8. Wir fügen hier noch ein gerechnetes Beispiel an, nämlich die Varianz einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse. Die Varianz sollte definitionsgemäss σ^2 sein. Die Dichte ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

Damit steigen wir folgendermassen ein (partielle Integration im 4. Schritt):

$$\begin{aligned}
V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}_{\text{Dichte von oben}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy \\
f = &= \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\left(y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\right)}_{g'} dy \qquad (\text{s.u.}) \\
\text{P.I.} \quad &= -\underbrace{y}_{f}\underbrace{\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}}_{g}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
f' \quad &+ \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}}_{g} dy \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 f(x)dx = \sigma^2$$

||-vs, ändert Varianz nicht;
math: $y := x - \mu$
$\frac{dy}{dx} = 1$
$dy = dx$

MATHE

Foto, 1 durchgehende Folge

P.I.: $(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$

$$\boxed{\int fg' = fg \,\Big| - \int f'g}$$

Muss man das an der Prüfung können?
Nein!