

1. DAS WICHTIGSTE AUS DER KOMBINATORIK

(1.1) Überblick

In diesem Kapitel werden vier Grundbegriffe aus der Kombinatorik erläutert:

- Variationen ohne Wiederholung, (1.3)
- Permutationen, (1.4)
- Kombinationen ohne Wiederholung. (1.5)
- Variationen mit Wiederholung, (1.6)

Wichtiger als das Auswendiglernen von Bezeichnungen oder Formeln ist es hier aber, die zugrunde liegenden Gedanken verstanden zu haben. Deshalb wird in jeder Abschnittszusammenfassung die Fragestellung samt der dazugehörigen Überlegung angegeben.

(1.2) Zur Aufgabe der Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem Zählen von endlichen Mengen. Eine erste Illustration: Bei einem Zahlenlotto werden aus 45 Zahlen sechs verschiedene gezogen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen "Vierer" (von den angekreuzten Zahlen sind genau vier richtig) zu erzielen? Hätte man genügend Zeit (und Lust), so könnte man alle möglichen Tipps von sechs Zahlen anschreiben und abzählen, wieviele davon bei einer bestimmten Ausspielung einen Vierer ergeben. Wie aber in (3.4.4) gezeigt wird, gibt es 8'145'060 mögliche Tipps, worunter 11'115 Vierer sind. Das Abzählen im eigentlichen Sinne wäre also sehr mühselig.

Hier greift nun eben die Kombinatorik ein, die es uns erlaubt, die Antwort auf derartige Fragen durch Überlegen und Rechnen statt durch stures Abzählen zu gewinnen. So gesehen ist die Kombinatorik so etwas wie eine fortgeschrittene Form des Zählens.

Kombinatorische Probleme können sehr verwickelt und schwierig sein. In diesem Kapitel geht es keineswegs um solche Dinge, sondern es sollen nur einige Grundbegriffe soweit eingeführt werden, wie sie in diesem Skript gebraucht werden.

Die vier nächsten Abschnitte tragen alle wohlklingende Titel. Wichtiger als das Memorieren dieser Bezeichnungen und der dazu gehörenden Formeln ist es aber, die Problemstellung und die Methode zur Lösung zu verstehen (vgl. die Kästen am Schluss jedes Abschnitts). So vermeidet man nämlich Verwechslungen und kann überdies die benutzte Formel jeweils leicht herleiten.

(1.3) Variationen ohne Wiederholung

Wir beginnen mit einem Beispiel: Fünf Läufer, genannt A, B, C, D, E, bestreiten ein Rennen. Auf wieviele Arten können die drei ersten Ränge besetzt werden (Zeitgleichheit ausgeschlossen)?

Man kann versuchen, die Möglichkeiten aufzulisten.

ABC	BAC	CAB	DAB	EAB
ABD	BAD	.	.	.
ABE
ACB
ACD
ACE
ADB
ADC
ADE
AEB
AEC
AED	.	.	.	EDC

Jede solche Anordnung heisst eine *Variation ohne Wiederholung* (von 3 aus 5 Objekten; allgemein: von k aus n Objekten). Wichtig ist hier, dass es auf die Reihenfolge ankommt; so werden etwa die Möglichkeiten ABC und BAC als verschieden betrachtet. Dass dem so ist, muss natürlich der Problemstellung entnommen werden.

Die obige Tabelle könnte mit mittelgrossen Aufwand fertig gestellt werden, man würde dann 60 Möglichkeiten finden. Besser — und mehr im Geist der Kombinatorik — ist aber die folgende Überlegung:

Für den ersten Platz gibt es fünf Möglichkeiten: A, B, C, D, E. Ist der erste Läufer im Ziel eingetroffen, so gibt es für den zweiten Platz offensichtlich nur noch vier Kandidaten. Für jede der fünf Möglichkeiten für den ersten Platz gibt es also vier solche für den zweiten Platz, total also $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Besetzungen der ersten beiden Plätze. Für jede dieser 20 Möglichkeiten stehen sodann für den dritten Platz noch drei Läufer zur Auswahl. Für die ersten drei Plätze gibt es also insgesamt

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

verschiedene Möglichkeiten. Unsere Frage ist damit beantwortet.

In der allgemeinen Form lautet unser Problem wie folgt: Wir möchten aus n verschiedenen Objekten A_1, A_2, \dots, A_n deren k ($k \leq n$) herausgreifen und in eine Folge anordnen. (Das Wort "Folge" beinhaltet, dass es auf die Reihenfolge ankommt.)

Dieselbe Überlegung wie im obigen konkreten Beispiel (wo $n = 5$ und $k = 3$ war), zeigt, dass es hier

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}}$$

Möglichkeiten gibt.

Unter Benützung des Begriffs der *Fakultät* kann man dies noch anders schreiben. Die Zahl $n!$ (gelesen: n Fakultät) ist ja bekanntlich so definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Für $n = 0$ setzt man noch $0! = 1$ (siehe auch (26.4.a) im ersten Band). Dann ist

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n).$$

Zusammenfassung

Aufgabe: Aus n Objekten sind k , $k \leq n$, herauszugreifen und in eine Folge anzuordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Überlegung: Für die 1. Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die 2. Stelle noch deren $n-1$, für die 3. Stelle deren $n-2$ usw., und schliesslich für die k -te Stelle noch deren $n-k+1$. Insgesamt gibt es also

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}}$$

Möglichkeiten.

(1.4) Permutationen

Hier handelt es sich um einen Spezialfall von (1.3), nämlich den, wo $k = n$ ist. Es werden also alle n Objekte A_1, A_2, \dots, A_n genommen und angeordnet.

Die Frage lautet also: Wieviele Anordnungen von n Objekten gibt es? Etwas konkreter: Wieviele mögliche Ranglisten gibt es in einem Teilnehmerfeld von (z.B.) $n = 20$ Athleten? Oder: Auf wieviele Arten kann man (z.B.) $n = 7$ Personen in einer Reihe anordnen?

Setzen wir in der Formel von (1.3) $k = n$, so finden wir sofort, dass es

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten hierzu gibt.

Beispiele

$n = 1$	1 Möglichkeit	A_1		
$n = 2$	2 Möglichkeiten	A_1	A_2	
		A_2	A_1	
$n = 3$	6 Möglichkeiten	A_1	A_2	A_3
		A_1	A_3	A_2
		A_2	A_1	A_3
		A_2	A_3	A_1
		A_3	A_1	A_2
		A_3	A_2	A_1

Jede solche Anordnung nennt man eine *Permutation* der Objekte A_1, A_2, \dots, A_n .

Zusammenfassung

Aufgabe: Auf wieviele Arten kann man n Objekte in eine Folge anordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt?

Überlegung: Für die 1. Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die 2. Stelle deren $n - 1$ usw. Für den zweitletzten Platz bleiben dann noch zwei Möglichkeiten übrig. Ist dieser festgelegt, so gibt es für den letzten Platz nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt gibt es total

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten.

(1.5) Kombinationen ohne Wiederholung

Wir verändern nun die Fragestellung des Beispiels von (1.3). Wiederum seien 5 Läufer an einem Rennen beteiligt. Diesmal interessieren wir uns aber nur noch für die drei Medaillengewinner und fragen, wieviele verschiedene solcher Dreiergruppen es gibt. Der Unterschied zu (1.3) besteht also darin, dass die Reihenfolge innerhalb der ersten drei keine Rolle mehr spielt. Etwas genauer:

In (1.3) hatten wir insgesamt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten für die ersten drei Ränge aus einem Feld von fünf Athleten berechnet. Darunter waren z.B. die Anordnungen

(*) ABC ACB BAC BCA CAB CBA .

Im jetzigen Problem, wo es nicht mehr auf die Reihenfolge ankommt, zählen diese sechs Anordnungen nur noch als eine einzige Möglichkeit, nämlich als die Aussage

A, B, C sind auf den Medaillenplätzen.

In der Zeile (*) stehen gerade die $3! = 6$ Permutationen von A, B und C.

Genau dieselbe Überlegung stellt man nun für jede Dreiergruppe von Athleten an (z.B. A, B, D oder C, D, E) und findet jedes Mal, dass $3! = 6$ Anordnungen zu einer einzigen Möglichkeit zusammengefasst werden.

Für die Antwort auf unsere Frage müssen wir also die 60 Möglichkeiten des ursprünglichen Problems durch 6 dividieren. Wir finden so, dass es $60 : 6 = 10$ Möglichkeiten gibt, aus fünf Athleten eine Dreiergruppe auszuwählen.

Das Problem kann noch anders interpretiert werden: Gegeben ist eine Menge $\{A, B, C, D, E\}$ von 5 Elementen (Athleten) und wir wollen alle *Teilmengen* mit 3 Elementen (Medaillengewinner) auslesen. Unsere Überlegungen zeigen, dass die Anzahl solcher Teilmengen gleich 10 ist. Wir können sie auch explizit angeben:

$$\begin{aligned} &\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, B, E\}, \{A, C, D\}, \{A, C, E\} \\ &\{A, D, E\}, \{B, C, D\}, \{B, C, E\}, \{B, D, E\}, \{C, D, E\}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass bei dieser Art der Fragestellung die Reihenfolge ganz von selbst keine Rolle mehr spielt. Es ist ja etwa $\{A, B, C\} = \{A, C, B\} = \{B, A, C\}$ etc., denn zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten (unabhängig von der Reihenfolge).

Nun zum allgemeinen Fall, den wir gleich als Zusammenfassung präsentieren:

Zusammenfassung

Aufgabe: Es sei eine Menge von n Elementen gegeben. Wieviele Teilmengen mit k Elementen ($0 \leq k \leq n$) gibt es? (Oder: Auf wieviele Arten kann man ohne Berücksichtigung der Reihenfolge k Objekte aus einer Menge von n Objekten herausgreifen?)

Überlegung: Gemäss (1.3) gibt es *mit* Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Möglichkeiten, eine Folge von k Objekten zu wählen. Da es aber innerhalb der k -elementigen Teilmengen nicht auf die Reihenfolge ankommt, ist diese Zahl durch $k!$ (also die Anzahl der Permutationen von k Objekten) zu dividieren. Es gibt daher

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten.

Bemerkungen

- 1) Die in der obigen Formel eingeführte Abkürzung $\binom{n}{k}$ heisst *Binomialkoeffizient*. Der Ausdruck wird gelesen “ n tief k ”.

Diese Binomialkoeffizienten treten ja auch in der *binomischen Formel* auf (26.4.b):

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k .$$

- 2) Setzt man $a = b = 1$, so folgt aus dieser Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} .$$

2^n ist also gerade die Anzahl aller Teilmengen einer n -elementigen Menge.

- 3) Wegen $0! = 1$ ist

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = 1 .$$

Dies stimmt mit der kombinatorischen Interpretation überein, denn eine n -elementige Menge hat genau eine Teilmenge mit 0 Elementen (die leere Menge) und genau eine mit n Elementen (die Menge selbst).

- 4) Ebenso ist

$$\binom{0}{0} = 1 .$$

Anschaulich: Eine Menge mit 0 Elementen ist die leere Menge \emptyset ; diese hat genau eine Teilmenge (sich selbst).

- 5) Eine weitere wichtige Formel ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n ,$$

die sich sofort aus der Definition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ergibt, wenn man k durch $n - k$ ersetzt. Auch diese Beziehung ist direkt erklärbar, denn eine n -elementige Menge hat natürlich gleichviele Teilmengen mit k Elementen wie mit $n - k$ Elementen.

- 6) Für die praktische Berechnung beachte man, dass im Zähler und im Nenner von $\binom{n}{k}$ jeweils k Faktoren stehen:

$$\binom{5}{3} = \frac{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}^{3 \text{ Faktoren}}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3 \text{ Faktoren}}} = 10 ,$$

$$\binom{10}{6} = \frac{\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{6 \text{ Faktoren}}}{\underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6 \text{ Faktoren}}} = 210.$$

7) Praktische Beispiele zur Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Objekten (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) sind etwa:

- ♠ Auswahl von 9 Jasskarten aus einem Spiel von 36 Karten.
Hier gibt es $\binom{36}{9}$ Möglichkeiten.
- ★ Auswahl von 6 Lotto-Zahlen aus 45 Möglichkeiten.
Hier gibt es $\binom{45}{6}$ Möglichkeiten.

(1.6) Variationen mit Wiederholung

In den bisherigen Beispielen war eine “Wiederholung” nicht gestattet, d.h., ein einmal gewähltes Objekt konnte nicht noch einmal verwendet werden. Nun lassen wir diese Beschränkung fallen.

Ein einfaches Beispiel sei durch ein Spiel namens “Sport-Toto” geliefert (bei 13 Sportwetten heisst “1” dass Mannschaft 1 gewinnt, “2” Mannschaft 2 und “x” heisst unentschieden). Hier ist 13-mal je eine 1, x oder 2 einzusetzen:

$$1 \times 1 \times 2 \ 2 \times x \ 1 \ 1 \ 1 \times 2.$$

Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Für die erste Stelle haben wir drei Möglichkeiten (1, x oder 2), ebenso aber für alle andern. Dies ergibt total

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{13\text{-mal}} = 3^{13} = 1'594'323$$

Möglichkeiten. Die Reihenfolge wird hier natürlich mitberücksichtigt!

Zusammenfassung


Aufgabe: Gegeben sind n Objekte A_1, A_2, \dots, A_n . Wieviele Folgen der Länge r kann man bilden, falls jedes Objekt beliebig oft gewählt werden darf?

Überlegung: Für die erste Stelle gibt es n Möglichkeiten, ebenso für die zweite, dritte usw. bis zur r -ten. Total also

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r\text{-mal}} = n^r$$

Möglichkeiten.

(1.∞) Aufgaben

- 1–1 Wieviele verschiedene (nicht notwendig sinnvolle) vierbuchstabile Wörter kann man mit den 26 Buchstaben unseres Alphabets bilden?
- 1–2 Zwanzig Personen treffen sich, begrüßen sich durch Händedruck und sagen jeweils “Grüezi”.
a) Wie oft wird das Wort “Grüezi” ausgesprochen? b) Wieviel Händedrücke finden statt?
- 1–3 In einer Verhaltensstudie werden vier Tieren je eine von sechs Aufgaben zugeteilt. Auf wieviele Arten kann das geschehen, wenn die gleiche Aufgabe a) wiederholt, b) höchstens einmal vorkommen darf?
- 1–4 Eine Klasse hat 18 SchülerInnen. a) Zwecks Reklamation beim Rektor soll eine Viererdelegation bestimmt werden. Wieviel Möglichkeiten gibt es? b) In derselben Klasse werden jede Woche vier Ämtli neu bestimmt (Tafelwart, Klassenbuchträgerin etc.). Auf wieviele Arten geht das?
- 1–5 Die Ziffern auf Taschenrechnern werden dadurch dargestellt, dass einige von den 7  Strichen des nebenstehenden Schemas sichtbar werden. Wieviele verschiedene Symbole können so dargestellt werden?
- 1–6 a) Auf wieviele Arten können 8 Personen um einen runden Tisch (mit 8 Stühlen) sitzen?
b) Dasselbe Problem, aber zwei Personen wollen unbedingt nebeneinander sitzen.
- 1–7 Drei Schulklassen haben 20, 18 und 15 SchülerInnen. Aus den grösseren beiden Klassen soll je eine Dreier- und aus der kleinsten eine Zweierdelegation ausgewählt werden. Auf wieviele Arten geht das?
- 1–8 Der gemischte Chor eines Dorfs besteht aus 20 Frauen und 10 Männern. Der Vorstand umfasst 6 Mitglieder, wovon statutengemäss 4 Frauen und 2 Männer sein müssen. Auf wieviele Arten könnte man diesen Vorstand auswählen?
- 1–9 Zwölf (unterscheidbare!) Meerschweinchen sollen auf drei Käfige zu je vier Tieren verteilt werden. Auf wieviele Arten geht das?
- 1–10 Von den Wirbeltieren zu den Insekten. Eine (damit Sie nicht so viel rechnen müssen!) kleine Bienenkolonie besteht aus einer Königin und 10 Arbeiterbienen. Auf wieviele Arten kann man eine Gruppe von fünf Bienen auslesen a) wenn die Königin dabei ist; b) wenn sie nicht dabei ist?
- 1–11 Verallgemeinern Sie das obige Problem, wenn n statt 10 Arbeiterbienen da sind und wenn k statt fünf Bienen ausgewählt werden. Schliessen Sie, dass die Beziehung $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ gilt.