Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

6. AUSGEWÄHLTE VERTEILUNGEN (DISTRIBUTIONS)

Ab jetzt immer dabei: Kapitel 6 und TR, mit dem Sie an die Prüfung gehen!

Hausaufgabe von hier bis und mit 6.1.2.

Dies ist Ihr wichtigstes Kapitel für die Prüfung! Alle Resultate zu allen Verteilungen sind hier zusammengefasst und dürfen benutzt werden, auch wenn wir sie nicht in der Vorlesung benutzt haben (zB $E[\chi_n^2] = n$, siehe später). Im Buch hat es noch weitere Verteilungen - diese kommen an der Prüfung nicht vor!

Wir präsentieren hier viele Resultate, welche wir aus Zeitgründen nicht alle nachprüfen. Viele der nachfolgenden Resultate sind bereits bekannt und werden hier nur kompakt zusammengefasst, sodass wir relativ rasch voranschreiten werden; bitte zu Hause in Ruhe durchlesen. Es kommen auch Verteilungen vor, welchen wir bis jetzt noch nicht begegnet sind. Wir werden diese Teile in unterer Zusammenfassung nochmals repetieren, sobald wir auf diese Verteilungen stossen; es ist also nicht gravierend, wenn man einzelne Teile (noch) nicht versteht.

Die StudentInnen lernen hier, wie Wahrscheinlichkeitsfunktionen ($P[X = k]$) oder Dichten ($f(x)$) der wichtigsten Verteilungen aussehen. Wir werden dies in der Statistik (Ablehnungsbereiche bei Tests) intensiv brauchen. Für Ihr weiteres Studium gilt: je mehr Verteilungen Sie kennen, desto besser können Sie die Wirklichkeit modellieren.

Schreibweisen:

6.1 Diskrete Verteilungen

6.1.1 Bernoulli Be(p); R: binom mit $n = 1$

X kann 2 Werte annehmen: 0 und 1. $P[X = 1] = p$ (Erfolg) und $P[X = 0] = 1 - p$ (Misserfolg), $p \in [0, 1]$. $E[X] = p$ und $V[X] = p(1 - p)$. Mit $k \in \{0, 1\}$ haben wir

$$P[X = k] = p^k (1 - p)^{1-k}.$$

Dies ist in der Tat gleichwertig wie oben, zielt aber bereits auf die Bin(n,p):

$k = 0$: dann haben wir $P[X = 0] = p^0(1 - p)^{1-0} = 1 - p$

$k = 1$: dann haben wir $P[X = 1] = p^1(1 - p)^{1-1} = p$

Je nach Modellierungssituation kann eine Be(p) auch symmetrisch um Null mit möglichen Werten -1 und $+1$ und Wahrscheinlichkeiten je 0.5 definiert werden. Dann gilt übrigens $E[X] = 0$. Der symmetrische Random Walk baut darauf auf.

6.1.2 Binomial Bin(n,p); R: binom

Seien X_i, $1 \leq i \leq n$, n iid Be(p)-Zufallsgrössen. Sei $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann hat Y per Definitionem die Binomialverteilung mit Parametern n und p; Bin(n,p). $E[Y] = np$ (Bemerkung zu Lemma 5.3) und $V[Y] = np(1 - p)$ (Bemerkung zu Lemma 5.5). $0 \leq k \leq n$:

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Einsatz: Anzahl Erfolge (k) bei n unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Wenn $n = 1$ ist, sollte das die Be(p) geben:

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{1}{k} p^k (1 - p)^{1-k}$$

Weil sowohl $\binom{1}{0} = 1$ wie auch $\binom{1}{1} = 1$ und jetzt nur noch $k \in \{0, 1\}$ ist das in der Tat die Be(p), vgl. mit oben 6.1.1.

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung Bin(n, p)

n	k	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50		
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	*2*	
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	*1*	
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	*0*	*2*
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	*3*	
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	*2*	
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	*1*	
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250	*0*	*3*
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	*4*	
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	*3*	
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	*2*	
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500	*1*	
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625	*0*	*4*
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312	*5*	
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562	*4*	
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	*3*	
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125	*2*	
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562	*1*	
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312	*0*	*5*
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	*6*	
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	*5*	
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	*4*	
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125	*3*	
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344	*2*	
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938	*1*	
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156	*0*	*6*
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	*7*	
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547	*6*	
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	*5*	
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734	*4*	
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734	*3*	
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641	*2*	
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547	*1*	
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078	*0*	*7*
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	*8*	
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312	*7*	
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	*6*	
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188	*5*	
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734	*4*	
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188	*3*	
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094	*2*	
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312	*1*	
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039	*0*	*8*
		.95	*.90*	*.85*	*.80*	*.75*	*.70*	*.65*	*.60*	*.55*	*.50*	k	n

6.1.3 Geometrisch Ge(p); R: geom

Bei dieser Verteilung interessieren wir uns für den Zeitpunkt des ersten Erfolgs (erste Mal eine 6 beim Würfel, erste Mal Kopf beim Münzwurf). Z ist eine Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen ohne die Null (vgl. dazu aber auch p+1). Wir haben mit $p \in [0, 1]$

$$P[Z = k] = p(1 - p)^{k-1}.$$

Es gilt $E[Z] = 1/p$ (das merkt man sich am Besten mit dem Würfel: $1/p = 1/(1/6) = 6$ - es braucht durchschnittlich 6 Würfe, bis eine 6 kommt, aus Symmetriegründen: im Durchschnitt kommt alle 6 mal eine 6, ebenso eine 5, eine 4, etc.) und $V[Z] = (1 - p)/p^2$.

Die Ge(p) hat die Eigenschaft, dass sie die einzige diskrete (vgl p+5) Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit $n > m > 0$ gilt hier

$$P[Z > n|Z > m] = P[Z > (n - m)].$$

"Gegeben, es hat schon $m = 1000$ Würfe ohne 6 (=Erfolg) gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens $n = 1004$ Würfe ohne 6 geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz $n - m = 4$ abhängig. Wie lange es bereits keine 6 gegeben hat, ist egal!"

Es sei noch erwähnt, dass die geometrische Verteilung in gewissen Lehrbüchern - und in R - so definiert wird, dass man die Anzahl Misserfolge M bis zum ersten Erfolg zählt. Dann nimmt die Ge(p) Werte auf den natürlichen Zahlen *inklusive* die 0 an. Die Resultate sind analog, aber leicht komplizierter:

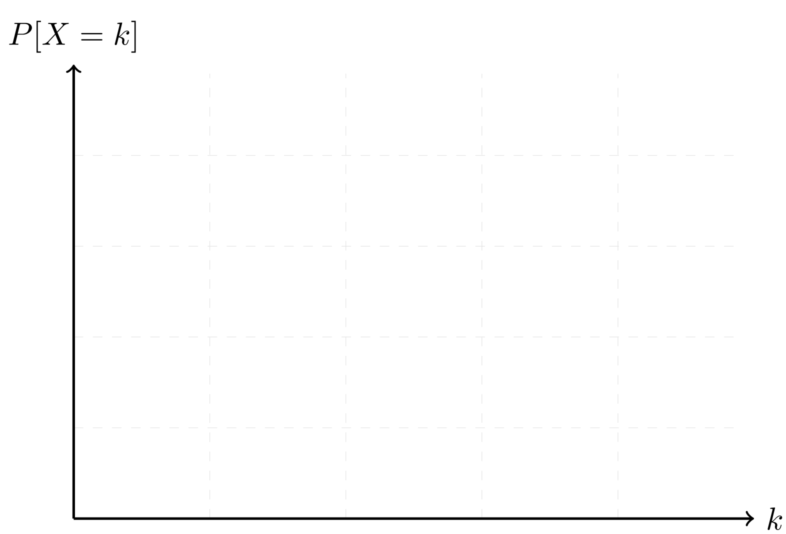
$$P[M = k] =$$

für $k \geq$

Erwartungswert $E[M] =$, weil

Varianz $V[M] =$, weil

Woher kommt der Name "Geometrisch"? Erklärt anhand eines fairen Würfels:



6.1.4 Poisson Po(λ); ausführlich in Kapitel 7, R: pois

Eine Zufallsgrösse X ist poissonsch, wenn sie Werte auf den natürlichen Zahlen inklusive 0 annimmt und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$E[X] = V[X] = \lambda$ (E: Bsp 3 in 5.1). Motivation Poissonverteilung in Kapitel 7; en bref:

* bis jetzt wird gesagt: "Sei $X \sim \text{Po}(\lambda)$": einfach lösen, ohne Motivation zu kennen

* später in Kapitel 7, Motivation geht über folgende Punkte (identischer Text in Kapitel 7, 7.3):

1. Situation, wo erste Idee Bin(n, p), zB # Hausbrände in CH pro Jahr, # Meteoriteneinschläge pro Jahr, # Flugzeugabstürze pro Jahr

2. n gross und p klein

3. Kapitel 7: nehme stattdessen Po(λ), da einfacher und nur 1 Parameter statt 2

4. λ so, dass $E[\text{Bin}(n, p)] = E[\text{Po}(\lambda)]$, das heisst $np = \lambda$ (manchmal kennt man eher λ und nicht np (Meteoriteneinschläge))

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung Po(λ)

λ	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2	0.819	0.164	0.016	0.001	0.000						
0.4	0.670	0.268	0.054	0.007	0.001	0.000					
0.6	0.549	0.329	0.099	0.020	0.003	0.000					
0.8	0.449	0.359	0.144	0.038	0.008	0.001	0.000				
1.0	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.001	0.000			
1.2	0.301	0.361	0.217	0.087	0.026	0.006	0.001	0.000			
1.4	0.247	0.345	0.242	0.113	0.039	0.011	0.003	0.001	0.000		
1.6	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	0.001	0.000		
1.8	0.165	0.298	0.268	0.161	0.072	0.026	0.008	0.002	0.000		
2.0	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012	0.003	0.001	0.000	
2.2	0.111	0.244	0.268	0.197	0.108	0.048	0.017	0.005	0.002	0.000	
2.4	0.091	0.218	0.261	0.209	0.125	0.060	0.024	0.008	0.002	0.001	0.000
2.6	0.074	0.193	0.251	0.218	0.141	0.074	0.032	0.012	0.004	0.001	0.000
2.8	0.061	0.170	0.238	0.222	0.156	0.087	0.041	0.016	0.006	0.002	0.000
3.0	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101	0.050	0.022	0.008	0.003	0.001
3.2	0.041	0.130	0.209	0.223	0.178	0.114	0.061	0.028	0.011	0.004	0.001
3.4	0.033	0.113	0.193	0.219	0.186	0.126	0.072	0.035	0.015	0.006	0.002
3.6	0.027	0.098	0.177	0.212	0.191	0.138	0.083	0.042	0.019	0.008	0.003
3.8	0.022	0.085	0.162	0.205	0.194	0.148	0.094	0.051	0.024	0.010	0.004
4.0	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	0.005
4.2	0.015	0.063	0.132	0.185	0.194	0.163	0.114	0.069	0.036	0.017	0.007
4.4	0.012	0.054	0.119	0.174	0.192	0.169	0.124	0.078	0.043	0.021	0.009
4.6	0.010	0.046	0.106	0.163	0.188	0.173	0.132	0.087	0.050	0.026	0.012
4.8	0.008	0.040	0.095	0.152	0.182	0.175	0.140	0.096	0.058	0.031	0.015
5.0	0.007	0.034	0.084	0.140	0.175	0.175	0.146	0.104	0.065	0.036	0.018
5.2	0.006	0.029	0.075	0.129	0.168	0.175	0.151	0.113	0.073	0.042	0.022
5.4	0.005	0.024	0.066	0.119	0.160	0.173	0.156	0.120	0.081	0.049	0.026
5.6	0.004	0.021	0.058	0.108	0.152	0.170	0.158	0.127	0.089	0.055	0.031
5.8	0.003	0.018	0.051	0.098	0.143	0.166	0.160	0.133	0.096	0.062	0.036
6.0	0.002	0.015	0.045	0.089	0.134	0.161	0.161	0.138	0.103	0.069	0.041
6.2	0.002	0.013	0.039	0.081	0.125	0.155	0.160	0.142	0.110	0.076	0.047
6.4	0.002	0.011	0.034	0.073	0.116	0.149	0.159	0.145	0.116	0.082	0.053
6.6	0.001	0.009	0.030	0.065	0.108	0.142	0.156	0.147	0.121	0.089	0.059
6.8	0.001	0.008	0.026	0.058	0.099	0.135	0.153	0.149	0.126	0.095	0.065
7.0	0.001	0.006	0.022	0.052	0.091	0.128	0.149	0.149	0.130	0.101	0.071
7.2	0.001	0.005	0.019	0.046	0.084	0.120	0.144	0.149	0.134	0.107	0.077
7.4	0.001	0.005	0.017	0.041	0.076	0.113	0.139	0.147	0.136	0.112	0.083
7.6	0.001	0.004	0.014	0.037	0.070	0.106	0.134	0.145	0.138	0.117	0.089
7.8	0.000	0.003	0.012	0.032	0.063	0.099	0.128	0.143	0.139	0.121	0.094
8.0	0.000	0.003	0.011	0.029	0.057	0.092	0.122	0.140	0.140	0.124	0.099
8.2	0.000	0.002	0.009	0.025	0.052	0.085	0.116	0.136	0.139	0.127	0.104
8.4	0.000	0.002	0.008	0.022	0.047	0.078	0.110	0.132	0.138	0.129	0.108
8.6	0.000	0.002	0.007	0.020	0.042	0.072	0.103	0.127	0.137	0.131	0.112
8.8	0.000	0.001	0.006	0.017	0.038	0.066	0.097	0.122	0.134	0.131	0.116
9.0	0.000	0.001	0.005	0.015	0.034	0.061	0.091	0.117	0.132	0.132	0.119

6.1.5 Hypergeometrische Verteilung; R: hyper

Man hat N Objekte, wovon M "gut" sind. Aus den gesamten N Objekten werden nun n ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ dafür, dass unter den n ausgewählten Objekten genau k "gute" sind, $\max(0, n + M - N) \leq k \leq \min(M, n)$, ist

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \ .$$

Mit der Abkürzung

$$p := \frac{M}{N} \quad \text{ist} \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} \ .$$

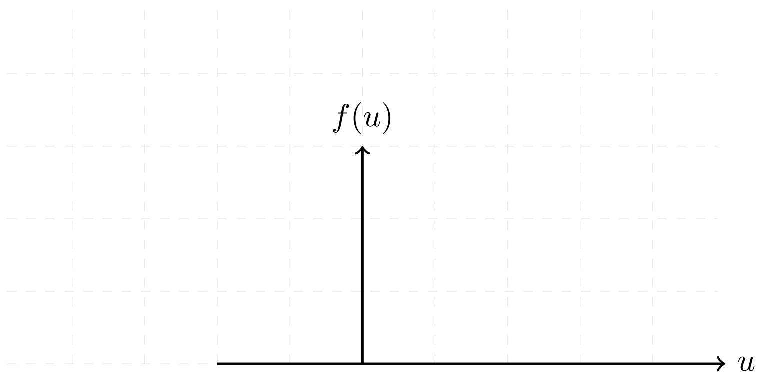
6.2 Stetige Verteilungen

Vorsicht: "stetig" heisst hier nicht (wie in MAT182), dass etwa die Dichte $f(x)$ stetig sein muss, siehe auch gleich nachfolgend:

6.2.1 Uniform $U[a,b]$; R: unif - auch Gleichverteilung / Rechteckverteilung

Die einfachste stetige Verteilung ist die Uniform-Verteilung: Eine Zufallsgrösse U ist per definitionem auf dem Intervall $[a,b]$ uniform verteilt, wenn U folgende Dichtefunktion hat:

$$f(u) = (b-a)^{-1},$$



wobei dann natürlich $a \leq u \leq b$ zu gelten hat. Ausserhalb von $[a,b]$ ist die Dichte gleich null. Es gilt $E[U] = (a+b)/2$ (2. Beispiel von 5.1) und $V[U] = (b-a)^2/12$ (Beispiel 6 in 5.1).

6.2.2 (Negativ-) Exponential Exp(λ); R: exp

Eine Zufallsgrösse X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \;\; x \geq 0,$$

heisst exponentialverteilt mit Parameter (oder Rate) λ; Exp(λ). Es gilt $E[X] = 1/\lambda$ und $V[X] = 1/\lambda^2$. Es macht Sinn, dass die erwartete Zeit bis zum (nächsten) Ereignis umgekehrt proportional zur Rate sein muss. Modell für: Zeit bis radioaktiver Zerfall, "wann geht eine Glühbirne kaputt?", Zwischenzeit bei der Ankunft von KundInnen in einem Geschäft und vieles mehr.

Die Exp(λ) hat die Eigenschaft, dass sie die einzige stetige (vgl p-5) Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit $t > s > 0$ gilt hier

$$P[X > t | X > s] = P[X > (t - s)].$$

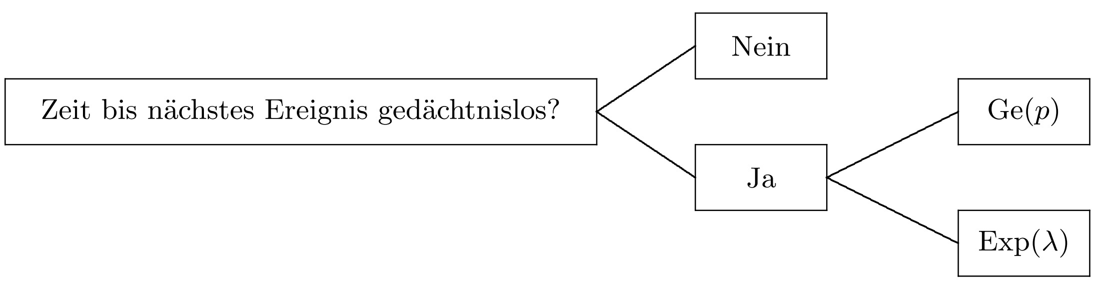
"Gegeben, es hat schon $s = 1000$ Sekunden keinen Atomzerfall gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens $t = 1004$ Sekunden keinen Atomzerfall geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz $t - s = 4$ Sekunden abhängig. Wie lange es bereits keinen Atomzerfall gegeben hat, ist egal!"

Gemeinsamkeiten von Ge(p) und Exp(λ) und Konsequenzen:

Signalwort ist (Übergangs- oder Warte-)Zeit bis... .

Bsp sind Würfel: erste 6? Münze: erstes Mal Kopf? Isotop: Wann nächster Zerfall?

Artikel dazu: www.schweizermonat.ch/exakt-modellierte-zufaelle ; Schema:



6.2.3 Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; auch Gauss-, Glocken-, Bell-, Forrest Gump-Verteilung, R: norm

Vorsicht: R $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, Luchs $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes (siehe Kapitel 7) ist die Normalverteilung sehr wichtig: Mit Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R},$$

gilt $E[X] = \mu$ (Beispiel 4 in 5.1) und $V[X] = \sigma^2$ (Beispiel 8 in 5.1).

"Z-Transform" - siehe Kapitel 5: Wenn X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung hat, dann hat

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{(Z} - \text{Transform)}$$

eine $\mathcal{N}(0, 1)$-Verteilung (welche in Büchern und Libraries von Statistik-Paketen abgelegt ist). $\mathcal{N}(0, 1)$ nennen wir "Standard-Normalverteilung".

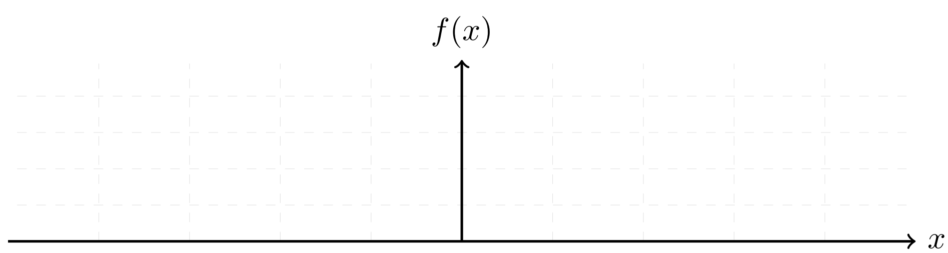
Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$

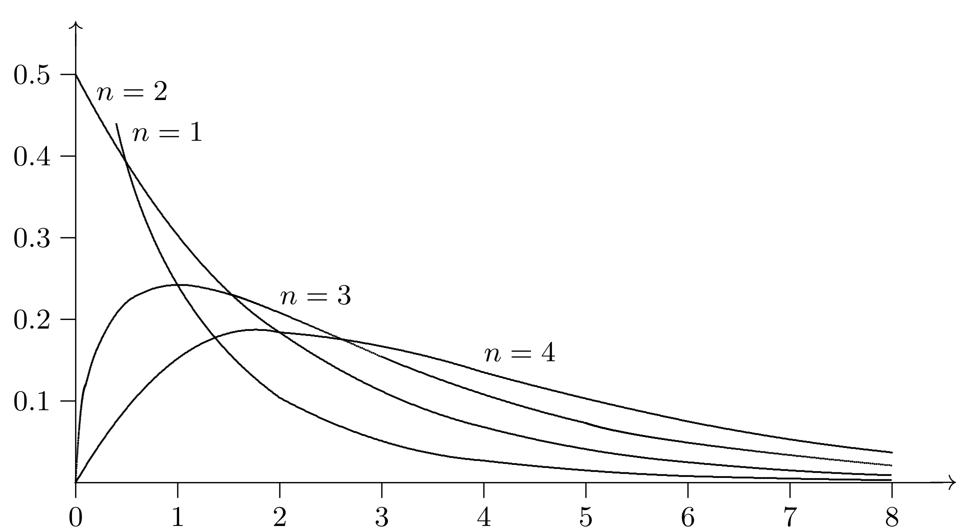
x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
−4.00	0.0000	−1.10	0.1357	0.02	0.5080	1.12	0.8686
−3.90	0.0000	−1.08	0.1401	0.04	0.5160	1.14	0.8729
−3.80	0.0001	−1.06	0.1446	0.06	0.5239	1.16	0.8770
−3.70	0.0001	−1.04	0.1492	0.08	0.5319	1.18	0.8810
−3.60	0.0002	−1.02	0.1539	0.10	0.5398	1.20	0.8849
−3.50	0.0002	−1.00	0.1587	0.12	0.5478	1.22	0.8888
−3.40	0.0003	−0.98	0.1635	0.14	0.5557	1.24	0.8925
−3.30	0.0005	−0.96	0.1685	0.16	0.5636	1.26	0.8962
−3.20	0.0007	−0.94	0.1736	0.18	0.5714	1.28	0.8997
−3.10	0.0010	−0.92	0.1788	0.20	0.5793	1.30	0.9032
−3.00	0.0013	−0.90	0.1841	0.22	0.5871	1.32	0.9066
−2.90	0.0019	−0.88	0.1894	0.24	0.5948	1.34	0.9099
−2.80	0.0026	−0.86	0.1949	0.26	0.6026	1.36	0.9131
−2.70	0.0035	−0.84	0.2005	0.28	0.6103	1.38	0.9162
−2.60	0.0047	−0.82	0.2061	0.30	0.6179	1.40	0.9192
−2.50	0.0062	−0.80	0.2119	0.32	0.6255	1.42	0.9222
−2.45	0.0071	−0.78	0.2177	0.34	0.6331	1.44	0.9251
−2.40	0.0082	−0.76	0.2236	0.36	0.6406	1.46	0.9279
−2.35	0.0094	−0.74	0.2296	0.38	0.6480	1.48	0.9306
−2.30	0.0107	−0.72	0.2358	0.40	0.6554	1.50	0.9332
−2.25	0.0122	−0.70	0.2420	0.42	0.6628	1.55	0.9394
−2.20	0.0139	−0.68	0.2483	0.44	0.6700	1.60	0.9452
−2.15	0.0158	−0.66	0.2546	0.46	0.6772	1.65	0.9505
−2.10	0.0179	−0.64	0.2611	0.48	0.6844	1.70	0.9554
−2.05	0.0202	−0.62	0.2676	0.50	0.6915	1.75	0.9599
−2.00	0.0228	−0.60	0.2743	0.52	0.6985	1.80	0.9641
−1.95	0.0256	−0.58	0.2810	0.54	0.7054	1.85	0.9678
−1.90	0.0287	−0.56	0.2877	0.56	0.7123	1.90	0.9713
−1.85	0.0322	−0.54	0.2946	0.58	0.7190	1.95	0.9744
−1.80	0.0359	−0.52	0.3015	0.60	0.7257	2.00	0.9772
−1.75	0.0401	−0.50	0.3085	0.62	0.7324	2.05	0.9798
−1.70	0.0446	−0.48	0.3156	0.64	0.7389	2.10	0.9821
−1.65	0.0495	−0.46	0.3228	0.66	0.7454	2.15	0.9842
−1.60	0.0548	−0.44	0.3300	0.68	0.7517	2.20	0.9861
−1.55	0.0606	−0.42	0.3372	0.70	0.7580	2.25	0.9878
−1.50	0.0668	−0.40	0.3446	0.72	0.7642	2.30	0.9893
−1.48	0.0694	−0.38	0.3520	0.74	0.7704	2.35	0.9906
−1.46	0.0721	−0.36	0.3594	0.76	0.7764	2.40	0.9918
−1.44	0.0749	−0.34	0.3669	0.78	0.7823	2.45	0.9929
−1.42	0.0778	−0.32	0.3745	0.80	0.7881	2.50	0.9938
−1.40	0.0808	−0.30	0.3821	0.82	0.7939	2.60	0.9953
−1.38	0.0838	−0.28	0.3897	0.84	0.7995	2.70	0.9965
−1.36	0.0869	−0.26	0.3974	0.86	0.8051	2.80	0.9974
−1.34	0.0901	−0.24	0.4052	0.88	0.8106	2.90	0.9981
−1.32	0.0934	−0.22	0.4129	0.90	0.8159	3.00	0.9987
−1.30	0.0968	−0.20	0.4207	0.92	0.8212	3.10	0.9990
−1.28	0.1003	−0.18	0.4286	0.94	0.8264	3.20	0.9993
−1.26	0.1038	−0.16	0.4364	0.96	0.8315	3.30	0.9995
−1.24	0.1075	−0.14	0.4443	0.98	0.8365	3.40	0.9997
−1.22	0.1112	−0.12	0.4522	1.00	0.8413	3.50	0.9998
−1.20	0.1151	−0.10	0.4602	1.02	0.8461	3.60	0.9998
−1.18	0.1190	−0.08	0.4681	1.04	0.8508	3.70	0.9999
−1.16	0.1230	−0.06	0.4761	1.06	0.8554	3.80	0.9999
−1.14	0.1271	−0.04	0.4840	1.08	0.8599	3.90	1.0000
−1.12	0.1314	−0.02	0.4920	1.10	0.8643	4.00	1.0000
		0.00	0.5000				

Ab hier hat es in Kapitel 6 viele Details. Operationelles Hauptziel ist, dass Sie die folgenden 3 Tabellen korrekt ablesen können. Da hilft die vorbereitende Theorie durchaus, ist aber nicht zentral. Ziel ist diesbezüglich eher "Wiedererkennen, erinnern, wo gesehen und bei Bedarf nachlesen." But please: Give your brain a chance.

6.2.4 χ^2; R: chisq

Diese Verteilung ist in der Statistik zentral wichtig und verdankt ihre Bedeutung weitgehend dem zentralen Grenzwertsatz (Kapitel 7), insbesondere, dass man in Modellen der Datenanalyse Fehlerterme häufig normalverteilt modelliert. Wenn $(X_i)_{i=1}^n$ iid $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind, dann ist $\sum_{i=1}^n X_i^2$ χ_n^2-verteilt (sprich "Chiquadrat mit n Freiheitsgraden" (degree of freedom, df)). Die einzelnen X_i^2 sind als Quadrate alle grösser 0 und damit wandert die Verteilung mit wachsendem n nach rechts, siehe auch Darstellung zuunterst. Wir untersuchen jetzt aber zuerst den Fall $n = 1$:





Kritische Werte der χ_n^2-Verteilung für ein Signifikanzniveau von α

n \ α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828
2	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816
3	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.467
5	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458
7	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703
40	47.3	51.8	55.8	60.4	63.7	73.4
50	58.2	63.2	67.5	72.6	76.2	86.7
60	69.0	74.4	79.1	84.6	88.4	99.6
80	90.4	96.6	101.9	108.1	112.3	124.8
100	111.7	118.5	124.3	131.1	135.8	149.5
150	164.3	172.6	179.6	187.7	193.2	209.3
200	216.6	226.0	234.0	243.2	249.4	267.6
Z_α	0.842	1.282	1.645	2.054	2.326	3.090

Wenn $(Y_i)_{i=1}^n$ iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind, dann hat wegen der Z-Transformation

$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

die χ_n^2-Verteilung. μ kennt man aber oft nicht und schätzt es deshalb mit $\overline{Y} := \sum_{i=1}^n Y_i/n$. Das gibt dann ein wenig überraschend: Wenn (vergleiche Zähler oben)

$$S^2 := \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2,$$

hat S^2/σ^2 die χ_{n-1}^2-Verteilung. Eine Bauernregel sagt: ein df geht verloren pro Parameter, den man schätzt (μ wird mit $\overline{Y}$ geschätzt). Die Dichte der χ_n^2-Verteilung ist

$$f(x) := \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}},\ x \geq 0, \tag{Monster I}$$

wobei die Γ-Funktion uns hier nicht weiter interessiert (es gilt für gerade n: $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)!$). $E[\chi_n^2] = n; V[\chi_n^2] = 2n$. Bilder zur Dichte p-2.

In Anbetracht der Definition ist es nicht überraschend, dass, wenn X eine χ_a^2-Zufallsgrösse und Y eine χ_b^2-Zufallsgrösse ist und X und Y unabhängig voneinander sind, dann ist $W := X + Y$ eine χ_{a+b}^2-Zufallsgrösse.

6.2.5 F; R: f

Seien U und V zwei unabhängige, χ_m^2-, bzw. χ_n^2-verteilte Zufallsgrössen. Dann ist der Ausdruck

$$W := \frac{U/m}{V/n}$$

F-verteilt mit Parametern m, n: $F_{m,n}$. Diese Zufallsgrössen kommen in Kapitel 10 vor. Für $x \geq 0$ haben wir die Dichtefunktion (Monster II)

$$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1 + mx/n)^{(m+n)/2}}$$

Es gilt $E[W] = n/(n-2)$ (falls $n > 2$), also etwa 1 und

$V[W] = [2n^2(m+n-2)]/[m(n-2)^2(n-4)]$ (falls $n > 4$).

Kritische Werte der $F(m, n)$-Verteilung für ein Signifikanzniveau von 5%

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	245.9	248.0	250.1
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.703	8.660	8.617
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.858	5.803	5.746
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.496
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.938	3.874	3.808
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.511	3.445	3.376
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.218	3.150	3.079
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.006	2.936	2.864
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.700
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.719	2.646	2.570
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.617	2.544	2.466
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.533	2.459	2.380
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.463	2.388	2.308
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.247
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.352	2.276	2.194
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.308	2.230	2.148
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.269	2.191	2.107
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.234	2.155	2.071
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	2.039
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.176	2.096	2.010
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.151	2.071	1.984
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.128	2.048	1.961
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.108	2.027	1.939
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.919
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220	2.072	1.990	1.901
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.056	1.974	1.884
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.041	1.959	1.869
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.027	1.945	1.854
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.841
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199	2.153	2.003	1.920	1.828
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142	1.992	1.908	1.817
33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179	2.133	1.982	1.898	1.806
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170	2.123	1.972	1.888	1.795
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114	1.963	1.878	1.786
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106	1.954	1.870	1.776
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145	2.098	1.946	1.861	1.768
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091	1.939	1.853	1.760
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131	2.084	1.931	1.846	1.752
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.744
41	4.079	3.226	2.833	2.600	2.443	2.330	2.243	2.174	2.118	2.071	1.918	1.832	1.737
42	4.073	3.220	2.827	2.594	2.438	2.324	2.237	2.168	2.112	2.065	1.912	1.826	1.731
43	4.067	3.214	2.822	2.589	2.432	2.318	2.232	2.163	2.106	2.059	1.906	1.820	1.724
44	4.062	3.209	2.816	2.584	2.427	2.313	2.226	2.157	2.101	2.054	1.900	1.814	1.718
45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049	1.895	1.808	1.713
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.871	1.784	1.687
55	4.016	3.165	2.773	2.540	2.383	2.269	2.181	2.112	2.055	2.008	1.852	1.764	1.666
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.649
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.812	1.722	1.622
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.793	1.703	1.602
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.779	1.688	1.586
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.768	1.676	1.573
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.717	1.623	1.516
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854	1.691	1.597	1.488
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850	1.686	1.592	1.482
1000	3.851	3.005	2.614	2.381	2.223	2.108	2.019	1.948	1.889	1.840	1.676	1.581	1.471

6.2.6 t; R: t

Zur Geschichte des Namens: https://de.wikipedia.org/wiki/William_Sealy_Gosset

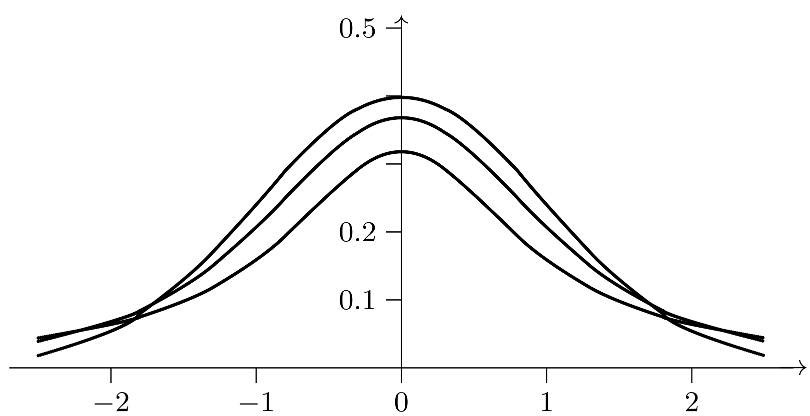
Sei Y eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse und Z eine χ^2_n-Zufallsgrösse; Y unabhängig von Z.

$$T_n := \frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

ist dann fast $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, aber nicht genau, die genaue Verteilung ist Student-t-Verteilung mit n df. Die Dichte der t_n-Verteilung ist (Monster III)

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $E[t_n] = 0$ (falls $n > 1$ und falls $n = 1$ existiert der Erwartungswert nicht), $V[t_n] = n/(n-2)$, sobald $n > 2$. Der Graph der Dichtefunktion f ähnelt jenem der Standard-Normalverteilung. Er ist symmetrisch zur y-Achse, aber "in der Mitte" etwas niedriger und dafür mit mehr Gewicht in den Enden als die Normalverteilung. Je grösser der Freiheitsgrad n ist, desto mehr nähert sich die t-Verteilung der Standard-Normalverteilung. Die oberste Kurve gehört zur Standard-Normalverteilung, die mittlere zur t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad $n = 3$ und die unterste zur t-Verteilung mit $n = 1$. Der Zusammenhang mit anderen Verteilungen ist: "$\sqrt{F_{1,n}} = |t_n|$" (siehe Definition); $t_\infty = \mathcal{N}(0,1)$, siehe auch Tabelle auf der nächsten Seite.



Kritische Werte der t_n-Verteilung für ein Signifikanzniveau von α

n \ α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
1000	1.282	1.645	1.962	2.330	2.581	3.300
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291
$*$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005

*: Signifikanzschwellen für den einseitigen Test.

6.3 Zusammenhänge bei Verteilungen I: $\sum$ von *unabhängigen* Zufallsgrössen, vgl 7.3

Die Summanden in den folgenden Summen müssen immer unabhängig sein. Wenn nicht anders erwähnt, fordern wir auch die gleiche Verteilung. Mit kompakten Formeln wie

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n,p)$$

weiter unten ist eigentlich gemeint: Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Be(p)-verteilt. Dann hat

$$Y := \sum_{i=1}^n X_i$$

eine Bin(n,p)-Verteilung.

* Summe von Bernoulli ist Binomial

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n,p)$$

* Grosser Bruder hiervon: Summe von Binomial ist Binomial (p muss immer gleich sein!)

$$\sum_1^n Bin(n_i,p) = Bin(\sum_1^n n_i, p)$$

* Summe von Poisson ist Poisson (Summanden müssen nicht mal identisch verteilt sein)

$$\sum_{i=1}^n Po(\lambda_i) = Po(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$$

* Summe von Normal ist Normal (Summanden müssen nicht mal identisch verteilt sein)

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) = \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$$

6.4 Drei Arten von Tabellen

$\mathcal{N}$: via Z-Transform von $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ zu $\mathcal{N}(0,1)$ transformierbar, deshalb reicht eine $\mathcal{N}(0,1)$-Tabelle mit "allen" Werten; "allen" heisst bis auf die Gitter-/Maschenbreite von mindestens 0.02 bei uns.

χ^2 und t: haben *einen* df, n, $n \geq 1$, bei χ^2_n und t_n, deshalb Tabelle mit Zeilen von diversen df und Spalten mit häufigen α (6 pro df), nicht "alle" Werte wie bei $\mathcal{N}$. In MAT183 df -1 bei KI und Tests

F: hat *zwei* df, m, n je ≥ 1; deshalb $F_{m,n}$, Tabelle mit Zeilen und Spalten von je eigenen df (m, n); relevanter Wert ist dann im "Fadenkreuz"; nur ein $\alpha = 0.05$ bzw 0.95. Weil wir die F-Verteilung bei der ANOVA brauchen, kann in MAT183 in der Prüfung keine ANOVA verlangt sein, wenn wir kein $\alpha = 0.05/0.95$ haben (ausser P-Wert (später) gegeben). In MAT183 bei ANOVA df $k-1$ im Zähler und df $n-k$ im Nenner

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Eine Zufallsgrösse X beschreibt einen Münzwurf, bei dem Kopf als Erfolg zählt. Welche Verteilung hat X? (a) Binomialverteilung, (b) Bernoulli-Verteilung, (c) Poisson-Verteilung.

Frage 2: Der Erwartungswert einer Bernoulli-Verteilung $Be(p)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist: (a) p^2, (b) $1-p$, (c) p.

Frage 3: Wenn du 10-mal würfelst, wie nennt man die Verteilung der Anzahl Sechsen? (a) Binomialverteilung, (b) Normalverteilung, (c) Exponentialverteilung.

Frage 4: Der Erwartungswert einer Binomialverteilung $Bin(n,p)$ ist: (a) $n+p$, (b) $\frac{n}{p}$, (c) np.

Frage 5: Die geometrische Verteilung beschreibt: (a) Die Anzahl Versuche bis zum ersten Erfolg, (b) Die Anzahl Erfolge in einer festen Anzahl Versuche, (c) Die Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit.

Frage 6: Bei einer geometrischen Verteilung $Ge(p)$ ist der Erwartungswert: (a) p, (b) $\frac{1}{p}$, (c) $\frac{p}{1-p}$.

Frage 7: Welche Art von Ereignissen wird typischerweise mit der Poisson-Verteilung modelliert (a) Zeit bis zum ersten Erfolg, mit Erfolgswahrscheinlichkeit sehr klein, (b) Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit, mit Zeiteinheit sehr gross und Ereigniswahrscheinlichkeit sehr klein, (c) Summe von Zufallszahlen.

Frage 8: Der Erwartungswert einer Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$ ist: (a) $\sqrt{\lambda}$, (b) λ^2, (c) λ.

Frage 9: Bei einer gleichverteilten Zufallsgrösse $U \sim U[a, b]$, wo liegt der Erwartungswert?(a) An einem der beiden Randpunkte a oder b, (b) In der Mitte von a und b, (c) Zu wenig Informationen. Es kann keine Aussage über den Erwartungswert gemacht werden.

Frage 10: Was beschreibt die Exponentialverteilung? (a) Im stetigen Fall: Die Zeit bis zum nächsten Ereignis, (b) Die Anzahl Erfolge in einer festen Anzahl Versuche, (c) Die Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit.

Frage 11: Der Erwartungswert einer Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$ ist: (a) $\frac{1}{\lambda}$, (b) λ, (c) $\sqrt{\lambda}$.

Frage 12: Welche Form hat die Dichtefunktion einer Normalverteilung? (a) Glockenförmig, (b) Treppenförmig, (c) Rechteckig.

Frage 13: Was sind die Parameter einer Standardnormalverteilung $N(0, 1)$? (a) $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 0$, (b) $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, (c) $\mu^2 = 1$ und $\sigma = 0$.

Frage 14: Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, was beschreibt die Z-Transformation? (a) Die Transformation auf $N(0, 1)$, (b) Die Addition einer Konstanten, (c) Die Berechnung der Standardabweichung.

Frage 15: Welche Verteilung eignet sich, um folgendes Szenario zu modellieren? Ein fairer Münzwurf mit 1/2 Wahrscheinlichkeit für Kopf und 1/2 Wahrscheinlichkeit für Zahl. (a) Binomialverteilung, (b) Bernoulli-Verteilung, (c) Poisson-Verteilung.

Frage 16: Welche Verteilung eignet sich, um folgendes Szenario zu modellieren? Ein unfairer Münzwurf mit 3/4 Wahrscheinlichkeit für Kopf und 1/4 Wahrscheinlichkeit für Zahl. (a) Binomialverteilung, (b) Bernoulli-Verteilung, (c) Poisson-Verteilung.

Frage 17: Aus einer Urne mit roten und blauen Kugeln werden so lange (mit zurücklegen) Kugeln gezogen, bis eine Blaue gezogen wird. Mit welcher Verteilung modelliert man die Zeit, bis man die blaue Kugel zieht? (a) Binomialverteilung, (b) Geometrische Verteilung, (c) Poisson Verteilung.

Frage 18: Wir untersuchen, wie häufig die Kugel bei 50 Spielen am Roulettetisch auf Rot landet. Mit welcher Verteilung modellieren man die Anzahl Fälle, bei denen die Kugel auf Rot landet? (a) Binomialverteilung, (b) Geometrische Verteilung, (c) Poisson Verteilung.

Lösungen zu Klickerfragen:

Frage 1: (b) Bernoulli-Verteilung; Frage 2: (c) p; Frage 3: (a) Binomialverteilung; Frage 4: (c) np; Frage 5: (a) Die Anzahl Versuche bis zum ersten Erfolg; Frage 6: (b) $\frac{1}{p}$; Frage 7: (b) Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit, mit Zeiteinheit sehr gross und Ereigniswahrscheinlichkeit sehr klein (z.B. Anzahl Hausbrände pro Jahr); Frage 8: (c) λ; Frage 9: (b) In der Mitte von a und b; Frage 10: (a) Im stetigen Fall: Die Zeit bis zum nächsten Ereignis; Frage 11: (a) $\frac{1}{\lambda}$; Frage 12: (a) Glockenförmig; Frage 13: (b) $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$; Frage 14: (a) Die Transformation auf $N(0, 1)$; Frage 15: (b) Bernoulli-Verteilung; Frage 16: (b) Bernoulli-Verteilung mit $p = 3/4$.; Frage 17: (b) Geometrische Verteilung; Frage 18: (a) Binomialverteilung.