subjektiv

3.2 Ergebnisse und Ereignisse

Wir werden in 3.2 und 3.3 die naive Vorstellung von Wahrscheinlichkeit und Zufall formalisieren, in die Sprache der Mathematik übersetzen. Als erstes müssen wir, ohne die Wahrscheinlichkeiten anzuschauen, Versuchsausgänge formalisieren. Es ist ein Glücksfall, dass die Mengenlehre uns hier grosse Dienste leistet:

* Sei Ω eine nichtleere Menge (nonempty set). Sie steht für die Menge der möglichen Versuchsausgänge; wir nennen sie auch Ereignisraum oder Ergebnisraum (sample space). Es findet jeweils in einem Experiment genau ein sogenanntes Elementarereignis statt, z.B. $\omega_1 \in \Omega$ oder $\omega_2 \in \Omega$ etc.

* Bei einem Würfel wird man sinnvollerweise mit

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

die Menge der möglichen Anzahl Augen wählen. Sie können es aber auch mit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f\}$ machen - aber wir wollen uns das Leben so einfach wie möglich machen.

* Beim Münzwurf wird man sinnvollerweise $\Omega := \{K, Z\}$ wählen. $n-$facher Münzwurf: $\Omega := \{K, Z\}^n$.

* Die Menge Ω kann von endlicher oder unendlicher Kardinalität (Anzahl Elemente) sein; sogar überabzählbar unendlich (vgl Kapitel 2).

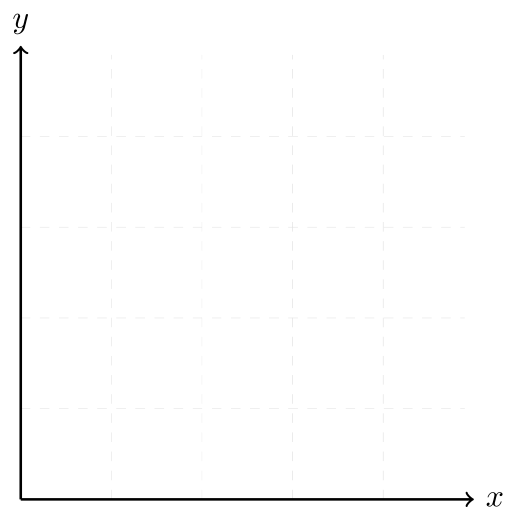
* endlich: obiges Beispiel mit den Würfelaugen
* abzählbar unendliches Ω: zufällige Zahl aus $\Omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$; zB Buch 3.2.3.B (Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit):

* überabzählbar unendliches Ω: Zeit bis Atom zerfällt ist im Intervall $\Omega := (0, \infty)$ und zufällig, zumindest in gebräuchlichen physikalischen Modellen:

* Beim Würfel können wir fortfahren mit: A ist mit $A := \{2, 4, 6\}$ die Menge der geraden Zahlen und $B := \{4, 5, 6\}$ die Menge der Zahlen streng grösser 3.

* A bzw. B nennen wir ein Ereignis (event). Ereignisse sind allgemein Teilmengen von Ω. Dies ist verwirrend. Es kann ja (Ereignis A) nicht gleichzeitig $2, 4$ und 6 geworfen werden. Es gilt nach wie vor, dass genau ein sogenanntes Elementarereignis stattfindet. Wenn dieses ω_1 z.B. gleich 2 ist, so sagen wir: A ist eingetreten - es ist ja auch eine gerade Zahl geworfen worden; eine reicht!

* Wir schauen nochmals bei Xaver und Yvonne vorbei und formalisieren deren Situation:



Populäre Missverständnisse: Alltag versus Mathematik-Mengenlehre-Logik-Wahrscheinlichkeit

Vorsicht: $\{\omega\}$ vs ω

Vorsicht: $\{3\} \cap \{4\}$ vs $3 \cap 4$.

Dann noch die Situation

$$A \cap B = \phi :$$

Wir sagen in der Mengenlehre: "A und B sind elementfremd (disjunkt)". In der Ereignissprache sagen wir, die Ereignisse seien unvereinbar.

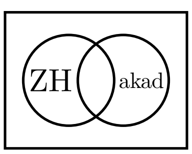
Vorsicht: "Wir haben 2 Knaben" vs "Wir haben genau 2 Knaben"

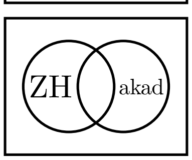
Kleine Warnung: Bei einer Familie mit genau 3 Kindern ist das Gegenteil der Aussage: "die haben 3 Mädchen" umgangssprachlich "die haben 3 Knaben". Ab jetzt und mathematisch korrekt wird das Gegenteil von 3 Mädchen bedeuten, dass es mindestens 1 Knabe hat. Es geht in der Mathematik nämlich um das Komplement, die Ergänzung. Nachfolgend ist das wichtig bei A und A^c.

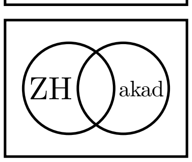
Wir lösen zusammen Aufgabe 3-19: Wir untersuchen Familien mit genau drei Kindern, wobei wir auf die Altersreihenfolge achten. Wir unterscheiden also z.B. die Fälle, wo ein Mädchen zwei jüngere bzw. zwei ältere Brüder hat. a) Geben Sie einen passenden Ergebnisraum Ω an. b) Geben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω an. E: Genau zwei der Kinder sind Knaben. F: Das älteste Kind ist ein Mädchen. c) Was bedeuten die Ereignisse $E \cap F$, $\overline{E}$, $\overline{E} \cap F$ in Worten?

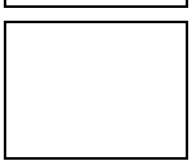
Wir fassen die mengentheoretischen Ausdrücke und ihre Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie (WT) in folgender Tabelle zusammen (dazu Venn-Diagramme; exzellentes Beispiel sind die EinwohnerInnen in ihren Kantonen; Experiment ist: wir greifen eine Person zufällig heraus).

Symbol	**Mengentheorie / Bedeutung WT**
Ω	Menge / Ereignisraum, Menge der möglichen Versuchsausgänge
ω	Element von Ω / Elementarereignis, konkreter Versuchsausgang
A	Teilmenge von Ω (subset) / Ereignis; falls $\omega \in A$, sagt man, dass das Ereignis A eingetreten ist
$\overline{A}(= A^c)$	Komplement von A / kein Elementarereignis aus A findet statt
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B (intersection) / ein Elementarereignis aus A und B findet statt
$A \cup B$	Vereinigung von A und B (union) / ein Elementarereignis aus A oder B findet statt (oder beide)
$A \backslash B$	A ohne B (A but not B) / ein Elementarereignis aus A tritt ein, aber nicht aus B
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B (subset) / Wenn ein Elementarereignis aus A stattfindet, dann immer auch ein Elementarereignis aus B
ϕ	leere Menge (empty set) / unmögliches Ereignis
Ω	ganze Menge (entire set) / sicheres Ereignis (etwas muss passieren)









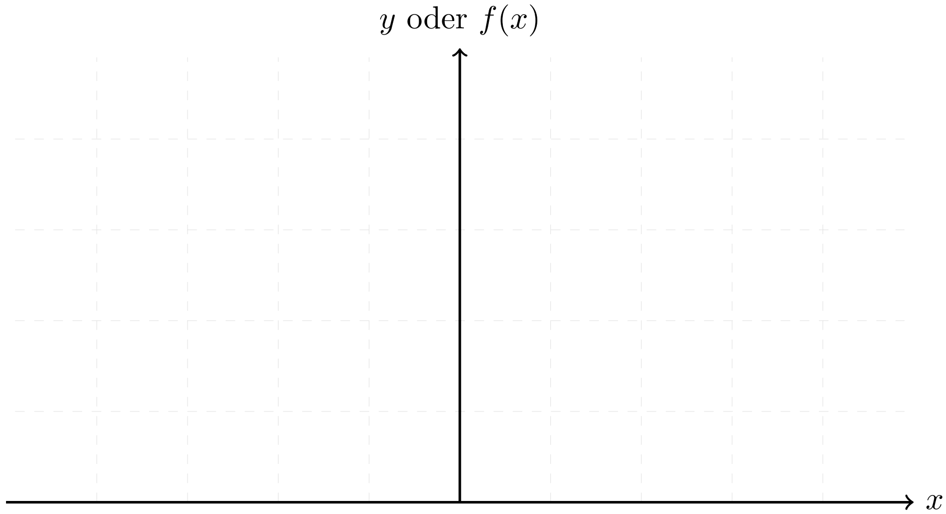
3.3 Rechenregeln und Axiome

Für einen vierzigjährigen Mann betrage die Wahrscheinlichkeit 0.002, innert Jahresfrist zu sterben. An einer Klassenzusammenkunft sind 20 vierzigjährige Männer zusammen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer im Laufe des darauffolgenden Jahres stirbt.

Wie geht man da vor? Benutzen Sie auch die Begriffe aus Teil 3.2.

Wir kommen in 3.5.5 darauf zurück.

Bemerkung zum Funktionsbegriff:



Die axiomatische Definition 3.1. beinhaltet alle bisherigen 4 Begriffe von Wahrscheinlichkeit:

Definition 3.1 [Wahrscheinlichkeit P (Probability) nach Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov] *Es sei Ω ein Ergebnisraum. Jedem Ereignis E aus Ω sei eine Zahl $P[E]$ zugeordnet, so dass gilt:*

a) $0 \leq P[E] \leq 1$ *für alle E.*

b) $P[\Omega] = 1$.

c) Für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise unvereinbare Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ gilt:

$$P[E_1 \cup E_2 \cup \ldots] = P[E_1] + P[E_2] + \ldots.$$

Aus Definition 3.1 c) folgt sofort Regel 4 im Buch für unvereinbare E und F:

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F].$$

Notation: runde vs eckige Klammer ist egal: $P[A] = P(A)$; später ab Kapitel 5 auch bei Erwartungswert und Varianz: $E[X] = E(X)$ und $V[X] = V(X)$.

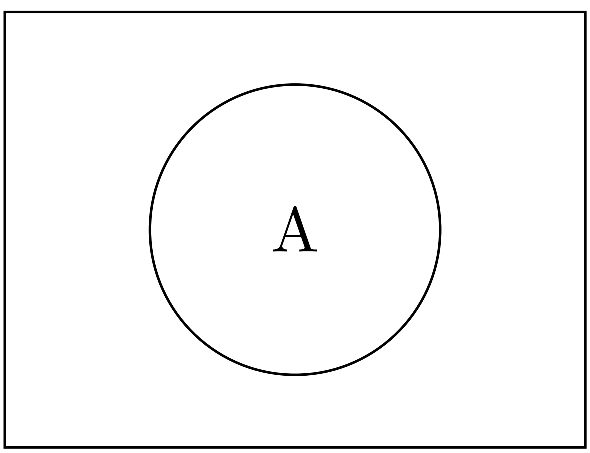
Es gibt eine extrem praktische Interpretation von **Wahrscheinlichkeiten und Proportionen/Anteilen**: Wir haben 9 Millionen EinwohnerInnen in der Schweiz. Wenn man jetzt zufällig (jedeR EinwohnerIn hat gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, also (1/9'000'000)) eineN EinwohnerIn herausgreift, so ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, einen Zürcher herauszugreifen, genau gleich der Proportion/dem Anteil der Zürcher an der Bevölkerung. Wir werden diese Analogie in vielen Fällen einsetzen.

Schauen wir mal, ob Definition 3.1 wirklich Sinn macht: Ω sei die Menge aller EinwohnerInnen der Schweiz. Was bedeutet jetzt Eigenschaft b)?

Seien die E_i, $1 \leq i \leq 26$, die Mengen der EinwohnerInnen der jeweiligen Kantone der Schweiz. Was bedeuten Eigenschaft a) oder c) anhand von ein paar Beispielen?

Aus Definition 3.1 lassen sich nützliche Regeln ableiten, welche wir jetzt entwickeln.

[Regel 5 und 6 im Buch; Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit]: $P[A] = 1 - P[\overline{A}]$; v.a. $P[\phi] = 0$.

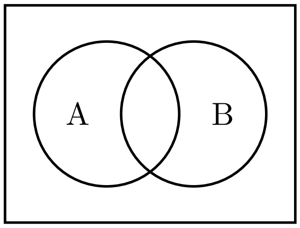


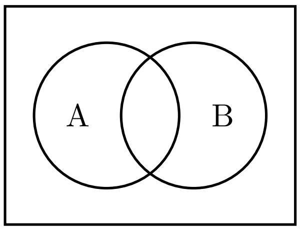
$A \subseteq B \Rightarrow P[B] = P[A] + P[B \backslash A]$

Nebenbemerkung: Vereinfachende Schreibweise: wenn $A \cap B = \phi$, schreibt man auch kompakt $A \dot{\cup} B$ (statt $A \cup B$), um zu unterstreichen, dass es eine *disjunkte* Vereinigung ist.

$A \subseteq B \Rightarrow P[A] \leq P[B]$ (Aufgabe 3-28)

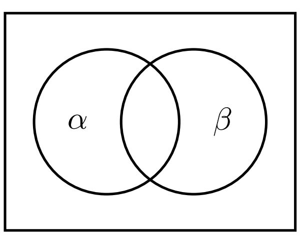
[Regel 7 im Buch] $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$. (Beweis Buch 3.3)





Wir lösen zusammen Aufgaben 3-26 und 3-27.

3−26 Aus Erfahrung weiss man, dass ein(e) Student(in) die Prüfung in Alphalogie mit 80% Wahrscheinlichkeit, jene in Betametrie mit 70% Wahrscheinlichkeit besteht. Mit 60% Wahrscheinlichkeit werden beide Prüfungen bestanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Person bei beiden Prüfungen durch?



3−27 Es seien E und F Ereignisse. Man weiss, dass $P(E \cup F) = 0.7$, $P(E \cap F) = 0.2$ und $P(\overline{E}) = 0.6$ ist. Berechnen Sie $P(E)$ und $P(F)$.

3.4 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

3.3 war abstrakt, mathematisch und theoretisch. Im Gegensatz dazu ist dieses Kapitel beinahe ein Übungskapitel und dient der Festigung des bisherigen Wissens.

3.4.1 Beispiele endlicher Wahrscheinlichkeitsräume

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $\Leftrightarrow |\Omega| < \infty$.

Konsequenz: In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse. Formal: Sei $E := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P[E] &= P[\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}] = P[\{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}] \\ &= P[\{\omega_1\}] + \ldots + P[\{\omega_n\}] = \sum_{i=1}^{n} P[\{\omega_i\}] \end{aligned} \tag{Regel 8}$$

Man könnte denken, das gilt doch sowieso immer? Im Buch ist jedoch bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, dass...

Wir wollen ein paar einfache Beispiele machen, neben Münze und Würfel.

Bsp 1) Bei Wahlen um einen vakant gewordenen Sitz kann man als WahlkampfmanagerIn subjektive Wahrscheinlichkeiten den 3 möglichen Ereignissen eines Wahlganges zuweisen:

* ω_1 : Freddy Farblos gewinnt
* ω_2 : Willy Wetterfahne gewinnt
* ω_3 : unentschieden

Dies sieht dann in Ihrem Kopf vielleicht so aus:

$P[\{\omega_1\}] = 0.6$,
$P[\{\omega_2\}] = 0.399$ und
$P[\{\omega_3\}] = 0.001$.

Sie haben, selbst bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten, folgende 2 Dinge bei der Wahl der Wahrscheinlichkeiten automatisch beachtet:

*

*

Wir können dies auch aus den Axiomen in Definition 3.1 selber herleiten: sei dazu $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Wegen Definition 3.1 b) und c) haben wir

$$1 = P[\Omega] = P[\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}] = P[\{\omega_1\}] + \ldots + P[\{\omega_n\}].$$

Offenbar müssen in endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse auf 1 summieren. Wegen Definition 3.1 a) müssen sie zudem ≥ 0 sein. Man kann zeigen, dass Sie in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum der Kardinalität n einfach n nichtnegative (d.h. ≥ 0) Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ nehmen können, welche auf 1 summieren und sagen: **"Das sind meine Wahrscheinlichkeiten!"**. Ihre Wahl wird immer Definition 3.1 genügen (auch Definition 3.1 c)) und damit gelten auch alle Regeln, welche wir in 3.3 entwickelt haben, auch für Ihre spezielle Wahl.

Bsp 2) Wir üben dies gleich nochmals, indem wir zum ersten Mal Bekanntschaft mit Willy Würfel machen (Aufgabe 3-32): Willy Würfel, eine legendäre Gestalt in den Spelunken der Hafenstadt, benützte (jedenfalls bis man ihn erwischte) einen Würfel, bei welchem die Sechs dreimal wahrscheinlicher als die Eins war. Die übrigen Augenzahlen waren alle halb so wahrscheinlich wie die Sechs. a) Bestimmen Sie die einzelnen Wahrscheinlichkeiten. b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Willy eine ungerade Zahl würfelte? c) Wieviele Ereignisse aus $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ haben die Wahrscheinlichkeit 0.3?

3.4.2 Laplace-Räume

Wir bleiben bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen, fordern aber *zusätzlich*, dass alle $\{\omega_i\}$, $1 \leq i \leq n$, gleich wahrscheinlich sind; also zwingend:

$$P[\{\omega_i\}] = \frac{1}{n}.$$

Solch einen Wahrscheinlichkeitsraum nennt man auch **Laplace-Raum**. Wir sind solchen Räumen bereits oft begegnet:

* fairer Münzwurf ($n = 2$)
* fairer Würfel ($n = 6$)
* greife EinwohnerIn der Schweiz aus Korb

Wenn jetzt $|E| = k$, so gilt wegen Regel 8 im Buch, dass

$$P[E] = \frac{k}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|}. \qquad \text{(Regel 9)}$$

Das kennen wir aber schon! Wir haben bei der sogenannten "Klassischen Wahrscheinlichkeit" diese Regel bereits angewandt. Jetzt können wir präzisieren, dass diese Regel nur in Laplace-Versuchen angewandt werden darf (haben wir bis jetzt auch so gemacht).

Bsp 3) Bei einem Lotto werden 6 Zahlen aus 45 Zahlen gezogen. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an. Kleine Fangfrage ans Publikum: Es gibt Esoteriker, welche beim Lotto ihre Wahl vom letzten Ausgang des Spiels oder vom Ausgang des gleichen Spiels in Deutschland abhängig machen. Finden Sie das sinnvoll?

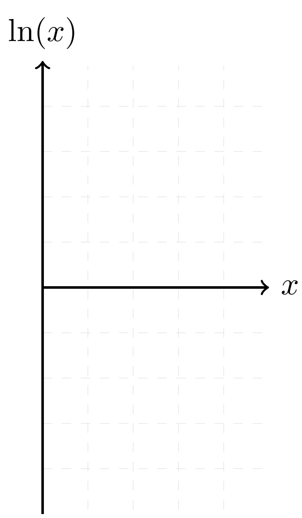
https://schweizermonat.ch/und-hier-noch-die-lottozahlen/

https://schweizermonat.ch/koennen-kaninchen-den-aktienmarkt-erklaeren/

Beispiel 3.4.4.A (das historische alte schweizer Zahlenlotto (da einfacher); aktuelles Lotto in den Übungen in einer Must-Aufgabe)

Anzahl Richtige k	Möglichkeiten hierzu	Wahrscheinlichkeiten hierzu (gerundet)
6	1	0.0000001228
5	234	0.0000287291
4	$11'115$	0.0014
3	$182'780$	0.0224
2	$1'233'765$	0.1515
1	$3'454'542$	0.4241
0	$3'262'623$	0.4001
total	$8'145'060$	1

Beispiel 3.4.4.C (immer wieder an Prüfung gesichtet) Wie oft muss man mit einem gewöhnlichen Würfel mindestens würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs mindestens 95% ist? [**KLICKER**]



3.4.3 Abzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsräume

"Abzählbar unendlich" beinhaltet 2 Punkte: Es gilt zwar $|\Omega| = \infty$, aber immerhin können wir die Elementarereignisse vollständig durchnummerieren und also schreiben:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}.$$

Wieder folgt wegen Definition 3.1 b) und c):

$$1 = P[\Omega] = P[\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P[\{\omega_i\}].$$

Diese Formel gilt also auch im *abzählbar* unendlichen Fall! Regel 8 können wir dementsprechend verallgemeinern zu: In einem abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse. Formal: Sei $E := \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Dann gilt:

$$P[E] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + \ldots = \sum_i P[\{\omega_i\}] \qquad \text{(Regel 10)}$$

Wir lassen mit der Schreibweise "$\sum_i$" bzw. den "$\ldots$" offen, ob $|E|$ selber endlich oder unendlich ist.

Wir lösen dazu Beispiel 3.4.5.A im Buch: Wir werfen eine (unverfälschte) Münze so oft, bis erstmals "Kopf" erscheint, dann hören wir auf. Das Ergebnis des Versuchs sei die Anzahl der benötigten Würfe.

3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

https://schweizermonat.ch/wer-hoert-da-mozart-im-niederdorf/

3.5.1 Grundlagen

* *bedingen* auf ein Ereignis (andere hilfreiche Formulierungen: *setzen ein (anderes) Ereignis voraus*, ein anderes Ereignis ist *schon gegeben*)
* haben am Schluss wieder eine *Wahrscheinlichkeit*

Beispiel: Korb der EinwohnerInnen der Schweiz. Es gibt

R = Menge der RaucherInnen
$\overline{R}$ = Menge der Nicht-RaucherInnen
H = Menge der Personen, welche innert der kommenden 10 y einen Herzinfarkt kriegen
$\overline{H}$ = Menge der Personen, welche innert der kommenden 10 y keinen Herzinfarkt kriegen

Wir haben damit 4 Mengen von Personen:

Als Arzt/Ärztin stellen Sie die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein rauchender Patient in den kommenden 10 Jahren einen Herzinfarkt kriegt.

In der Praxis wird man noch weitere Informationen (ausser R, $\overline{R}$) einbeziehen: Geschlecht (G), Sport (S), Blutfette (B; LDL-Cholesterin), hoher Blutdruck (D), H in Familie vor 50. Altersjahr (F) und vieles weitere mehr. Wir haben dann also einen Ausdruck der Art:

$$\frac{P[H \cap R \cap G \cap \overline{S} \cap B \cap D \cap \overline{F}]}{P[R \cap G \cap \overline{S} \cap B \cap D \cap \overline{F}]}.$$

Auch wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten komplizierter als die (unbedingten) Wahrscheinlichkeiten sind, stellen Sie einen Gewinn dar: Im Beispiel der Frage nach dem Herzinfarkt: **je mehr Informationen** Arzt/Ärztin hat, **desto genauer** kann man das Risiko der Person angeben. Statt einer unbedingten Wahrscheinlichkeit $P[H] = 0.05$ kann man dann sagen, dass die Wahrscheinlichkeit 25 % ist und Handlungsbedarf besteht! Als kleiner Werbespot für die aktuelle Entwicklung: Ziel bei Behandlungsmethoden in der sogenannten *personalisierten* Medizin ist, dass wir nicht 5 % oder 25 % Wahrscheinlichkeiten haben, sondern idealerweise 0 und 100 %, also dank mehr Information den Zufall ausschalten. Das ist ein Problem für die Versicherungswirtschaft bei Leben und Krankheit: wenn Sie über Krankheiten wissen, die bei Ihnen ausbrechen werden, die Versicherung aber nicht, so herrscht eine sogenannte *Informationsasymmetrie* (Patient versus Versicherung), was für die Versicherung und andere Versicherte nicht erwünscht ist.

Zusammengefasst, was wegen **Herz/Kreislauf, Diabetes 2, Demenz, Krebs** wichtig und nicht fremdbestimmt ist (Statistik ist eindeutig): Bewegung, Gewicht, LDL-Cholesterin (auch Gesamtcholesterin, gesättigte Fettsäuren), Blutdruck, Zucker, Vielfalt beim Essen, Rauchen, ausgewogene Ernährung, Alkohol ist ein Zellgift!

Weiteres Beispiel: fairer Würfel. Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen (Ereignis A), gegeben haben eine Zahl kleiner als 4 (Ereignis B). Antwort:

[KLICKER]

Wie sind wir darauf gekommen? Klar war, dass wir uns nur um die Zahlen $\{1, 2, 3\}$ kümmern müssen (gegeben kleiner 4). Das ist unser neuer Ereignisraum. Jedes Elementarereignis hat jetzt Wahrscheinlichkeit 1/3 (früher 1/6). Die Antwort ist demnach 1/3, weil 2 die einzige gerade Zahl kleiner 4 (und grösser 0) ist. Oder anders erklärt:

$$\frac{1}{3} = 2 * \frac{1}{6} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

Wenn wir durch "$P[B]$" teilen, setzen wir *in's Verhältnis* zum Anteil B. Deshalb definieren wir:

Definition 3.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeit $P[A|B]$ (conditional probability)]

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]},$$

falls $P[B] > 0$. Man nennt $P[A|B]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B. Betrachten Sie dazu B als fest gewählt.

Da *bedingt* altmodisch ist, besser: setzen B voraus (**vorausgesetzt**) oder B schon **gegeben** ("setzen voraus / gegeben dass Raucher, Zürcherin"); oder auch "Bedingung, Vorbedingung ist, dass...".

Undeutliche Schreibweise: $P[A|B]$ ist nicht $P[A \backslash B]$.

Sei $B \subset A$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $P[A|B] = 1$. Warum muss dies so sein (anschaulich)?

Ist das kommutativ in dem Sinne, dass $P[A|B] = P[B|A]$?

Wir lösen in der Vlsg Bsp 3.5.4.A: Beim Roulette erscheinen die Zahlen 0 bis 36 mit derselben Wahrscheinlichkeit. Wir betrachten einige (in den Casinos unübliche) Ereignisse, nämlich E: die gespielte Zahl ist durch 2 teilbar, F: die gespielte Zahl ist durch 3 teilbar, G: die gespielte Zahl ist durch 6 teilbar. Gesucht ist a) $P(E|F)$, b) $P(F|E)$, c) $P(G|E)$, d) $P(E|G)$.

3.5.2 Produktformel und mehrstufige Experimente

Es gilt:

$$P[A|B]P[B] = P[A \cap B] = P[B|A]P[A]. \qquad \text{(Produktformel)}$$

Beweisen Sie in der Klasse (jedeR) für sich diese Regeln:

Anwendung auf mehrstufige Experimente: Rauchen und Krebs (oder Herzinfarkt):

R = Ereignis, dass Person ist Raucher/in
K = Ereignis, dass Person erkrankt an Lungenkrebs (oder hat Herzinfarkt)

Analyse mit Baumdiagramm und Produktformel:

"Multiplikation entlang den Ästen"
"Summation quer rüber"

Erweiterbar auf mehr als 2 Stufen, siehe Buch (3.5.5) und (3.5.6).

3.5.3 Formel von Bayes (Brite, kein Franzose - Pfaffe) "The false positive"

K = Patient hat bestimmte Krankheit (HIV, Grippe, etc.)
T = Test hierfür ist positiv; d.h. Krankheit wird angezeigt
$P[K] = 0.001$ [1 aus 1000 hat Krankheit (1000 nehmen, da im Pro*mille*bereich!)]

Erfahrungswerte aus der *Diagnostik*: eigentlich wollen wir 100 % bzw 0 % - aber so ist die Welt nicht - es gibt einen sogenannten Trade-off:

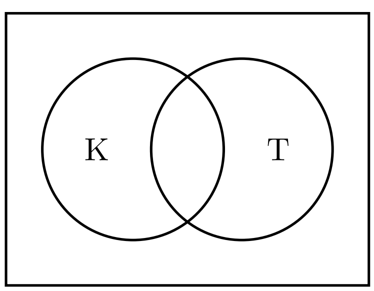
$P[T|K] = 0.99$ [W'keit für positiven Test wenn Patient wirklich krank 99 %, "Sensitivität"]

$P[T|\overline{K}] = 0.02$ [W'keit für positiven Test obschon Patient gesund 2 %. Die Gegenw'keit nennt man dann "Spezifität": negativer Test wenn gesund]

NB: Ähnliche Überlegungen gibt es in der IT mit "Recall" und "Precision". Precision ist dort genau das, was wir nachfolgend suchen werden: $P[K|T]$.

$P[K|T] = ?$ [W'keit Patient hat Krankheit gegeben der Test ist positiv], **[KLICKER]**

Mit Tabelle:



Formal: Angenommen wir kennen $P[T|K]$, wollen aber $P[K|T]$. Es gilt nach Definition

$$P[K|T] = \frac{P[K \cap T]}{P[T]}.$$

Des weiteren gelten folgende Mengengesetze: $T = (T \cap K)\dot{\cup}(T \cap \overline{K})$, wobei die Mengen $(T \cap K)$ und $(T \cap \overline{K})$ elementfremd sind. Also gilt $P[T] = P[T \cap K] + P[T \cap \overline{K}]$ und weiter

$$P[T \cap K] = P[K \cap T] = P[T|K]P[K];$$

analog erhalten wir

$$P[T \cap \overline{K}] = P[T|\overline{K}]P[\overline{K}].$$

Zusammen ergibt sich die *Formel von Bayes*:

$$P[K|T] = \frac{P[K \cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|K]P[K]}{P[T|K]P[K] + P[T|\overline{K}]P[\overline{K}]}.$$

Warum lagen wir so daneben?

Analog gehen: Mammographien, DNA-Massentests in der Verbrechensbekämpfung.

www.schweizermonat.ch/auch-mit-einem-positiven-coronatest-sind-sie-womoeglich-kerngesund

www.nzz.ch/wissenschaft/mammografie-frauen-wiegen-sich-in-falscher-sicherheit-ld.1775869

Beeindruckt? Erzählen Sie das heute Abend den Eltern und Geschwistern :-)

www.republik.ch/2020/10/31/9-mal-macht-es-klick-und-1-mal-wird-trump-praesident
(Prognosen, Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und die menschliche Psychologie)

Wollen Anteil Millionäre in der Schweiz, haben nur kantonale Daten; wie gehen wir vor?

3.5.4 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit FTW (total probability)

In der letzten Formel haben wir im 2. Gleichheitszeichen im Nenner bereits einen Spezialfall der FTW angewendet. Allgemein formulieren wir die FTW in folgendem

Satz 3.3 [Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit FTW] $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *seien Teilmengen von* Ω *so, dass die* B_i*'s elementfremd sind und* $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$. *Weiter sei für alle* B_i, $P[B_i] > 0$ *erfüllt. Dann gilt für jedes Ereignis* A*:*

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]. \tag{FTW}$$

Gutes Beispiel dazu: Proportion von EinwohnerInnen der Schweiz mit Vermögen über 1 Million CHF und wir haben leider nur die kantonalen Daten. Lsg: A ist Ereignis, eine Person auszuwählen mit Vermögen über 1 Million. $P[A|B_i]$ Wahrscheinlichkeit hierfür, gegeben suche nur unter Einwohnern im Kanton i, $P[B_i]$ Anteil Bewohner in Kanton i an gesamter Bevölkerung der Schweiz.

Beispiel mit Rauchen R und Lungenkrebs K: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an Lungenkrebs erkrankt? Wir haben von p-4:

$\Omega = \{\text{Einwohner/innen Schweiz}\}$, Ereignisse $K = (R \cap K) \cup (\bar{R} \cap K)$, $R = (R \cap K) \cup (R \cap \bar{K})$, $\bar{R} = (\bar{R} \cap K) \cup (\bar{R} \cap \bar{K})$, womit $R \,\dot\cup\, \bar{R} = \Omega$ und $R \cap \bar{R} = \phi$. Für die FTW haben wir also $n = 2$. $P[R] = 0.3, P[\bar{R}] = 0.7, P[K|R] = 0.4, P[K|\bar{R}] = 0.1$. Wir wenden die FTW an:

$P[K] =$

Besprechen KKW-Folie mit Wahrscheinlichkeitsbaum / Ereignisbaum
Wir leiten über zu 3.5.5; untersuchen Sie $P[A|B]$, falls $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

3.5.5 Unabhängigkeit von Ereignissen (independence of events)

Anschaulich und in der Modellierung bedeutet unabhängig, dass zwei Ereignisse von unabhängigen Mechanismen erzeugt wurden. Genauer:

Nennen Sie ein paar Experimente, welche Sie sinnvollerweise als (nicht) unabhängig bezeichnen würden:

unabhängig:

abhängig:

Philosophische (auch physikalische) Frage, ob 2 reale Experimente wirklich unabhängig sein können für uns nicht (wirklich) relevant!

Definition 3.4 [Unabhängigkeit von Ereignissen] *Ereignisse A und B sind (paarweise) unabhängig voneinander, wenn*

$$P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Falls $P[B] > 0$ resp. $P[A] > 0$, so ist Unabhängigkeit von A und B gleichbedeutend mit

$$P[A|B] = P[A] \qquad \text{("who cares"} - \text{Variante)}$$

resp. $P[B|A] = P[B]$.

Die "who cares"-Variante entspricht mE eher unserer umgangssprachlichen Vorstellung von Unabhängigkeit. Wir betrachten nochmals das Münzbeispiel (p-1) mit einem Doppelwurf wo A: 2 freie Münzen und B: 2 zusammengeschweisste Münzen. Kann man das rechnen?

A, 2 freie Münzen:

B, 2 zusammengeschweisste Münzen:

Hängepartie aus 3.3: zwanzig 40-jährige Männer und ihre Klassenzusammenkunft:

Bsp 3.5.8.B im Buch: An meinem Bahnhof fährt der Zug mit 10% Wahrscheinlichkeit zu spät ab, und ich komme mit 20% Wahrscheinlichkeit zu spät. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug mit mir an Bord pünktlich abfährt?

KKW nochmals; Unabhängigkeit: in probabilistischen Sicherheitsstudien bei technischen Systemen geht man, mangels besserem Wissen, bei Wahrscheinlichkeitsbäumen oft von Unabhängigkeit aus. In unserem Krebsbeispiel wäre das $P[K|R] = P[K]$ (wohl falsch). Technische Lösungsansätze sind unter anderem: a) redundante Systeme von *verschiedenen* Herstellern einsetzen, welche b) optimalerweise nach verschiedenen physikalischen Prinzipien funktionieren. Damit verbunden ist die Hoffnung, dass es dann eher Unabhängigkeit hat und nicht das Versagen eines Systems mit dem Versagen des nächsten Systems kombiniert auftreten.

Kleine Warnung für Prüfung, nicht verwechseln:

Bei mehr als 2 involvierten Ereignissen ist Vorsicht am Platz. Verweise auf Buch (3.5.9).

Aufgabe 3-61: In einem Dorf in den Schweizer Alpen leben während der Ferienzeit dreimal so viele (männliche) Touristen wie Einheimische. 20% der Einheimischen und 40% der Fremden tragen ein Sennenkäppli. Ich treffe einen Herrn mit einer derartigen Kopfbedeckung an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel 3 im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

In 3Blue1Brown
https://www.3blue1brown.com/lessons/bayes-theorem
https://www.3blue1brown.com/lessons/bayes-theorem-quick
https://www.3blue1brown.com/lessons/better-bayes

Oft sinnvoll, 2 Würfel als unterscheidbar denken, da dann 1/36 (Laplace).

$A \cap B$ steht für "und" - $A \cup B$ steht für "oder", und zwar nicht "entweder .... oder" sondern A, B oder die Schnittmenge, also beide, treten ein.

Die Axiome der Wahrscheinlichkeit: W'keiten sind in $[0, 1]$, es gilt $P[\Omega] = 1, P[\phi] = 0$ und bei disjunkten Mengen kann man "auseinanderziehen und getrennt berechnen": $P[A \cup B \ldots] = P[A] + P[B] + \ldots$.. (Definition 3.1)

Ist $A \subseteq B$ ("Stadt Zürich ist Teilmenge des Kantons Zürich"), dann gilt $P[B] = P[A] + P[B \backslash A]$ ("Kanton besteht aus Stadt und Landgemeinden") und damit $P[A] \leq P[B]$ ("wahrscheinlicher aus Kanton Zürich statt nur aus der Stadt Zürich"). Ist es einfacher, das Komplement zu berechnen? $P[A] = 1 - P[\overline{A}]$. "doppelt gezählt, also einmal wieder weg": $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

Üben/probieren bis es langweilig wird - dann hat man es begriffen!

Wenn man eine komplizierte (Satz)aufgabe lösen muss: einfach mal, nicht zielgerichtet, ein Beispiel lösen mit konkreten Zahlen statt unbekannten Parametern (Druck rausnehmen, weniger Blockade); Bsp 3.4.4.C

Korb mit 100 Personen (bei %) bzw 1000 Personen (bei Pro*mille*) zur Anschauung.

Bedingte Wahrscheinlichkeit heisst, dass wir ein anderes Ereignis schon voraussetzen: $P[A|B] = P[A \cap B]/P[B]$; es gelten

$$P[A|B]P[B] = P[A \cap B] = P[B|A]P[A] \qquad \text{(Produktformel)}$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A] + P[B|\overline{A}]P[\overline{A}]} \qquad \text{(Formel von Bayes)}$$

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]. \qquad \text{(FTW)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen bedeutet:

$$P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Kleine Warnung für Prüfung, nicht verwechseln:

$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ wenn A und B *disjunkt*
$P[A \cap B] = P[A]P[B]$ wenn A und B *unabhängig*

Undeutliche Schreibweise: $P[A|B]$ ist nicht $P[A \backslash B]$.

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Ein fairer Würfel wird einmal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl (2, 4 oder 6) zu würfeln?

(a) $\frac{1}{6}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{2}$

Frage 2: Ein fairer Münzwurf hat zwei mögliche Ergebnisse: Kopf (K) oder Zahl (Z). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal hintereinander Kopf zu werfen?

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{4}$

Frage 3: Ein Punkt wird zufällig auf einer quadratischen Zielscheibe mit einer Seitenlänge von 20 cm platziert. Innerhalb der Zielscheibe befindet sich ein quadratischer Zielbereich mit einer Seitenlänge von 5 cm. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt innerhalb des Zielbereichs landet?

(a) $\frac{1}{4}$
(b) $\frac{1}{8}$
(c) $\frac{1}{16}$

Frage 4: Beim Werfen zweier unterscheidbarer Würfel gibt es insgesamt wie viele verschiedene mögliche Ergebnisse?

(a) 36
(b) 24
(c) 18

Frage 5: Ein Würfel wird geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl gerade ist, gegeben dass sie grösser als 2 ist?

(a) $\frac{1}{3}$
(b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{1}{2}$

Frage 6: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler eine Prüfung besteht, beträgt 0.8. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er durchfällt?

(a) 0.2
(b) 0.5
(c) 0.8

Frage 7: Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
(b) Wenn zwei Ereignisse unabhängig sind, dann sind sie auch disjunkt.
(c) Wenn zwei Ereignisse unabhängig sind, dann ist $P(A|B) = P(A)$

Frage 8: Gegeben sind zwei Ereignisse: $P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.4, \quad P(A \cap B) = 0.1$. Wie gross ist $P(A \cup B)$?

(a) 0.1

(b) 0.6

(c) 0.7

Frage 9: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person nicht raucht, beträgt 0.75. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie raucht?

(a) 0.15

(b) 0.25

(c) 0.5

Frage 10: Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal die Zahl 5 zu werfen?

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{12}$

(c) $\frac{1}{36}$

Frage 11: Beim Roulette gibt es 37 Zahlen (0 bis 36). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl (0 gilt hier nicht als gerade) zu erhalten?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{18}{37}$

(c) $\frac{19}{37}$

Frage 12: Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis A

(b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ für beliebige Ereignisse A und B

(c) $P(\Omega) = 1$

Frage 13: Gegeben sind zwei Ereignisse mit $P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.4, \quad P(A \cap B) = 0.2$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Ereignisse eintritt?

(a) 0.7

(b) 0.9

(c) 0.6

Frage 14: In einer Schule haben 30% der Schüler Mathematik und 40% Physik als Wahlfach, 20% der Schüler haben beide Fächer gewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler Mathematik gewählt hat, gegeben, dass er Physik gewählt hat?

(a) 0.3
(b) 0.5
(c) 0.75

Frage 15: Sie Werfen einen fairen Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie eine 6 werfen, beträgt 1/6. Ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die letzten 5 Würfe eine 6 waren? Ja oder Nein

Lösungen zu Klickerfragen:

Frage 1: (c) Es gibt 3 günstige Ergebnisse (2, 4, 6) und insgesamt 6 mögliche Ergebnisse. $P = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; Frage 2: (c) Jeder Wurf hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Für zwei aufeinanderfolgende Würfe: $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; Frage 3: (c) Die Wahrscheinlichkeit ist proportional zu den Flächen. Die Fläche des grossen Quadrats: $20 \times 20 = 400$, die Fläche des Zielbereichs: $5^2 = 25$, $P = \frac{25}{400} = \frac{1}{16}$; Frage 4: (a) Jeder Würfel hat 6 Seiten. $6 \times 6 = 36$ mögliche Ergebnisse; Frage 5: (c) Die Menge der geraden Zahlen: $A = \{2, 4, 6\}$. Die Menge der Zahlen grösser als 2: $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Schnittmenge: $A \cap B = \{4, 6\}$. $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$; Frage 6: (a) $P(\text{nichtbestehen}) = 1 - \text{P}(\text{bestehen}) = 1 - 0.8 = 0.2$; Frage 7: (b) Warum ist diese Antwort falsch? Disjunkt (unvereinbar) bedeutet: $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$ Können nie gleichzeitig eintreten. Unabhängig bedeutet: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ Dürfen gleichzeitig eintreten, aber hängen nicht voneinander ab. Daher können zwei unabhängige Ereignisse sehr wohl gemeinsam auftreten, nur beeinflussen sie sich nicht gegenseitig; Frage 8: (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$; Frage 9: (b) $P(\text{rauchen}) = 1 - \text{P}(\text{nichtrauchen}) = 1 - 0.75 = 0.25$; Frage 10: (c) $P(5, 5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; Frage 11: (b) $\frac{18}{37}$; Frage 12: (b) ist falsch. Die richtige Formel lautet: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; Frage 13: (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Ereignisse eintritt, ist die Vereinigung von A und B. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung wird mit der Additionsregel berechnet: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$; Frage 14: (b) Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist: $P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$; Frage 15: Nein. Die Wahrscheinlichkeit wird durch diese Information nicht beeinflusst, sie beträgt noch immer 1/6. Die Würfe sind unabhängig und beeinflussen einander nicht. (Man könnte argumentieren, dass der Würfel immer verdächtiger wird und möglicherweise doch nicht fair ist...).