13. ERGÄNZUNGEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

(13.1) Überblick

In diesem Kapitel sind einige Rechnungen zusammengefasst, die im eigentlichen Text den Ablauf allzu sehr unterbrochen hätten und die zum Teil auch etwas kompliziert sind.

(13.2) Einige Formeln für Erwartungswert und Varianz

In Bemerkung 5) von (5.1) ist die "Linearität" des Erwartungswerts, d.h., die Formel

$$E(aX+b) = aE(X)+b \tag{1}$$

erwähnt worden. Diese Formel leuchtet anschaulich ein, wenn wir X als Gewinn und $E(X)$ als Durchschnittsgewinn bei einem Glücksspiel interpretieren. Legen wir nämlich eine neue Spielregel fest, die besagt, dass der alte Gewinn X jeweils mit a multipliziert und um b vermehrt werden soll (neuer Gewinn $Y = aX+b$), so wird dasselbe mit dem Durchschnittsgewinn passieren. Rechnerisch lässt sich die Formel wie folgt begründen: Wenn X die Verteilung

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}$$

hat, dann hat $aX+b$ die Verteilung

$$\begin{array}{c|cccc} & ax_1+b & ax_2+b & ax_3+b & \dots \\ \hline & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}$$

Somit ist nach Definition des Erwartungswerts

$$E(aX+b) = \sum_i p_i(ax_i+b) = a\sum_i p_i x_i + b\sum_i p_i = aE(X)+b\ ,$$

wobei wir noch die Tatsache benützt haben, dass $\sum\limits_i p_i = 1$ ist.

In (5.2) sind einige Formeln für die Varianz aufgeführt worden, die wir nun begründen wollen. Zuerst beachten wir, dass mit X auch

$$Z = (X-\mu)^2$$

eine Zufallsgrösse ist, wobei $\mu = E(X)$ wie üblich der Erwartungswert ist. Wenn X wie oben die Verteilung

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}$$

hat, dann hat $Z = (X-\mu)^2$ die Verteilung

$$\begin{array}{c|cccc} & (x_1-\mu)^2 & (x_2-\mu)^2 & (x_3-\mu)^2 & \dots \\ \hline & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{array}$$

Wenn $(x_i - \mu) = -(x_j - \mu)$ ist, dann ist $(x_i - \mu)^2 = (x_j - \mu)^2$. In der Tabelle für die Zufallsgrösse Z sind dann diese beiden Werte zu einem einzigen Eintrag mit der Wahrscheinlichkeit $p_i + p_j$ zusammenzufassen. An den Überlegungen ändert sich weiter nichts.

Für den Erwartungswert von Z erhält man aus der zweiten Tabelle

$$E(Z) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 \ ,$$

und dies ist gerade die Varianz $V(X)$. Damit haben wir die Beziehung

$$V(X) = E\Big((X-\mu)^2\Big) = E\left(\Big(X - E(X)\Big)^2\right)$$

bewiesen. Dieser Ausdruck lässt sich noch umformen:

$$\begin{aligned} V(X) &= E\Big((X-\mu)^2\Big) && \text{obige Formel} \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) && \text{binomische Formel} \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 && \text{Formel (1)} \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 && \text{denn } \mu = E(X) \\ &= E(X^2) - \mu^2 \ . \end{aligned}$$

Ersetzen wir wieder μ durch $E(X)$, erhalten wir die Beziehung

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \ . \tag{2}$$

Als letzte Formel beweisen wir

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \ . \tag{3}$$

Speziell ist also (für $a = 1$) $V(X+b) = V(X)$. Dies leuchtet ein: Wenn wir von X zu $X+b$ übergehen, so ändern sich alle x_i, aber auch $\mu = E(X)$ um b. Die Differenzen $x_i - \mu$ bleiben daher ungeändert, woraus $V(X+b) = V(X)$ folgt. Dies muss auch sein, wenn $V(X)$ ein vernünftiges Mass für die Streuung sein soll, denn eine blosse Verschiebung um b sollte ja die Streuung nicht ändern. Auch ein zweiter Spezialfall ($b = 0$) ist einleuchtend: $V(aX) = a^2 V(X)$, denn in der Formel für die Varianz kommen ja die Quadrate der Abweichungen von μ vor.

Man könnte einen rein rechnerischen Beweis von (3) durch Einsetzen in die Definition geben. Eleganter ist es, Formel (2) zu gebrauchen. Dazu setzen wir $Y = aX + b$. Wegen der binomischen Formel und der Linearität des Erwartungswerts (Formel (1)) ist dann

$$E(Y^2) = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 \ .$$

Ferner ist

$$E(Y)^2 = \Big(E(aX+b)\Big)^2 = \Big(aE(X)+b\Big)^2 = a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2 \ ,$$

wobei wiederum Formel (1) und die binomische Formel verwendet wurden. Zusammenfassend erhalten wir mit Formel (2):

$$\begin{aligned} V(aX+b) = V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 &= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 \quad \text{(Rest hebt sich weg)} \\ &= a^2\Big(E(X^2) - E(X)^2\Big) \\ &= a^2V(X)\ , \end{aligned}$$

womit auch Formel (3) bewiesen ist.

(13.3) Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

In (5.5) wurden die folgenden Formeln für Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung mit den Parametern n und p angegeben:

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq\ .$$

Diese Formeln sollen nun bewiesen werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Summen direkt auszurechnen, was allerlei Manipulationen mit dem Summenzeichen und mit Binomialkoeffizienten erfordert. Rascher — wenn vielleicht auch auf eine etwas unerwartete Art — geht es unter Verwendung der so genannten *erzeugenden Funktion*.

Die Zufallsgrösse X nehme die Werte $0, 1, \ldots, n$ an. Wir definieren nun die erzeugende Funktion $f(x)$ von X durch

(1) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)x^k\ .$$

Durch summandenweises Ableiten folgt

(2) $$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)x^{k-1}$$

(der Summand mit $k = 0$ fällt weg). Setzt man $x = 1$, so erhält man, wenn man den Summanden mit $k = 0$, der den Wert 0 hat, wieder einfügt,

(3) $$f'(1) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$$

und dies ist gerade der Erwartungswert

(4) $$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)\,,$$

also gilt

(5) $$E(X) = f'(1)\,.$$

Im uns interessierenden Fall der Binomialverteilung ist

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \,. \tag{6}$$

Durch Einsetzen, Umformen und Anwendung der binomischen Formel (26.4) **anpassen** erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k q^{n-k} \,,$$

d.h.,

$$f(x) = (px + q)^n \,. \tag{7}$$

Nun ist, wie man direkt ausrechnet,

$$f'(x) = pn(px + q)^{n-1} \tag{8}$$

(p ist die innere Ableitung), also ist unter Verwendung von $p + q = 1$

$$f'(1) = pn(p + q)^{n-1} = pn \,. \tag{9}$$

Es folgt wie behauptet

$$E(X) = np \,. \tag{10}$$

Die Varianz lässt sich ähnlich berechnen. Zunächst ist

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k)x^{k-2} \,. \tag{11}$$

Wir formen nun $f''(1)$ um:

$$\begin{aligned} f''(1) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \,. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit gilt, weil der Summand mit $k = 1$ den Wert 0 hat. Es folgt

$$f''(1) = E(X^2) - E(X) \,. \tag{12}$$

Dabei brauchten wir die Formel für den Erwartungswert der Zufallsgrösse X^2 (welche die Werte k^2 mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$, $k = 0, \ldots, n$ annimmt) und jenen der Zufallsgrösse X. Mit der Formel $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (vgl. (13.2)) folgt

$$V(X) = E(X^2) - E(X) + E(X) - E(X)^2 \,, \tag{13}$$

und zusammen mit (5) und (12) ergibt sich

$$V(X) = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2 \,. \tag{14}$$

Dabei kennen wir $f'(1) = E(X) = np$ schon. Aus (8) folgt

$$f''(x) = p^2 n(n-1)(px + q)^{n-2} \,, \tag{15}$$

$$f''(1) = p^2 n(n-1)(p + q)^{n-2} = p^2 n(n-1) \,. \tag{16}$$

Somit erhalten wir schliesslich aus (14), (9) und (16)

$$\begin{aligned} V(X) &= p^2 n(n-1) + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np - np^2 = np(1-p) = npq \,, \end{aligned} \tag{17}$$

was zu zeigen war.

(13.4) Varianz der Poisson-Verteilung

Zu zeigen ist $V(X) = \mu$. Die Zufallsgrösse X nimmt hier die Werte 0, 1, 2, ... an, und die erzeugende Funktion ist daher eine (unendliche) Potenzreihe:

(1) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} e^{\mu x} \, .$$

(Zuletzt wurde die Formel für die Exponentialreihe (19.8.a) **anpassen** verwendet.) Durch Ableiten erhalten wir

(2) $$f'(x) = \mu e^{-\mu} e^{\mu x} \, , \quad f'(1) = \mu \, .$$

(3) $$f''(x) = \mu^2 e^{-\mu} e^{\mu x} , \quad f''(1) = \mu^2 \, .$$

Die Formeln (5) und (14) von (13.3) gelten nicht nur, wenn die erzeugende Funktion wie in (13.3) ein Polynom, sondern auch wenn sie wie hier im Fall der Poisson-Verteilung eine Potenzreihe ist. Wir erhalten

(4) $$E(X) = f'(1) = \mu \qquad \text{(vgl. (7.3.3))} \, .$$

(5) $$V(X) = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu \, .$$

(13.5) Die Ungleichung von Tschebyscheff

Wir beweisen hier die so genannte Ungleichung von Tschebyscheff: Wenn X eine Zufallsgrösse ist, deren Varianz existiert, dann gilt

(T) $$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} , \quad \text{für jedes } a > 0 \, .$$

Daraus folgt sofort die in (5.3) angegebene Ungleichung (1). Wenn man nämlich in (T) $a = r\sigma$ setzt, erhält man $P(|X-\mu|) \geq r\sigma) \leq \sigma^2/r^2\sigma^2 = 1/r^2$, und da $|X-\mu| < r\sigma$ das Gegenereignis zu $|X-\mu| \geq r\sigma$ ist, folgt die Beziehung (1) von (5.3).

Wir beweisen nun (T), allerdings nur für den Fall, wo die Zufallsgrösse X diskret ist und endlich viele Werte annimmt. Die Ungleichung gilt aber auch für beliebige diskrete und stetige Zufallsgrössen. Dazu schreiben wir die Formel für die Varianz in der Form

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_i |x_i - \mu|^2 P(X = x_i) \, .$$

Der Trick besteht nun darin, dass wir nicht mehr über alle Werte von i summieren, sondern nur noch über jene i, für welche $|x_i - \mu| \geq a$ ist. Dann folgt

$$V(X) \geq \sum_{|x_i-\mu|\geq a} |x_i - \mu|^2 P(X = x_i) \geq a^2 \sum_{|x_i-\mu|\geq a} P(X = x_i) = a^2 P(|X - \mu| \geq a)| \, .$$

Die erste Ungleichung gilt, weil in der Summe für $V(X)$ gewisse Summanden weggelassen werden, und die zweite Ungleichung folgt daraus, dass für alle noch übrig gebliebenen Summanden $|x_i - \mu|^2 \geq a^2$ ist. Die letzte Gleichheit gilt, weil zur Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq a)$ genau jene Werte x_i von X beitragen, für welche $|x_i - \mu| \geq a$ ist.

Aus der eben hergeleiteten Beziehung folgt nun sofort $P(|X - \mu| \geq a) \leq V(X)/a^2$, also die gesuchte Ungleichung (T).

(13.6) Die Dichtefunktion der Normalverteilung

In (5.10.2) sind ohne nähere Begründung einige Eigenschaften der Dichtefunktion φ_{μ,σ^2} der Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu\,;\sigma^2)$ angegeben worden. Hier tragen wir die fehlenden Einzelheiten nach.

Wir betrachten also die Funktion

$$\varphi(x) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\ ,$$

wobei μ eine ganz beliebige, σ eine beliebige positive reelle Zahl ist. Die Schreibweise $\exp(z)$ ist eine typographisch bequeme Form für e^z.

Zuerst führen wir eine Kurvendiskussion gemäss (6.7) **anpassen** durch:

a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

b) Wegen $\varphi(\mu - x) = \varphi(\mu + x)$ ist der Graph symmetrisch zur Geraden $x = \mu$.

c) Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, und da $\sigma > 0$ ist, ist $\varphi(x) > 0$ für alle x. Nullstellen sind keine vorhanden.

d) Die 1. Ableitung berechnet sich zu

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(x-\mu)\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\ .$$

Ihre einzige Nullstelle liegt bei $x = \mu$.
Ferner ist $\varphi'(x) > 0$ für $x < \mu : \varphi$ wächst für $x < \mu$,
$\varphi'(x) < 0$ für $x > \mu : \varphi$ fällt für $x > \mu$.

An der Stelle $x = \mu$ liegt ein Maximum vor.

e) Für die 2. Ableitung erhalten wir mit der Produktregel

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \Big(-\frac{1}{\sigma^2}\Big(\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\Big)(x-\mu)^2 + \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\Big)$$

oder, zusammengefasst

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(1 - \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2\Big)\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\ .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\varphi''(x) = 0 &\iff 1 - \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 = 0 \iff \sigma^2 = (x-\mu)^2\\ &\iff x - \mu = \pm\sigma \iff x = \mu + \sigma \text{ oder } \mu - \sigma\ .\end{aligned}$$

Wegen $\varphi''(x) < 0$ für $1 > \dfrac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2$, also für

$$\Big|\frac{x-\mu}{\sigma}\Big| < 1\ ,$$

ist $\varphi''(x) < 0$ im Intervall $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ und > 0 ausserhalb dieses Intervalls.
Von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ haben wir eine Rechtskurve, von $-\infty$ bis $\mu - \sigma$ und von $\mu + \sigma$ bis $+\infty$ Linkskurven. An den Stellen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegen also Wendepunkte vor.

f) Der Exponent $-\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2$ strebt für $x \to \pm\infty$ gegen $-\infty$, somit strebt $\varphi(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

g) Spezielle Funktionswerte:

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$
$$\varphi(\mu - \sigma) = \varphi(\mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{e}}\varphi(\mu) \ .$$

Skizzen des Graphen finden Sie in (5.10.2).

Nun möchten wir noch zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

ist. Dies wird dann auch den Sinn der etwas mysteriösen Konstante $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ in der Definition von $\varphi(x)$ erklären, der einfach darin besteht, dass das obige Integral den Wert 1 erhält.

Hier tritt ein Problem auf: Wie wir sehen werden, kann das Integral mit einer Substitution auf die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

gebracht werden. Da nun aber die Funktion e^{-u^2} gemäss (12.3.e) **anpassen** keine elementare Stammfunktion hat, können wir das obige Integral nicht auf die in (20.2) **anpassen** angegebene Weise bestimmen. Wie wir aber am Schluss des Abschnitts sehen werden, gilt

$$(*) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

Mit dieser Formel können wir nun das gewünschte Integral berechnen. Da der Graph von $\varphi(x)$ symmetrisch in Bezug auf $x = \mu$ ist, betrachten wir zuerst

$$\int_{\mu}^{t} \varphi(x)\, dx \ .$$

Wir substituieren

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma}, \qquad du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\, dx \ .$$

Für die untere Grenze ($x = \mu$) wird $u = 0$, für die obere ($x = t$) wird $u = t^* = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{t-\mu}{\sigma}$. Wichtig ist nur, dass mit $t \to \infty$ auch $t^* \to \infty$ geht. Die Substitutionsregel liefert

$$\int_{\mu}^{t} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu}^{t} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big) \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t^*} e^{-u^2}\, du \ .$$

Mit $t \to \infty$ strebt auch $t^* \to \infty$, und es folgt

$$\int_{\mu}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{\mu}^{t} \varphi(x)\, dx = \lim_{t^*\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t^*} e^{-u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Am Schluss wurde Formel $(*)$ verwendet.

Da der Graph von φ in Bezug auf die Gerade $x = \mu$ symmetrisch ist, gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\mu} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\ .$$

Schliesslich erhalten wir wie behauptet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1\ .$$

Nun geht es noch darum, zu zeigen, dass, wie in $(*)$ (mit u statt x) behauptet,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist. Dazu braucht man einen Trick, der darin besteht, Doppelintegrale (Kap. 25) **anpassen** zu verwenden. Wir betrachten zu diesem Zweck die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

mit dem Definitionsbereich

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}\ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \iint_D e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_0^{\infty}\Big(\int_0^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dy\Big)dx \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^{\infty}\Big(e^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\Big)dx \overset{(**)}{=} \int_0^{\infty} e^{-x^2}I dx = I\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = I^2\ .\end{aligned}$$

<u>Erläuterungen</u>

- Für die Gleichheit $(*)$ benützen wir, dass im inneren Integral nur nach y integriert wird. Der Ausdruck e^{-x^2} ist als konstant zu betrachten und kann vor das Integral genommen werden.
- Zur Gleichheit $(**)$: Da es auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen nicht ankommt, gilt

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\ .$$

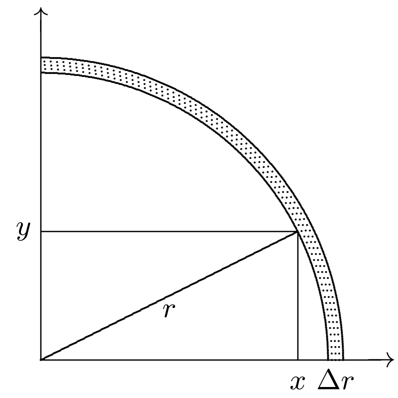
- Die Tatsache, dass über ein unendlich ausgedehntes Gebiet D integriert wird, würde eigentlich noch zusätzliche Überlegungen erfordern (Grenzübergänge), auf die wir aber verzichten.

  Das Gebietsintegral

$$V = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

ist, wie wir gesehen haben, gleich I^2, hat aber auch eine geometrische Bedeutung: Es stellt das Volumen unter dem Graphen von $e^{-(x^2+y^2)}$ über D (dem 1. Quadranten) dar. Dieses Volumen können wir noch anders berechnen, indem wir es aus dünnen "Viertel-Hohlzylindern" zusammensetzen. Ein solcher hat

Radius	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Wandstärke	Δr (sehr klein)
Höhe	$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$



und somit näherungsweise das Volumen

$$\Delta V = \frac{1}{4} 2\pi r \cdot \Delta r \cdot e^{-r^2} \ .$$

Durch Integration erhalten wir für das Gesamtvolumen

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty re^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t re^{-r^2} dr \ .$$

Die Substitution $u = r^2, \ du = 2rdr$ ergibt

$$\int re^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \ .$$

Es folgt

$$V = \frac{\pi}{2} \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^t \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \ .$$

Wir haben aber oben gesehen, dass $V = I^2$ ist. Deshalb ist, wie eingangs behauptet,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$