3. WAHRSCHEINLICHKEIT

3.1. GRUNDBEGRIFFE

(3.1.1) Überblick

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit *zufälligen Ereignissen* und der Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens. Im konkreten Einzelfall hängt die Art der Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit jeweils vom betrachteten Problem ab. Man gelangt so zu verschiedenen *speziellen Wahrscheinlichkeitsbegriffen*, wie *(3.1.2)* *(3.1.4)*

1. Klassische Wahrscheinlichkeit.
2. Idealisierte relative Häufigkeit.
3. Geometrische Wahrscheinlichkeit.
4. Subjektive Wahrscheinlichkeit.

Dies wird in diesem Kapitel an *Beispielen* illustriert. Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsbegriff, der alle obigen Fälle miteinschliesst, wird in 3.3 besprochen. *(3.1.3)*

(3.1.2) Zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit zufälligen Ereignissen und den dabei auftretenden Gesetzmässigkeiten. Unter einem *zufälligen Ereignis* verstehen wir dabei ein Ereignis, das als Folge eines Vorgangs auftritt, dessen Ergebnis wir aus prinzipiellen Gründen oder aufgrund seiner Komplexität nicht vorhersagen können. Experimente, deren Ergebnisse solche zufälligen Ereignisse sind, nennen wir *Zufallsexperimente*. Im Gegensatz dazu sprechen wir von einem *determinierten Experiment*, wenn der Ausgang des Experiments von vornherein festliegt. Das Wort "Experiment" ist dabei in einem sehr weiten Sinn zu verstehen. Damit können Versuche, Messungen, Zählungen, Beobachtungen, Erhebungen (z.B. Meinungsumfragen) usw. gemeint sein.

Zwar steht der Ausgang eines Zufallsexperiments nicht von vornherein fest, trotzdem wird man aber mehr oder weniger stark mit dem Eintreffen (oder Nicht-Eintreffen) eines bestimmten Zufallsereignisses rechnen. Man sagt dann, das Ereignis sei mehr oder weniger *wahrscheinlich*, etwa im Sinne der folgenden Skala:

0%	10%	50%	90%	100%
0	0.1	0.5	0.9	1
unmöglich	fast unmöglich	"fifty-fifty"	fast sicher	sicher

Eine grosse Wahrscheinlichkeit bedeutet also, dass wir mit ziemlicher Sicherheit damit rechnen, dass das Ereignis eintreten wird; eine kleine Wahrscheinlichkeit charakterisiert ein seltenes Ereignis.

Bei dieser Gelegenheit halten wir noch die Selbstverständlichkeit fest, dass man Wahrscheinlichkeiten sowohl mit Zahlen zwischen 0 und 1 als auch in Prozenten anzugeben pflegt. Die erste Art wird hauptsächlich in der Theorie, die zweite in der Praxis gebraucht.

Das Wort "Wahrscheinlichkeit" ist vorläufig nicht als exakter mathematischer Begriff, sondern im umgangssprachlichen Sinne zu verstehen.

Natürlich stellt sich jetzt sofort die Frage, was denn die mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit sei. Die Antwort darauf wird ziemlich abstrakt ausfallen und erst in 3.3 gegeben werden. Vorläufig wollen wir diesen Begriff im anschaulichen, alltäglichen Sinn verstehen.

(3.1.3) Erste Beispiele zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Auf welche Art kann man nun die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses bestimmen? Hier gibt es je nach Situation ganz verschiedene Methoden, die wir uns an einigen Beispielen ansehen wollen.

Beispiel 3.1.3.A

Ich werfe eine Münze. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass "Kopf" erscheint, ist 50% (oder 1/2).

Mit dieser Aussage will man ausdrücken, dass die beiden möglichen Ausgänge (also die zufälligen Ereignisse) "Kopf" und "Zahl" gleich wahrscheinlich sind. Man kann auch eine etwas andere Überlegung anstellen: Bei diesem Zufallsexperiment gibt es zwei mögliche (und gleichwahrscheinliche) Fälle, einer davon ist für den Ausgang "Kopf" günstig, also ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1/2. $\boxtimes$

Beispiel 3.1.3.B

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei Würfeln die Summe der Augenzahlen gleich 3 ist?

Hier argumentieren wir so: Bei diesem Zufallsexperiment gibt es 36 mögliche Ausgänge, denn jeder Würfel kann, unabhängig vom andern, die Augenzahlen 1 bis

6 zeigen. Man nimmt weiter an, dass alle diese 36 Möglichkeiten dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. (Damit drückt man aus, dass der Würfel unverfälscht sei.) Von diesen 36 Möglichkeiten sind zwei "günstig", nämlich

- □ 1. Würfel "1" und 2. Würfel "2" ,
- □ 1. Würfel "2" und 2. Würfel "1" .

Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $2/36 = 1/18$.

Wir führen das Beispiel noch etwas weiter. Die 36 Möglichkeiten lassen sich nach dem Schema

(Augenzahl 1. Würfel, Augenzahl 2. Würfel)

anordnen:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Die schrägen Linien zeigen die verschiedenen Arten, eine bestimmte Augensumme zu erzielen. Wir erhalten die nachstehende Tabelle:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

In diesem Beispiel haben wir die folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit verwendet, die Sie wohl bereits von früher her kennen:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}\ .$$

Wird diese Formel angewendet, so spricht man von *klassischer Wahrscheinlichkeit*. Sie darf aber längst nicht in jedem Fall gebraucht werden, wie die unten stehenden Beispiele zeigen. In 3.4 kommen wir auf diesen Problemkreis zurück.

An dieser Stelle sei noch eine Frage angesprochen, die manchmal Schwierigkeiten bereitet, nämlich die der "Unterscheidbarkeit" der Würfel. Bei der Aufstellung der obigen Tabelle haben wir zwischen einem 1. und einem 2. Würfel unterschieden. Deshalb gab es zwei Möglichkeiten für die Augensumme 3, aber nur eine für die Augensumme 2. Was passiert nun, wenn man die beiden Würfel nicht mehr unterscheiden will oder kann? Man unterscheidet dann nicht mehr zwischen den Ergebnissen (1,2) und (2,1), sondern sagt einfach: Es liegt eine "1" und eine "2". Statt 36 hat man also nur noch 21 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ & & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ & & & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ & & & & (5,5) & (5,6) \\ & & & & & (6,6) \end{array}$$

Ist deshalb die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 3 plötzlich 1/21 geworden? Die Antwort lautet natürlich: NEIN! Das Ergebnis (1,2) hat jetzt die Wahrscheinlichkeit $2/36 = 1/18$, während (1,1) immer noch die Wahrscheinlichkeit 1/36 hat. Die Würfel können nämlich nichts dafür, dass wir sie nicht unterscheiden können; das Ergebnis "eine '1' und eine '2'" kommt nach wie vor auf zwei Arten zustande, das Ergebnis "zweimal eine '1'" nur auf eine Art.

Sie können sich auch vorstellen, der eine Würfel sei rot, der andere grün; dann sind sie unterscheidbar. Sehen Sie das Ergebnis eines Wurfs aber auf einer Schwarz-Weiss-Fotografie, dann können Sie die Würfel nicht mehr unterscheiden — sicherlich hat die Wahrscheinlichkeit aber nichts damit zu tun, ob Sie das Würfelspiel in natura oder schwarz-weiss betrachten!

⊠

Beispiel 3.1.3.C

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das nächste in der Stadt Zürich geborene Kind ein Knabe ist, beträgt 51.3%.

Diese Behauptung ist so zu verstehen: Durch Auszählen von sehr vielen Geburten (also auf statistische Weise) hat man ermittelt, dass 51.3% aller Neugeborenen Knaben sind*. Obwohl wir über die nächste Geburt im Voraus nichts sagen können, lässt sich doch die eingangs formulierte Aussage machen.

Die hier gebrauchte Art der Wahrscheinlichkeit ist eng mit dem Begriff der relativen Häufigkeit (2.2.2.2) verbunden. Wenn beispielsweise unter 10 Neugeborenen 6 Knaben sind, dann beträgt die relative Häufigkeit der Knabengeburten $6/10 = 0.6$. Fallen auf 100 Neugeborene 51 Knaben, dann ist sie $51/100 = 0.51$ usw. Gefühlsmässig nimmt man an, dass die so bestimmte relative Häufigkeit mit wachsender Zahl der untersuchten Geburten immer näher an einen hypothetischen Wert herankommt, den man dann als Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Die so verstandene Wahrscheinlichkeit ist daher als *idealisierte relative Häufigkeit* zu interpretieren und im Grunde nicht genau bekannt, sondern nur durch statistische Untersuchungen approximierbar.

Es ist nützlich, dies mit dem Beispiel 3.1.3.A (Münzenwurf) zu vergleichen. Dort haben wir die Wahrscheinlichkeit aufgrund von theoretischen Überlegungen bestimmt (indem wir nämlich angenommen haben, die Münze sei symmetrisch). Ein solches rein theoretisches Vorgehen ist im Fall der Geburten offenbar nicht möglich. Dagegen kann man im Fall des Münzenwurfs die Wahrscheinlichkeit von 50% für "Kopf" auch als idealisierte relative Häufigkeit auffassen. Man kann ja das Experiment "Münzenwurf"

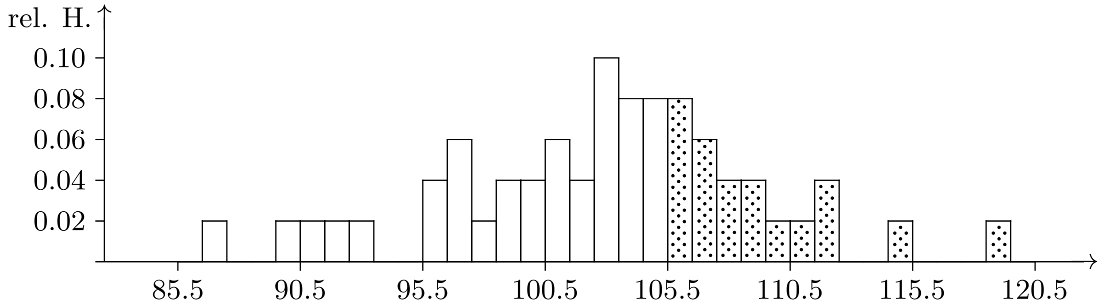
* Der hier verwendete Prozentsatz ergibt sich aus der Statistik der Lebendgeburten in der Stadt Zürich von 1931 bis 1985.

wirklich durchführen und die Ergebnisse notieren. Dabei wird niemand erwarten, dass bei 10 Würfen genau fünfmal oder bei tausend Würfen genau 500-mal "Kopf" erscheint, aber man rechnet damit, dass bei zunehmender Zahl der Würfe die relative Häufigkeit von "Kopf" immer näher an 0.5 herankommt, so dass wir die Zahl 0.5 auch als idealisierte relative Häufigkeit auffassen können. ⊠

Beispiel 3.1.3.D

Ein zweiwöchiges Küken wiegt mit 34%iger Wahrscheinlichkeit mehr als 105.5 Gramm.

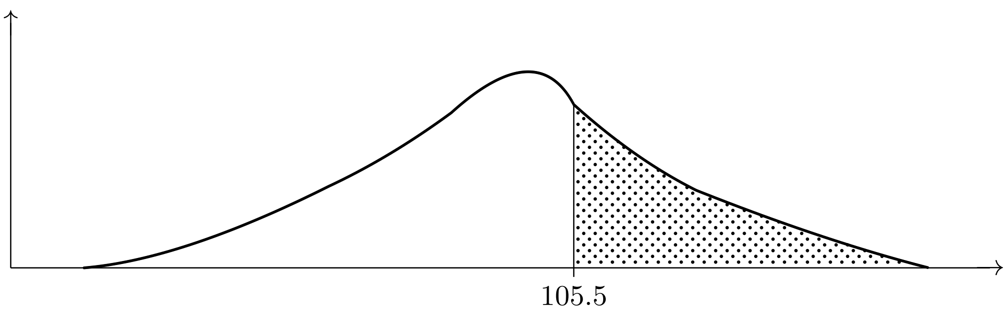
Auch in diesem Fall wird die Wahrscheinlichkeit aus statistischem Zahlenmaterial gewonnen und ist eine idealisierte relative Häufigkeit. In unserm Beispiel sind die Zahlen von (2.2.2.3) verwendet worden. Dem Histogramm am Schluss von (2.2.2.3) entnimmt man, dass 17 der 50 Küken über 105.5 Gramm wiegen:



Die relative Häufigkeit kann hier auch geometrisch interpretiert werden, nämlich als Inhalt der mit Punkten markierten Fläche.

Da das Beobachtungsmaterial wenig umfangreich ist, ist der Wert von 34% als recht grobe Approximation der wirklichen Wahrscheinlichkeit zu betrachten. Mit 1000 untersuchten Küken wäre wohl eine etwas andere Zahl herausgekommen, die eine bessere Schätzung der Wahrscheinlichkeit gewesen wäre.

Schon in (2.2.2.5) haben wir gesehen, dass das Histogramm (bei wachsender Zahl der Messdaten und bei zunehmender Messgenauigkeit) durch eine glatte Kurve idealisiert werden kann. Gleichzeitig wird man dann statt von relativen Häufigkeiten von Wahrscheinlichkeiten sprechen.



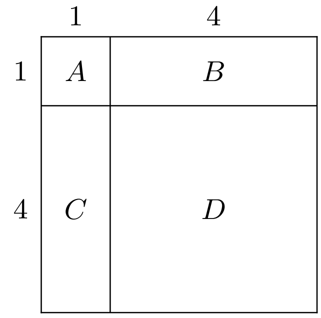
In Analogie zur ersten Figur wird man hier den Inhalt des markierten Stücks als Wahrscheinlichkeit dafür ansehen, dass ein Küken über 105.5 g wiegt. (Dabei wird die Masseinheit so gewählt, dass die gesamte Fläche unter der Kurve den Inhalt 1 [oder 100%] hat.) Wir werden in Kapitel 4 auf solche Fragestellungen zurückkommen. ⊠

In diesem Beispiel ist also die Wahrscheinlichkeit als Flächeninhalt aufgefasst worden. Ähnliches geschieht in den nächsten Beispielen.

<u>Beispiel 3.1.3.E</u>

Ein (nicht allzu spannendes) Glücksspiel.

Wir denken uns ein quadratisches Stück Papier mit der nebenstehenden Einteilung. Mit geschlossenen Augen stechen wir mit einer Nadel in das Blatt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p_X, ein bestimmtes Feld X zu treffen?

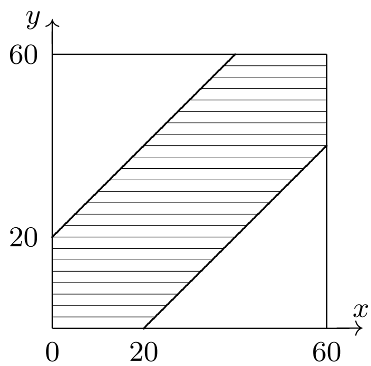


Der gesunde Menschenverstand sagt uns, dass diese Wahrscheinlichkeit proportional zum Flächeninhalt der einzelnen Stücke ist. Geben wir die Wahrscheinlichkeiten zur Abwechslung in Prozenten an, so hat die totale Fläche eine Wahrscheinlichkeit von 100%. Für die einzelnen Teilrechtecke ergeben sich dann aufgrund der Masse die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$p_A = 4\% \quad p_B = p_C = 16\% \quad p_D = 64\% \,.$$ ⊠

<u>Beispiel 3.1.3.F</u>

Die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Flächeninhalt ist auch in anderm Zusammenhang nützlich, wie die folgende Aufgabe zeigt:



Xaver und Yvonne wollen sich zwischen 12 und 13 Uhr im Café treffen. Beide gehen sicher in dieser Zeitspanne dorthin, wissen aber nicht genau wann. Sie haben abgemacht, dass sie höchstens 20 Minuten aufeinander warten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich treffen?

Die Ankunftszeit von Xaver bzw. Yvonne (in Minuten nach 12 Uhr) bezeichnen wir mit x bzw. y. Es ist also $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$. Wegen der abgemachten Wartezeit von 20 Minuten treffen sie sich, falls $|x - y| \leq 20$ ist. Wir stellen das Ganze in der x-y-Ebene graphisch dar.

Die Punkte mit $|x - y| \leq 20$ (und $0 \leq x, y \leq 60$) liegen im von den Geraden

$$y = x + 20 \quad \text{und} \quad y = x - 20$$

begrenzten Bereich. (Die Bedingung $|x - y| \leq 20$ ist nämlich gleichwertig zu $-20 \leq x - y \leq 20$, also zur Forderung, dass sowohl $y \leq x + 20$ als auch $y \geq x - 20$ gilt.) Xaver und Yvonne treffen sich genau dann, wenn der Punkt (x, y) im schraffierten Gebiet liegt. Dessen Flächeninhalt (Quadrat minus zwei Dreiecke) beträgt $60^2 - 40^2 = 2000$. Das ganze Quadrat hat die Fläche 3600. Das Verhältnis der Flächeninhalte des schraffierten ("günstigen") Bereichs und des Quadrats ist somit 2000/3600=0.555...

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die beiden treffen, ist also ca. 55.5%. ⊠

Diese Aufgabe ist übrigens ein Beispiel dafür, wie man ein Problem unter Verwendung eines passenden *"Modells"*, das hier geometrischer Natur ist, behandeln kann. Man übersetzt dabei den gegebenen Sachverhalt in eine mathematisch besser überblickbare Form.

Beachten Sie den Unterschied zu Beispiel 3.1.3.B (Würfelspiel). Dort haben wir die günstigen und die möglichen Fälle gezählt und den Quotienten gebildet. Dies ist hier nicht mehr möglich, denn es gibt unendlich viele günstige und unendlich viele mögliche Fälle.

Beispiel 3.1.3.G

Dieses Beispiel betrifft eine weitere Art Wahrscheinlichkeit, nämlich die *subjektive Wahrscheinlichkeit*. Sie tritt im Zusammenhang mit Aussagen wie den folgenden auf:

- Tante Olga kommt am Sonntag mit 95% Wahrscheinlichkeit auf Besuch.
- Ich bestehe die nächste Prüfung mit 90% Wahrscheinlichkeit.

Hier drückt man einfach eine gewisse Sicherheit (oder Unsicherheit) mit Zahlen aus, die ohne irgendwelche Rechnungen zustande gekommen sind. ⊠

(3.1.4) Zusammenfassung

Diese Beispiele und die geführten Diskussionen hinterlassen vielleicht einen etwas zwiespältigen Eindruck. Die Resultate leuchten (hoffentlich) in jedem Fall ein, aber sie sind doch auf ganz verschiedene Weise gewonnen worden. Es scheint also verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe zu geben. Wir zählen einmal auf, was wir gefunden haben:

1. Klassische Wahrscheinlichkeit

   (Beispiele A, B)

   Hier ist die Wahrscheinlichkeit durch die folgende Formel gegeben:

$$\frac{\text{Anzahl } \textit{günstige} \text{ Fälle}}{\text{Anzahl } \textit{mögliche} \text{ Fälle}}.$$

2. Idealisierte relative Häufigkeit

   (Beispiele C, D)

   Hier stellt man sich die Wahrscheinlichkeit als eine Zahl vor, der die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei wachsender Anzahl der Versuche immer näher kommt. Diese Wahrscheinlichkeit muss durch statistische Untersuchungen geschätzt werden.

3. Geometrische Wahrscheinlichkeit

   (Beispiele E, F)

   Hier ist die Wahrscheinlichkeit proportional zur Masszahl eines Flächeninhalts oder eines anderen geometrischen Objekts (es lassen sich leicht Beispiele angeben, wo die Wahrscheinlichkeit proportional zur Länge eines Kreisbogens oder zur Grösse eines Winkels ist).

4. Subjektive Wahrscheinlichkeit

   (Beispiel G)

   Hier wird gefühlsmässig ausgedrückt, wie stark man mit dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses rechnet.

Welches ist nun der "richtige" Wahrscheinlichkeitsbegriff? Alle scheinen ihre Existenzberechtigung zu haben, obwohl sie von ganz unterschiedlicher Natur sind.

Die salomonische Antwort lautet: Alle sind richtig! Die Lösung, welche die Mathematiker gefunden haben, besteht einfach darin, einen sehr allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren, der alle oben aufgeführten Begriffe als Spezialfälle umfasst. Es handelt sich dabei nicht etwa um eine "Zauberformel", welche die Berechnung aller Wahrscheinlichkeiten auf einheitliche Art ermöglichen würde, sondern vielmehr um ein *Axiomensystem*, also um eine etwas abstrakte Sache. Wir werden in 3.3 darauf zurückkommen. Für den Moment sei nur so viel verraten: Man geht von der Annahme aus, dass den zur Untersuchung stehenden Zufallsereignissen gewisse Zahlen zugeordnet sind, die man Wahrscheinlichkeiten nennt. Wie diese Zahlen gefunden wurden, ist für die allgemeine Theorie unwesentlich. Wichtig ist bloss, dass die Zuordnung einigen Grundregeln (Axiomen) genügt. In den Beispielen haben wir gesehen, dass diese Wahrscheinlichkeiten z.B. durch Abzählen von Möglichkeiten, durch statistische Untersuchungen oder durch geometrische Betrachtungen gewonnen werden können.

Der allgemeine Wahrscheinlichkeitsbegriff hat dagegen keine konkrete inhaltliche Bedeutung mehr, was ihn für das Verständnis etwas schwieriger macht. Dafür kann er in allen denkbaren Fällen verwendet werden. In 3.3 soll all dies näher besprochen werden.

Vorher müssen wir aber noch einige Begriffe klären, vor allem die Ausdrücke "Ergebnis" und "Ereignis". Diese sind bisher unbesorgt verwendet worden, im nächsten Kapitel erhalten sie einen präzisen Sinn.

3.2. ERGEBNISSE UND EREIGNISSE

(3.2.1) Überblick

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bilden den *Ergebnisraum* Ω. Ein *Ereignis* E ist eine Teilmenge von Ω. *Spezielle Ereignisse* sind: *(3.2.2)* *(3.2.4), (3.2.5)*

- Das sichere Ereignis Ω.
- Das unmögliche Ereignis $\varnothing$.
- Das Elementarereignis $\{\omega\}, \omega \in \Omega$.

Die bekannten mengentheoretischen Operationen haben konkrete Interpretationen im Zusammenhang mit Ereignissen: *(3.2.6)*

- $E \cap F$ bedeutet E *und* F.
- $E \cup F$ bedeutet E *oder* F (oder beides).
- $\overline{E}$ (Komplementärmenge) bedeutet das *Gegenteil* von E.

Zwei Ereignisse E und F heissen *unvereinbar*, wenn $E \cap F = \varnothing$ ist. *(3.2.7)*

(3.2.2) Der Ergebnisraum

Zur Beschreibung eines Zufallsexperiments gehört auch die Angabe der Ergebnisse, die zu beobachten man erwartet. Ein etwas naives Beispiel: Beim Würfeln wird man sich wohl normalerweise dafür interessieren, welche Augenzahl erscheint. Es gibt dann sechs mögliche Ergebnisse. Man könnte sich aber auch fragen, ob der Würfel auf dem Tisch liegen bleibt oder zu Boden fällt. In diesem Fall gäbe es nur zwei mögliche Ergebnisse des "Experiments".

Wir führen deshalb den folgenden einfachen, aber wichtigen Begriff ein:

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennen wir den *Ergebnisraum*. Diese Menge bezeichnen wir mit Ω.

Zur Terminologie: Üblich sind auch die Begriffe "Ereignisraum" oder "Stichprobenraum". Die Verwendung des Wortes "Raum" soll nichts Geometrisches implizieren. Genauso gut könnte man "Ergebnismenge" sagen. Statt von Ergebnissen spricht man etwa auch von "Ausfällen".

(3.2.3) Beispiele

Beispiel 3.2.3.A Würfelspiel

Beim Würfeln besteht der Ergebnisraum aus 6 Ergebnissen:

$$\Omega = \left\{ ⚀\,,\ ⚁\,,\ ⚂\,,\ ⚃\,,\ ⚄\,,\ ⚅ \right\}$$

bzw. in vernünftigerer Schreibweise:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \; . \qquad \boxtimes$$

Beispiel 3.2.3.B Radioaktiver Zerfall

Mit einem Geigerzähler bestimmt man die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit (z.B. pro Minute) einer radioaktiven Substanz. Diese Anzahl ändert sich normalerweise von Zeitintervall zu Zeitintervall und kann daher als Ergebnis eines Zufallsexperiments aufgefasst werden. Der Ergebnisraum besteht somit aus den natürlichen Zahlen:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

oder kurz

$$\Omega = \mathbb{N} \; .$$

Die Menge Ω ist hier also unendlich, genauer "abzählbar unendlich". Eine Menge heisst gemäss (2.2.1.5) *abzählbar unendlich*, wenn man sie in eine Folge anordnen kann, oder, anders ausgedrückt, wenn man ihre Elemente mittels der natürlichen Zahlen durchnummerieren kann.

Es liesse sich hier noch Folgendes einwenden: Die Anzahl der radioaktiven Zerfälle pro Zeiteinheit ist doch sicher endlich. Weshalb wählt man dann für Ω eine unendliche Menge? Der Grund liegt darin, dass man ja nicht von vornherein wissen kann, welches die maximal mögliche Anzahl ist. Zudem würde die Einschränkung auf eine endliche Menge, z.B. auf

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10000\} \; ,$$

bedeuten, dass man zwar 10000 Zerfälle noch als möglich, 10001 aber als unmöglich erachtet, was doch etwas willkürlich wäre. Mit $\Omega = \mathbb{N}$ ist man jedenfalls auf der sicheren Seite. $\boxtimes$

Beispiel 3.2.3.C Eile mit Weile

Beim "Eile mit Weile"-Spiel muss man zu Beginn so lange würfeln, bis eine Fünf erscheint. Wenn wir die Anzahl der dazu nötigen Würfe als Ergebnis eines Zufallsexperiments auffassen, dann bedeutet also das Ergebnis "1", dass schon im ersten Wurf eine Fünf gefallen ist, usf.

Die praktische Lebenserfahrung zeigt, dass meist nur wenige Würfe notwendig sind. Theoretisch ist es aber denkbar, dass es sehr lange dauern kann, bis das ersehnte Ergebnis eintritt. Man ist deshalb versucht, als Ergebnisraum die Menge

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

zu wählen. Wenn man aber schon rein theoretische Möglichkeiten diskutiert, dann muss man auch den Fall berücksichtigen, dass die Fünf überhaupt nie erscheint. Dieses Ereignis bezeichnen wir symbolisch mit ∞. Somit erhalten wir definitiv den Ergebnisraum

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, \infty\} \, .$$

Dieses Beispiel wird in 3.5.6.D weitergeführt.

Als Variante können die Spieler beschliessen, dass sie aufhören (und vielleicht Karten spielen wollen), wenn nach 10 Würfen immer noch keine Fünf gefallen ist. In diesem Fall würde der Ergebnisraum so aussehen:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \spadesuit\} \, ,$$

wobei das Ergebnis $\spadesuit$ bedeutet: “Zehnmal ist keine Fünf gekommen; wir geben’s auf.” ⊠

Beispiel 3.2.3.D Körperlänge

Wir messen die Körperlänge eines Menschen. Als Messwert kommt (theoretisch, wenn wir unbeschränkte Messgenauigkeit voraussetzen) jede positive reelle Zahl in Frage. Wir können für den Ergebnisraum

$$\Omega = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$$

wählen. Ω ist unendlich, sogar überabzählbar unendlich*, wie bereits in (2.2.1.5) ohne Beweis erwähnt wurde.

Mit etwas Willkür (vgl. die Diskussion in 3.2.3.B) könnten wir auch eine obere Grenze festlegen; dann wäre Ω ein Intervall von endlicher Länge, aber immer noch überabzählbar unendlich. Man könnte z.B.

$$\Omega = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 500\} = (0, 500]$$

setzen (mit cm als Masseinheit). ⊠

Die eben diskutierten Beispiele liessen sich leicht vermehren. Man sieht, dass der Ergebnisraum Ω sehr viele verschiedene Erscheinungsformen haben kann. Zum Glück ist

* Eine unendliche Menge, welche nicht abzählbar unendlich ist, heisst überabzählbar unendlich.

es für die Wahrscheinlichkeitsrechnung unwichtig, was die genaue Natur der Ergebnisse ist. Wir abstrahieren deshalb etwas:

> In der allgemeinen Theorie verstehen wir unter dem *Ergebnisraum* Ω eine beliebige Menge, deren Elemente wir *Ergebnisse* nennen und meist mit ω (kleines Omega) bezeichnen.

In jeder konkreten Situation kann man sich aber die Elemente ω von Ω als Ergebnisse eines Zufallsexperiments vorstellen, wie dies in (3.1.2) und (3.1.3) geschildert wurde.

Die einzelnen Ergebnisse aus Ω sollen nun mit Wahrscheinlichkeiten versehen werden. Es wird sich aber zeigen, dass man dabei nicht so sehr die Ergebnisse, als vielmehr die so genannten *Ereignisse* zu betrachten hat. Diese werden im nächsten Abschnitt behandelt.

(3.2.4) Ereignisse

Bei einem Zufallsexperiment will man nicht bloss nach den Ergebnissen fragen. Wir behandeln zuerst einige Beispiele.

<u>Beispiel 3.2.4.A</u> Würfeln

Beim Würfeln mit einem Würfel ist der Ergebnisraum gegeben durch

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} .$$

Ein Ergebnis (also eine Augenzahl) bezeichnen wir allgemein mit ω. Es sei nun ein solches ω gewürfelt worden. Zunächst stellt sich sicher die Frage, was ω ist, also ob man z.B. eine Eins oder eine Sechs gewürfelt hat. Daneben können aber auch noch weitere Ereignisse von Belang sein, wie z.B.

1. Es ist eine gerade Zahl gewürfelt worden.
2. Es ist eine Zahl kleiner oder gleich drei gewürfelt worden.
3. Es ist eine gerade Zahl kleiner oder gleich drei gewürfelt worden.
4. Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 7.

Diese Ereignisse treten der Reihe nach ein, falls gilt:

1. Die gewürfelte Zahl ist 2 oder 4 oder 6, d.h. $\omega \in \{2, 4, 6\}$.
2. Die gewürfelte Zahl ist 1 oder 2 oder 3, d.h. $\omega \in \{1, 2, 3\}$.
3. Die gewürfelte Zahl ist 2, d.h. $\omega \in \{2\}$.
4. Dies trifft immer zu, denn $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ ist stets richtig.

Jede dieser Situationen wird offensichtlich durch eine Teilmenge von Ω vollständig beschrieben. Führen wir das Experiment (Würfeln) durch und erhalten wir das Ergebnis (die Augenzahl) ω, so tritt das Ereignis E genau dann ein, wenn $\omega \in E$ ist. Würfeln wir etwa $\omega = 4$, so tritt $E_1 = \{2, 4, 6\}$ ein; $E_2 = \{1, 2, 3\}$ tritt nicht ein. $\boxtimes$

Beispiel 3.2.4.B Körperlänge

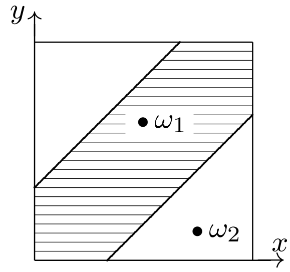
Bei der Messung der Körperlänge eines Menschen ist der Ergebnisraum

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} .$$

Das Ereignis “die Länge ω des gemessenen Menschen liegt zwischen 170 cm und 175 cm (Grenzen eingeschlossen)” entspricht dann der Teilmenge $[170, 175] \subset \mathbb{R}$, das Ereignis “der Mensch ist grösser als 200 cm” wird durch die Teilmenge $(200, \infty)$ dargestellt. ⊠

Beispiel 3.2.4.C Xaver und Yvonne (vgl. Beispiel 3.1.3.F)

In dieser Aufgabe besteht der Ergebnisraum Ω aus allen Paaren $\omega = (x, y)$, wobei x bzw. y die Ankunftszeit von Xaver bzw. Yvonne (in Minuten nach 12 Uhr) ist; geometrisch wird Ω durch ein Quadrat beschrieben. Das Ereignis E “die beiden treffen sich” wird durch die schraffierte Fläche dargestellt. Im Fall des Ergebnisses ω_1 tritt E ein, im Fall ω_2 dagegen nicht. ⊠



Gestützt auf diese Überlegungen definieren wir für einen beliebigen Ergebnisraum Ω, der ja — abstrakt gesehen — einfach eine Menge ist:

Ein *Ereignis* E ist eine Teilmenge von Ω:

$$E \subset \Omega .$$

Wie schon weiter oben sagen wir, dass das Ereignis E *eintritt*, wenn das Ergebnis des durch Ω beschriebenen Zufallsexperiments ein Element von E ist. Beachten Sie den Unterschied: Ein Ergebnis ist ein *Element* von Ω, ein Ereignis ist eine *Teilmenge* von Ω.

(3.2.5) Spezielle Ereignisse

1. Das sichere Ereignis

Ω selbst ist auch Teilmenge von Ω. Dieses spezielle Ereignis heisst *das sichere Ereignis*.

Der Grund für diese Bezeichnung ergibt sich sofort aus der anschaulichen Interpretation: Da Ω die Menge aller denkbaren Ergebnisse ist, gilt die Beziehung $\omega \in \Omega$ immer, d.h., dieses Ereignis tritt sicher ein. (Vgl. dazu Fall 4. im Beispiel 3.2.4.A.)

2. Das unmögliche Ereignis

Auch die leere Menge $\varnothing$ ist Teilmenge von Ω. Dieses Ereignis heisst das *unmögliche Ereignis*.

Auch diese Bezeichnung leuchtet sofort ein. Da die leere Menge per definitionem keine Elemente enthält, ist $\omega \in \varnothing$ unmöglich.

3. Elementarereignisse

Wenn ω ein Ergebnis (also ein Element von Ω) ist, dann nennen wir die nur aus ω bestehende (einelementige) Menge $\{\omega\}$ ein *Elementarereignis* oder ein *einfaches Ereignis*.

Beachten Sie auch hier den Unterschied: ω ist ein Element, $\{\omega\}$ eine Teilmenge von Ω. Diese beiden Dinge sind daher eigentlich zu unterscheiden. Wenn wir aber manchmal bequemlichkeitshalber vom Ereignis ω sprechen, dann sollte ebenfalls klar sein, was gemeint ist.

(3.2.6) Rechnen mit Ereignissen

Da Ereignisse Teilmengen von Ω sind, kann man die bekannten *mengentheoretischen Operationen* wie Durchschnitt oder Vereinigung (vgl. (26.2.c) im ersten Band) auch auf Ereignisse anwenden. Wir wollen nun sehen, welches die konkreten Interpretationen dieser Operationen sind.

Wir betrachten wieder das handliche Beispiel des Würfelns und die beiden Ereignisse

$E = \{2, 4, 6\}$, Augenzahl gerade,
$F = \{1, 2, 3\}$, Augenzahl ≤ 3.

Der *Durchschnitt* $E \cap F = \{2\}$ dieser beiden Ereignisse tritt offenbar genau dann ein, wenn sowohl E als auch F zusammen eintreten; d.h., wenn die Augenzahl sowohl gerade als auch ≤ 3 ist. Ganz allgemein gilt natürlich:

Wenn E und F Ereignisse sind, dann ist das Ereignis

$$E \cap F$$

zu interpretieren als das Ereignis "*E und F*".

Entsprechend kann man auch den Durchschnitt von mehr als zwei, ja sogar von unendlich vielen Ereignissen betrachten.

Für die *Vereinigung* $E \cup F$ gilt in unserm Beispiel:

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6\} .$$

Dieses Ereignis tritt ein, wenn *entweder E oder F* eintreten, oder beide, denn das Wort "oder" wird hier im nicht ausschliessenden Sinn verwendet. Es gilt allgemein:

Wenn E und F Ereignisse sind, dann ist das Ereignis

$$E \cup F$$

zu interpretieren als "*E oder F*".

Auch hier kann man verallgemeinern und die Vereinigung von endlich oder unendlich vielen Ereignissen untersuchen. Die folgende Notation wird später noch gebraucht: Es seien $E_1, E_2, E_3, \ldots$ abzählbar unendlich viele Ereignisse. Für ihre Vereinigung schreibt man entweder

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots$$

oder

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ .$$

(Das letzte Zeichen ist völlig analog zum Summenzeichen $\sum$.)

Zu jedem Ereignis E kann man das *komplementäre Ereignis* oder *Gegenereignis* $\overline{E}$ bilden, das aus all jenen Ergebnissen von Ω besteht, welche *nicht* zu E gehören:

$$\overline{E} = \{\, \omega \in \Omega \mid \omega \notin E \,\} \ .$$

$\overline{E}$ tritt genau dann ein, wenn E *nicht* eintritt.

Mit dem obigen Beispiel $E = \{2, 4, 6\}$ (Augenzahl gerade) ist $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ (Augenzahl ungerade).

Schon rein mengentheoretisch sieht man ein, dass folgende Regeln gelten:

$$\overline{\overline{E}} = E, \qquad E \cap \overline{E} = \varnothing, \qquad E \cup \overline{E} = \Omega \ .$$

Die Interpretation in der Sprache der Ereignisse ist klar. Die erste Regel entspricht der doppelten Verneinung (die wieder eine Bejahung ergibt), die zweite besagt, dass es unmöglich ist, dass sowohl E als auch das Gegenteil $\overline{E}$ eintritt, und die dritte drückt aus, dass entweder E oder $\overline{E}$ eintreten muss.

Zum Schluss überlegen wir uns noch, was die *Inklusion* $E \subset F$ anschaulich bedeutet. Dazu sei ω ein Ergebnis. Wenn $\omega \in E$ liegt, wenn also E eingetroffen ist, dann ist wegen $E \subset F$ automatisch auch $\omega \in F$, d.h., dann ist auch F eingetroffen. Kurz gesagt: Aus E folgt F.

Drei zusammenfassende Illustrationen

1. Wir betrachten nochmals das Beispiel "Körperlänge" mit $\Omega = (0, \infty)$ und die folgenden Ereignisse:

   $E = (0, 170]$, (Körperlänge ≤ 170 cm),
   $F = [160, 180]$, (Körperlänge zwischen 160 und 180 cm),
   $G = [165, 175]$, (Körperlänge zwischen 165 und 175 cm).

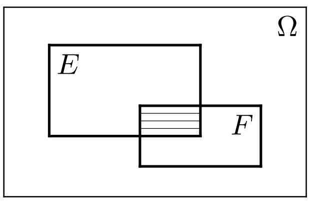
   Dann ist

$E \cap F = [160, 170]$, (Körperlänge zwischen 160 und 170 cm, Grenzen eingeschlossen),
$E \cup F = (0, 180]$, (Körperlänge unter 180 cm, obere Grenze eingeschlossen),
$\overline{E} = (170, \infty)$, (Körperlänge über 170 cm, untere Grenze ausgeschlossen).

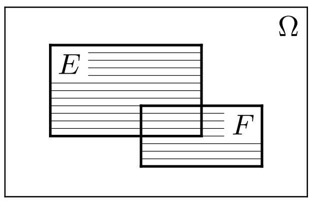
Ferner ist $G \subset F$: Wenn G eintrifft, dann trifft auch F ein. Dies ist anschaulich völlig klar.

2. Beim Roulette (mit den 37 Zahlen $0, \ldots, 36$) gibt es z.B. das Ereignis P (pair = gerade):
   $P = \{2, 4, 6, \ldots, 34, 36\}$.
   Beachten Sie, dass beim Roulette (im Gegensatz zur Mathematik) die Null nicht als gerade Zahl (aber auch nicht als ungerade Zahl) angesehen wird. Ein anderes Ereignis M nennt sich "manque":
   $M = \{1, 2, 3, \ldots, 17, 18\}$.
   Das Ereignis $P \cap M$ besteht dann aus den geraden Zahlen zwischen 1 und 18:
   $P \cap M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.
   Weiter ist $\overline{P}$ offensichtlich das Ereignis "es ist eine ungerade Zahl herausgekommen". Etwas komplizierter schliesslich (überlegen Sie sich das selbst) ist
   $\overline{P \cup M} = \{0, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$.
   (Dies sind die Zahlen, die weder zu P noch zu M gehören.)

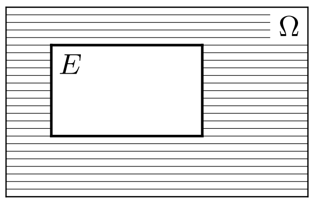
3. Eine geometrische Veranschaulichung beruht auf Venn-Diagrammen (vgl. (26.2.c) im ersten Band).



$E \cap F$ (E und F)



$E \cup F$ (E oder F)



$\overline{E}$ (nicht E)

Es sei schliesslich noch erwähnt, dass in manchen Büchern EF statt $E \cap F$ sowie $E + F$ statt $E \cup F$ steht, Letzteres manchmal aber auch nur dann, wenn E und F unvereinbar im Sinne von (3.2.7) sind.

(3.2.7) Unvereinbare Ereignisse

Wenn für zwei Ereignisse E und F

$$E \cap F = \varnothing$$

gilt, dann sagt man, E und F seien *unvereinbar* (oder "E und F schliessen sich gegenseitig aus".)

In diesem Fall ist es nämlich nicht möglich, dass E und F zugleich eintreten, da ihr Durchschnitt das unmögliche Ereignis $\varnothing$ ist.

Die Ereignisse E und $\overline{E}$ sind stets unvereinbar. Beim Würfeln sind z.B. $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$ unvereinbar.

Liegen mehr als zwei Ereignisse vor, etwa

$$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

(endlich oder unendlich viele), so sagt man, sie seien *paarweise unvereinbar*, wenn je zwei verschiedene davon unvereinbar sind, d.h, wenn gilt:

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad \text{für} \quad i \neq j \; .$$

Ein einfaches Beispiel: Wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ lauter verschiedene Ergebnisse aus Ω sind, dann sind die Elementarereignisse

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$$

paarweise unvereinbar.

Warnung: Das Wort "unvereinbar" ist nicht zu verwechseln mit dem später einzuführenden Begriff "unabhängig" (siehe (3.5.7)).

3.3. RECHENREGELN UND AXIOME

(3.3.1) Überblick

In diesem Kapitel wird ein allgemeiner, *abstrakter Wahrscheinlichkeitsbegriff* eingeführt, der sich wie folgt beschreiben lässt: *(3.3.5)*

Zu jedem Ereignis E aus einem Ergebnisraum Ω sei eine Zahl $P(E)$ so festgelegt worden, dass folgende Axiome erfüllt sind:

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ für alle E.
Axiom 2: $P(\Omega) = 1$.
Axiom 3: Für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise unvereinbare Ereignisse E_i gilt

$$P\Big(\bigcup_i E_i\Big) = \sum_i P(E_i) \ .$$

Die Zahl $P(E)$ darf man dann als Wahrscheinlichkeit von E bezeichnen, unabhängig davon, wie sie im konkreten Fall bestimmt wurde.

Die in (3.1.4) besprochenen speziellen Wahrscheinlichkeitsbegriffe erfüllen alle diese Axiome und sind deshalb Spezialfälle des allgemeinen Begriffs. Sie tragen daher den Namen Wahrscheinlichkeit zu Recht.

Charakteristisch für diesen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, dass man keine konkrete Methode (z.B. eine Formel) angibt, mit der die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ bestimmt werden könnte, sondern dass man die Grösse P durch ihre "formalen" Eigenschaften (Axiome 1, 2, 3) festlegt.

Die nachstehenden Rechenregeln folgen direkt aus den Axiomen und gelten daher für alle Interpretationen der Wahrscheinlichkeit:

Regel 4: $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, falls $E \cap F = \varnothing$.
Regel 5: $P(\varnothing) = 0$.
Regel 6: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.
Regel 7: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Weitere Regeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unter zusätzlichen Voraussetzungen folgen in 3.4 und 3.5.

Ein Ergebnisraum Ω zusammen mit der Wahrscheinlichkeit P wird auch "*Wahrscheinlichkeitsraum*" genannt. *(3.3.7)*

(3.3.2) Grundregeln für Wahrscheinlichkeiten

In den Beispielen von (3.1.2) haben wir zufällige Ereignisse betrachtet und ihre Wahrscheinlichkeiten bestimmt, wobei aber verschiedene Interpretationen (klassische Wahrscheinlichkeit, geometrische Wahrscheinlichkeit etc.) verwendet wurden.

In (3.3.2) bis (3.3.4) wollen wir nun zeigen, dass diese auf den ersten Blick ganz verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe doch recht viel gemeinsam haben. In allen Fällen gelten nämlich dieselben Grundregeln (weiter unten provisorisch Regeln (**A**) bis (**F**) genannt). In einem kühnen Schritt wird man dann unter der Wahrscheinlichkeit im abstrakten Sinn einfach "alles verstehen, was diesen Regeln gehorcht" (vgl. (3.3.5)). Wir beginnen deshalb mit der Erläuterung dieser Grundregeln.

In (3.2.4) haben wir gelernt, was unter einem Ereignis zu verstehen ist. Für die folgenden Überlegungen nehmen wir nun an, dass jedem Ereignis E aus einem Ergebnisraum Ω auf irgendeine Weise (z.B. mit einem der in (3.1.4) zusammengestellten Verfahren) eine gewisse Wahrscheinlichkeit zugeordnet sei, die wir mit

$$P(E)$$

bezeichnen wollen. (Die Bezeichnung P kommt natürlich von "probability" oder von "probabilité".)

Die ersten drei Regeln (**A**), (**B**), (**C**) sind eigentlich blosse Konventionen.

Eine erste Regel gilt gemäss unsern Abmachungen von (3.1.2):

(**A**) $\quad 0 \le P(E) \le 1 \quad$ für alle Ereignisse E.

In der Praxis ist es auch üblich, die Wahrscheinlichkeit in Prozenten anzugeben. In diesem Fall lautet die Beziehung selbstverständlich: $0\% \le P(E) \le 100\%$.

Bei jeder Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten ist ferner darauf zu achten, dass das sichere Ereignis, also Ω (vgl. (3.2.5)), die Wahrscheinlichkeit 1 (bzw. 100%) hat:

(**B**) $\quad P(\Omega) = 1.$

Ebenso hat das unmögliche Ereignis $\varnothing$ (vgl. (3.2.5)) die Wahrscheinlichkeit 0:

(**C**) $\quad P(\varnothing) = 0.$

(3.3.3) Die Wahrscheinlichkeit von $\overline{E}$

Das Ereignis $\overline{E}$ ist das Gegenereignis von E, siehe (3.2.6). Es tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt. Schon von der Anschauung her ist klar, wie die Wahrscheinlichkeiten von E und $\overline{E}$ zusammenhängen: Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt 51.3% ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, also einer Mädchengeburt, eben 48.7%. Oder, um einmal die “subjektive Wahrscheinlichkeit” von Beispiel 3.1.3.G ins Spiel zu bringen: Wenn Tante Olga mit 95% Wahrscheinlichkeit zu Besuch kommt, dann kommt sie eben mit 5% Wahrscheinlichkeit nicht zu Besuch. Allgemein (und mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1) formuliert, lautet die Regel so:

(**D**) $\quad P(\overline{E}) = 1 - P(E) \quad$ für alle Ereignisse E.

(Drückt man die Wahrscheinlichkeiten mit Prozenten aus, so ist 1 wieder durch 100% zu ersetzen.)

Das Erfreuliche an diesem Sachverhalt ist nun, dass sich diese einleuchtende Regel *beweisen* lässt, sofern man eine konkrete Interpretation der Wahrscheinlichkeit verwendet. Wir geben zwei Beispiele:

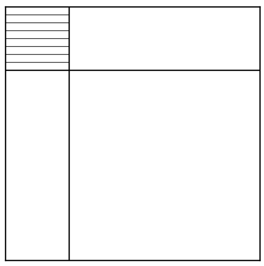
1. Klassische Wahrscheinlichkeit (vgl. (3.1.4, 1.))

Hier ist
$$P(E) = \frac{k}{n} \, ,$$
wobei n die Anzahl der möglichen, k die Anzahl der günstigen Fälle ist.

Die Zahl der für E *ungünstigen* Fälle ist dann $n-k$, dies ist aber gerade die Anzahl der für $\overline{E}$ *günstigen* Fälle, und wir erhalten so:
$$P(\overline{E}) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(E) \, . \qquad \boxtimes$$

2. Das Glücksspiel von 3.1.3.E (geometrische Wahrscheinlichkeit)

Es sei E das Ereignis “die Nadel trifft das schraffierte Quadrat”. Das zugehörige Gegenereignis ist dann $\overline{E}$: “Die Nadel trifft das nicht schraffierte Flächenstück”. In diesem Beispiel sind die Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ und $P(\overline{E})$ als Flächeninhalt der entsprechenden Stücke zu interpretieren. Dem sicheren Ereignis Ω (mit $P(\Omega) = 1$) entspricht das ganze Quadrat, das somit den Flächeninhalt 1 haben muss.



Da sich die E bzw. $\overline{E}$ entsprechenden Stücke zum Quadrat ergänzen, ist die Summe ihrer Inhalte gleich 1. Wir erhalten
$$P(E) + P(\overline{E}) = 1 \, ,$$
was zu (**D**) äquivalent ist. $\boxtimes$

Hinweis

An dieser Stelle muss noch eine auf den ersten Blick etwas merkwürdige Tatsache erwähnt werden: Es sei F das Ereignis “der Mittelpunkt des Quadrats wird getroffen”. Nun hat dieser Punkt den Flächeninhalt 0, also gilt gemäss unsern Abmachungen:
$$P(F) = 0 \, ,$$

und dies trotz der Tatsache, dass F nicht unmöglich ist ($F \neq \varnothing$)! Für das Gegenereignis $\overline{F}$ gilt entsprechend $P(\overline{F}) = 1$, obwohl $\overline{F} \neq \Omega$ ist.

Man muss diese Erscheinung so verstehen: Das Ereignis F ist zwar nicht unmöglich. Es ist aber so unwahrscheinlich, dass *genau* der Mittelpunkt getroffen wird, dass man diesem Ereignis keine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zubilligen kann. (Siehe auch (4.3.4.c).)

Sie können sich auch eine kleine Kreisscheibe um den Mittelpunkt vorstellen. Die Wahrscheinlichkeit, diese Scheibe zu treffen, ist sehr klein, aber nicht Null. Lässt man dann den Radius dieser Scheibe immer kleiner werden, dann schrumpft sie zum Mittelpunkt zusammen und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers strebt gegen Null.

Als *Warnung* halten wir jedenfalls fest:

- Aus $P(E) = 0$ folgt nicht unbedingt, dass $E = \varnothing$ ist.
- Aus $P(E) = 1$ folgt nicht unbedingt, dass $E = \Omega$ ist.

(Mit andern Worten: Die Umkehrungen der Regeln (**B**) und (**C**) gelten im Allgemeinen nicht.)

(3.3.4) Die Wahrscheinlichkeit von $E \cup F$

In (3.2.6) haben wir gesehen, dass die Vereinigung $E \cup F$ das Ereignis "E oder F (oder beide zugleich)" beschreibt. Wir wollen nun eine Formel für $P(E \cup F)$ herleiten und zwar wieder anhand von zwei speziellen Wahrscheinlichkeitsbegriffen.

1. Klassische Wahrscheinlichkeit

Wir führen zuerst eine zweckmässige Bezeichnung ein:

Wenn M eine endliche Menge ist, dann bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

Die Anzahl der für das Ereignis E günstigen Fälle ist dann gleich $|E|$; die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle ist $|\Omega|$.

Eine einfache Illustration: Beim Würfeln ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, also $|\Omega| = 6$. Das Ereignis $E =$ "gerade Zahl" ist $\{2, 4, 6\}$, somit ist $|E| = 3$.

Die in (3.1.4) benützte "klassische" Formel

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

lautet jetzt einfach

$$\boxed{P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}\ .}$$

Nun seien also E und F zwei Ereignisse aus Ω. Dann gilt

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}, \qquad P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|}, \qquad P(E \cup F) = \frac{|E \cup F|}{|\Omega|}\ .$$

Wieviele Elemente liegen in $E \cup F$? Um dies zu ermitteln, addieren wir die Anzahlen der Elemente von E und von F. Allerdings zählen wir dabei manche Elemente doppelt, nämlich jene, die sowohl in E als auch in F liegen. Das sind aber genau die Elemente aus $E \cap F$. Deren Anzahl muss also wieder subtrahiert werden. Wir finden so

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|\ .$$

Damit lässt sich $P(E \cup F)$ bestimmen:

$$P(E \cup F) = \frac{|E \cup F|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|\Omega|} + \frac{|F|}{|\Omega|} - \frac{|E \cap F|}{|\Omega|}\ .$$

Wir erhalten schliesslich:

(**E**) $\quad P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

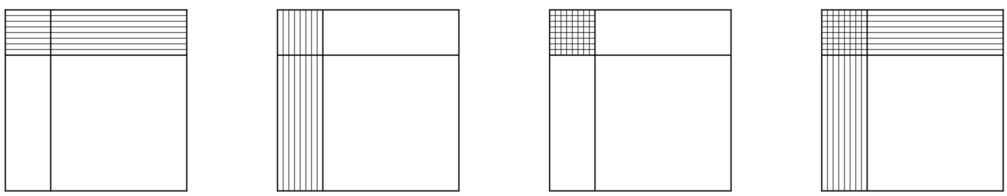
Wenn E und F *unvereinbar* sind (3.2.7), dann ist $E \cap F = \varnothing$ und somit ist $P(E \cap F) = 0$. Die Regel vereinfacht sich zu

(**F**) $\quad$ Wenn E und F unvereinbar sind, dann ist $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

$\boxtimes$

2. Das Glücksspiel von 3.1.3.E

Hier wird die Wahrscheinlichkeit durch einen Flächeninhalt beschrieben. Den folgenden "Bildern ohne Worte" entnimmt man ohne weiteres, dass Formel (**E**) (und damit Formel (**F**)) auch hier gilt.



E $\qquad$ F $\qquad$ $E \cap F$ $\qquad$ $E \cup F$

$\boxtimes$

(3.3.5) Der allgemeine Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wir sind nun so weit, dass wir den Schritt zum allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff wagen können. In (3.3.2) bis (3.3.4) haben wir gesehen, dass die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen gewissen Rechenregeln (**A**) bis (**F**) genügen, und zwar sind wir bei zwei ganz verschiedenen Interpretationen der Wahrscheinlichkeit auf dieselben Regeln gestossen. Diese leuchten auch anschaulich ein, und so ist es sicher nicht unvernünftig, von *jedem* — wie auch immer definierten — Wahrscheinlichkeitsbegriff zu fordern, dass diese Regeln gelten sollen.

Hat man den Sachverhalt so weit durchdacht, dann ist es nur noch ein kleiner Schritt zum abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff. Hier versucht man gar nicht erst, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch eine in allen Fällen anwendbare *Formel* zu definieren; vielmehr wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit durch seine *Eigenschaften* festgelegt, und zwar spricht man immer dann von einer Wahrscheinlichkeit P, wenn jedem Ereignis E eine Zahl $P(E)$ zugeordnet ist, derart, dass die Regeln (**A**) bis (**F**) gelten. Wie wir gleich sehen werden, muss die Regel (**F**) allerdings auf abzählbar unendlich viele Ereignisse ausgedehnt werden.

Diese Auffassung hat den grossen Vorteil*, dass sie alle konkreten, aber nicht durch eine einheitliche Berechnungsmethode erfassbaren Vorstellungen der Wahrscheinlichkeit unter einen Hut bringt. Man spricht hier auch von der "axiomatischen Grundlegung" der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn man stellt einige Grundregeln (oder Axiome) an den Anfang.

Die Mathematiker haben sich nun gefragt, ob nicht noch einige der Regeln (**A**) bis (**F**) in dem Sinne überflüssig seien, dass man sie aus den übrigen herleiten könnte. Dies ist tatsächlich der Fall: Die Regeln (**C**), (**D**) und (**E**) lassen sich ganz abstrakt und ohne konkrete Interpretationen aus (**A**), (**B**) und (**F**) beweisen, wie wir noch sehen werden. Anderseits zeigt es sich auch, dass für unendliche Ergebnisräume die Regel (**F**) nicht genügt. Man muss etwas mehr fordern (vgl. Axiom 3). So gelangt man schliesslich zu drei Grundregeln (oder Axiomen), von denen vor allem die ersten beiden fast selbstverständlich sind.

Es sei Ω ein Ergebnisraum (abstrakt gesehen also eine Menge). Jedem Ereignis E aus Ω sei eine Zahl $P(E)$ zugeordnet, so dass die folgenden Axiome gelten:

Axiom 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ für alle E.

Axiom 2: $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3: Für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise unvereinbare Ereignisse E_i gilt
$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots$

In diesem Fall sagt man, dass auf Ω eine *Wahrscheinlichkeit* P definiert sei und nennt $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E. P selbst kann als Abbildung der Menge der Ereignisse in die Menge der reellen Zahlen aufgefasst werden.

* Ein Nachteil ist vielleicht, dass der Begriff etwas abstrakt und ohne konkreten Inhalt ist.

Bemerkungen

a) Beachten Sie, dass man nicht die Ergebnisse (also die Elemente von Ω) sondern die Ereignisse (also Teilmengen von Ω) mit Wahrscheinlichkeiten versieht. (Dies ist deshalb nötig, weil es Fälle gibt, wo alle Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit Null haben, vgl. Beispiel 2. in (3.3.3)). Die Ergebnisse kommen aber trotzdem zu ihrem Recht, denn jedem Ergebnis ω entspricht ja auch ein Ereignis, nämlich das Elementarereignis $\{\omega\}$, siehe (3.2.5).

b) Die obigen drei Axiome bilden das so genannte *Axiomensystem von Kolmogoroff*, benannt nach einem russischen Mathematiker, der es in den dreissiger Jahren des letzten Jahrhunderts aufstellte. (A.N. Kolmogoroff, 1903–1987.)

Kommentare zu Axiom 3

1) Die Voraussetzung der paarweisen Unvereinbarkeit bedeutet nach (3.2.7), dass $E_i \cap E_j = \varnothing$ ist, für alle $i \neq j$.

2) Die Formel ist so zu interpretieren:
   - Wenn nur endlich viele Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ vorliegen, dann steht rechts eine gewöhnliche (endliche) Summe.
   - Sind aber abzählbar unendlich viele E_i vorhanden, so steht rechts eine konvergente unendliche Reihe (siehe (19.3) im ersten Band).

3) Zur Abkürzung schreibt man auch

$$P\Big(\bigcup_i E_i\Big) = \sum_i P(E_i)\ .$$

Dabei durchläuft der Index i je nach Fall eine endliche oder eine abzählbar unendliche Zahlenmenge.

4) Wenden wir das Axiom 3 auf den Fall von zwei Ereignissen $E_1 = E$ und $E_2 = F$ an, so erhalten wir gerade unsere alte Formel (**F**) zurück, die wir nun neu nummerieren:

Regel 4:	Wenn die Ereignisse E und F *unvereinbar* sind, dann gilt $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

Wir sprechen hier von einer “Regel” und nicht mehr von einem “Axiom”, denn diese Regel wurde aus den Axiomen hergeleitet.

(3.3.6) Herleitung von Rechenregeln aus den Axiomen

Wir haben weiter oben behauptet, dass die übrigen Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten ganz abstrakt aus den drei Axiomen hergeleitet werden können. Dies wollen wir nun tun. Dabei geht es vor allem darum, die Möglichkeiten der “axiomatischen Methode” vorzuführen. Diese Überlegungen sind also eher von theoretischem als von praktischem Interesse.

1. <u>Regel (**C**)</u>: $P(\varnothing) = 0$.

Wegen $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$ sind Ω und $\varnothing$ unvereinbar. Wegen Axiom 3 (bzw. der daraus folgenden Regel 4) ist dann $P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Nun ist aber $P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) = 1$ (letzte Gleichheit wegen Axiom 2), woraus folgt, dass $P(\varnothing) = 0$ ist.

2. <u>Regel (**D**)</u>: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

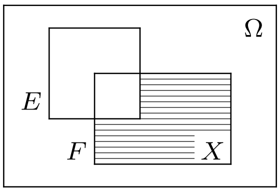
Es ist $E \cap \overline{E} = \varnothing$, denn E und $\overline{E}$ sind unvereinbar. Ferner ist $E \cup \overline{E} = \Omega$. Unter Anwendung von Axiom 3 (bzw. Regel 4) und von Axiom 2 folgt:

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E}) \ ,$$

woraus sich die Regel (**D**) sogleich ergibt.

3. <u>Regel (**E**)</u>: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Dieser Beweis ist etwas komplizierter. Wir setzen $X = F \backslash E$. Nach (26.2.d, im ersten Band) versteht man darunter die Menge aller Elemente aus F, welche nicht in E liegen. Die folgende Figur illustriert den Sachverhalt:



Man entnimmt ihr folgende Beziehungen:

(1) $$E \cup F = E \cup X \ ,$$

(1′) $$E \cap X = \varnothing \ ,$$

(2) $$F = (E \cap F) \cup X \ ,$$

(2′) $$(E \cap F) \cap X = \varnothing \ .$$

Wegen (1) und (1′) (bzw. (2) und (2′)) dürfen wir die Regel 4 auf $E \cup X$ (bzw. auf F) anwenden und finden

$$P(E \cup F) = P(E \cup X) = P(E) + P(X) \ ,$$

$$P(F) = P((E \cap F) \cup X) = P(E \cap F) + P(X) \ .$$

Subtraktion der linken bzw. der rechten Enden der Gleichungen liefert

$$P(E \cup F) - P(F) = P(E) + P(X) - P(E \cap F) - P(X) = P(E) - P(E \cap F) \ ,$$

woraus die Regel (**E**) sofort folgt, wenn wir noch $P(F)$ auf die rechte Seite bringen.

Wir nummerieren auch diese Regeln neu:

Regel 5:	$P(\varnothing) = 0$.
Regel 6:	$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ für alle Ereignisse E.
Regel 7:	$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ für alle Ereignisse E und F.

Von nun an werden wir im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten die Regeln 4–7 sowie natürlich auch die Axiome 1–3 unbesorgt verwenden. Weitere Regeln kommen in 3.4 und 3.5 hinzu. Beachten Sie in diesem Zusammenhang auch die Ausführungen im folgenden Abschnitt (3.3.7).

(3.3.7) Erläuterungen zum allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff

Unter einem Axiom versteht man in der Mathematik bekanntlich eine Aussage, aus der andere Aussagen ableitbar sind, die aber selbst nicht zu beweisen (wohl aber zu motivieren!) ist. In unserm Fall ist die Bedeutung der Axiome 1, 2, 3, wie schon erwähnt, die folgende: Man darf immer dann von Wahrscheinlichkeiten (im allgemeinen Sinn) sprechen, wenn jedem Ereignis E aus Ω eine Zahl $P(E)$ zugeordnet ist, derart, dass diese Axiome gelten. Die Zahl $P(E)$ heisst dann die *Wahrscheinlichkeit* von E, und P selbst kann als Abbildung interpretiert werden (vgl. (3.3.9)).

Das Entscheidende an dieser Betrachtungsweise ist, dass man die Wahrscheinlichkeit einfach durch ihre Grundeigenschaften (die in den Axiomen 1, 2, 3 ausgedrückt sind) charakterisiert und nicht etwa eine Methode (z.B. eine Formel) zu ihrer Berechnung angibt. Wie man in konkreten Einzelfällen (vgl. die Beispiele in (3.1.3)) vorgeht, ist irrelevant, solange der verwendete spezielle Wahrscheinlichkeitsbegriff die drei Axiome erfüllt.

Die gesamte weitere Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung baut auf diesen drei Axiomen auf. Dieses Vorgehen ist verhältnismässig abstrakt, hat aber den ganz wesentlichen Vorteil, dass sich die bisher betrachteten speziellen Wahrscheinlichkeitsbegriffe der neuen, allgemeinen Theorie unterordnen, denn sie erfüllen, wie man zeigen kann, die Axiome 1, 2, 3. Man kann somit die allgemeine Theorie auf diese Fälle anwenden. Beispielsweise ist man sicher, dass in allen diesen Fällen die Regeln 4, 5, 6, 7 gelten, denn diese folgen aus den Axiomen.

Umgekehrt kann man aber auch eine abstrakte Wahrscheinlichkeit bei Bedarf konkret interpretieren. In den Naturwissenschaften wird die Vorstellung der *idealisierten relativen Häufigkeit* besonders wichtig sein. Wenn also z.B. ein Ereignis E im abstrakten Sinne die Wahrscheinlichkeit 0.05 hat, dann kann man dies anschaulich so deuten, dass in 100 Wiederholungen des Experiments das Ereignis E etwa fünfmal auftreten wird.

(3.3.8) Zur Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei dieser Gelegenheit sei noch etwas über die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung gesagt: Sie lehrt, wie man mit Wahrscheinlichkeiten umgeht, wie man aus als bekannt vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten neue berechnet, wie man sie in Zusammenhang mit andern Begriffen bringt, usw. Es ist aber *nicht* ihre Aufgabe, die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten konkret zu bestimmen.

So ist es wohl allen klar, dass man aufgrund der Axiome 1, 2, 3 nichts über die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt (Beispiel 3.1.3.C) aussagen kann. Eine solche Wahrscheinlichkeit muss durch Beobachtungen (statistische Untersuchungen) ermittelt werden. Dagegen lassen sich aus bereits bekannten Wahrscheinlichkeiten neue berechnen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann z.B. Aussagen der folgenden Art machen: *Wenn* die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt gleich 0.513 ist, *dann* hat es in einer Familie mit fünf Kindern mit der Wahrscheinlichkeit 0.304 zwei Knaben und drei Mädchen. (Wie man das effektiv ausrechnet, werden Sie in Beispiel 4.2.3.B sehen.)

Es folgt auch nicht aus den Axiomen, dass beim Würfelspiel die Wahrscheinlichkeit einer Sechs gleich 1/6 ist. Um dieses Resultat zu erhalten, muss man — gewissermassen von aussen — die (berechtigte oder unberechtigte, es gibt ja verfälschte Würfel) Zusatzvoraussetzung machen, dass alle sechs möglichen Ergebnisse (genauer: Elementarereignisse) die gleiche Wahrscheinlichkeit haben (vgl. 3.4).

(3.3.9) Wahrscheinlichkeitsräume

In (3.3.5) sind wir von einem festen Ergebnisraum Ω ausgegangen und haben jedem Ereignis E eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zugeordnet, wobei die Axiome von Kolmogoroff erfüllt sein sollen. In diesem Fall nennt man Ω auch einen *Wahrscheinlichkeitsraum*. Mit diesem Namen will man betonen, dass nicht nur die Ergebnisse und Ereignisse interessieren, sondern auch — und vor allem — die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Es wurde auch schon erwähnt, dass man die Wahrscheinlichkeit P als Abbildung auffassen kann. Dies wollen wir noch etwas präzisieren: Dazu bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$ die Menge der Ereignisse aus dem Ergebnisraum Ω. Unter einer *Wahrscheinlichkeit auf* $\mathcal{E}$ versteht man nun eine Abbildung

$$P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}, \qquad E \mapsto P(E) \;,$$

so dass $P(E)$ die Axiome 1, 2, 3 erfüllt. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist somit genaugenommen durch die drei Objekte $\Omega, \mathcal{E}, P$ festgelegt. Hier hakt die allgemeine mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein.

An dieser Stelle sei noch auf eine gewisse Problematik hingewiesen, um die wir uns aber für unsere Bedürfnisse nachher nicht mehr zu kümmern brauchen: Ein Ereignis E ist definiert als Teilmenge von Ω, und jedem Ereignis soll eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ so zugeordnet werden, dass die Axiome 1, 2, 3 gelten. Wir haben uns nicht mit der Frage aufgehalten, ob so etwas überhaupt möglich sei. Solange Ω endlich oder abzählbar unendlich ist, kann man tatsächlich *jeder* Teilmenge von Ω in der gewünschten Weise eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Dies geht aber nicht mehr, wenn Ω überabzählbar unendlich (z.B. $\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = [a, b]$) ist. Man meistert in der weiterführenden Theorie diese Situation dadurch, dass man *nicht mehr jede* Teilmenge von Ω als Ereignis betrachtet. Man muss dann zusätzlich abklären, welche Mengen $\mathcal{E}$ von Ereignissen überhaupt in Frage kommen. An dieser Stelle sei aber auf die diesbezüglichen Einzelheiten verzichtet.

3.4. ENDLICHE WAHRSCHEINLICHKEITSRÄUME

(3.4.1) Überblick

Wenn ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω nur endlich viele Elemente enthält, dann gilt

Regel 8: *(3.4.2)*
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörigen Ergebnisse (genauer: der Elementarereignisse).

Ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω heisst ein *Laplace-Raum*, wenn er endlich ist und wenn jedes Ergebnis (genauer: jedes Elementarereignis) dieselbe Wahrscheinlichkeit hat. *(3.4.3)*

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E aus Ω die Formel der *"klassischen Wahrscheinlichkeit"* *(3.4.3)*

Regel 9:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \ .$$

Dabei bezeichnet $|E|$ die Anzahl der "günstigen Ergebnisse" (d.h., der Ergebnisse aus E), $|\Omega|$ die Anzahl der "möglichen Ergebnisse" (d.h., der Ergebnisse aus Ω).

Zur Berechnung von $|E|$ und $|\Omega|$ sind oft Methoden der *Kombinatorik* erforderlich. Ferner ist es in manchen Fällen einfacher, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{E}$ zu bestimmen und anschliessend die Regel 6 ($P(\overline{E}) = 1 - P(E)$) zu benützen. *Kap. 1* *(3.4.4.B)*

Etwas im Widerspruch zum Titel wird am Schluss noch kurz auf den Fall eingegangen, wo der Wahrscheinlichkeitsraum *abzählbar unendlich* ist. Hier gibt es die zu Regel 8 analoge Regel 10. *(3.4.5)*

(3.4.2) Beispiele von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Wenn ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω nur endlich viele Elemente (konkreter: Ergebnisse) enthält, dann nennt man ihn (wer hätte das gedacht) *endlich*. Beim Auflisten der Beispiele sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt. Wir beschränken uns auf einige harmlose Muster. Zuerst aber noch eine Vorbemerkung: Es sei $\omega \in \Omega$ ein Ergebnis. Gemäss den Axiomen von Kolmogoroff (3.3.5), die wir ja nun zugrunde legen wollen, kann man zunächst die Wahrscheinlichkeiten nur für Ereignisse, nicht aber für

Ergebnisse angeben. Will man aber doch von der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ω sprechen, so müsste man streng genommen das Ergebnis ω durch das Ereignis (Elementarereignis, vgl. (3.2.5,3.)) $\{\omega\}$ ersetzen und somit $P(\{\omega\})$ schreiben. Dies ist aber zu schwerfällig, so dass man lieber eine kleine Ungenauigkeit begeht und $P(\omega)$ verwendet. Nun zu den Beispielen.

<u>Beispiel 3.4.2.A</u> Würfeln

Hier ist

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} .$$

Ferner ist

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

(sofern der Würfel ehrlich ist). ⊠

<u>Beispiel 3.4.2.B</u> Geburten

Hier ist

$$\Omega = \{♀, ♂\}$$

mit (gemäss Beispiel 3.1.3.C) $P(♀) = 0.487, P(♂) = 0.513$. ⊠

<u>Beispiel 3.4.2.C</u>

Am nächsten Sonntag findet der traditionelle Fussballmatch zwischen dem FC Vordertal und dem SC Hinterberg statt. Ich interessiere mich für die drei Ausgänge

ω_1 : FCV gewinnt,
ω_2 : unentschieden,
ω_3 : SCH gewinnt.

Hier kann ich die Wahrscheinlichkeiten subjektiv (meinem Gefühl oder meiner Hoffnung entsprechend) festlegen (vgl. (3.1.4)), etwa so:

$$P(\omega_1) = 0.75, \quad P(\omega_2) = 0.2, \quad P(\omega_3) = 0.05 .$$ ⊠

Den Beispielen entnimmt man, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse (bzw. genauer aller Elementarereignisse) stets 1 ist. Dies entspricht zunächst sicher dem gesunden Menschenverstand. Interessant ist nun aber, dass diese Tatsache auch aus den Axiomen herleitbar ist (was letztlich einfach bestätigt, dass die Axiome vernünftig gewählt sind!):

Es sei nämlich

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

ein aus n verschiedenen Ergebnissen bestehender endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Die Elementarereignisse

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$$

sind sicher paarweise unvereinbar (vgl. dazu (3.2.7)). Ferner ist

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\} .$$

Aus den Axiomen 2 und 3 folgt dann

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) ,$$

d.h., die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten ist 1.

Mit derselben Überlegung lässt sich auch eine Formel für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses herleiten: Wenn z.B.

$$E = \{\omega_1, \omega_2\}$$

ist, dann gilt (weil $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}$ unvereinbar sind)

$$P(E) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}) = P(\omega_1) + P(\omega_2) .$$

Die allgemeine Formulierung dieses Sachverhalts wirkt etwas schwerfällig, weil wir "zweistöckige" Indizes verwenden müssen: Wenn

$$E = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_m}\}$$

aus m verschiedenen Ergebnissen besteht, dann gilt

$$P(E) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \ldots + P(\omega_{i_m}) .$$

Wir formulieren deshalb dieses Resultat lieber in Worten:

Regel 8:

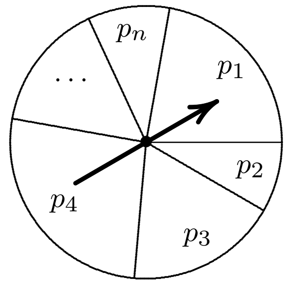
In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum Ω gilt:

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörigen Ergebnisse.

In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum genügt es also, die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ergebnisse zu kennen; die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse lassen sich dann durch Summation berechnen. Es sei hier darauf hingewiesen, dass für überabzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsräume dies nicht zu gelten braucht: Im Glücksspiel von Beispiel 3.1.3.F haben die einzelnen Ergebnisse (also die Punkte des Quadrats) alle die Wahrscheinlichkeit Null (vgl. (3.3.3,2.)), und erst die Ereignisse, die zu einem "richtigen Flächenstück" gehören, haben eine Wahrscheinlichkeit $\neq 0$. (Vielleicht verstehen Sie jetzt noch besser, warum die Axiome von Kolmogoroff für Ereignisse und nicht bloss für Ergebnisse formuliert worden sind.)

Wir werden dieses Verfahren sehr oft anwenden, deshalb genügt an dieser Stelle ein banales Beispiel: Im Fall des Fussballmatchs (Beispiel 3.4.2.C) ist $E = \{\omega_1, \omega_2\}$ das Ereignis "der FCV verliert nicht", welches die Wahrscheinlichkeit $P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = 0.75 + 0.2 = 0.95$ hat (was hoffentlich auch direkt einleuchtet).

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch erwähnt, dass sich ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum



$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

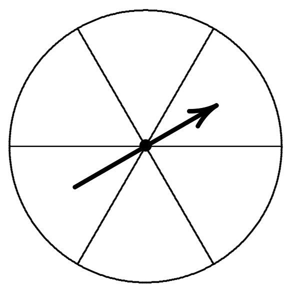
$$P(\omega_1) = p_1,\ P(\omega_2) = p_2,\ \ldots\ ,\ P(\omega_n) = p_n,\ \text{mit}\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\ ,$$

stets durch ein einfaches Modell, nämlich ein "Glücksrad" veranschaulichen lässt, welches in n Sektoren eingeteilt ist, deren Flächeninhalt proportional zu $p_1, \ldots, p_n$ ist.

(3.4.3) Laplace-Räume

Sehr häufig trifft man endliche Wahrscheinlichkeitsräume an, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Beispiele dazu sind etwa

- Münzenwurf,
- Würfelspiel,
- Roulette



(immer vorausgesetzt, dass die Spielgeräte unverfälscht sind), aber auch z.B. das zufällige Herausgreifen einer Versuchsperson aus einer Gruppe von Individuen. ("Zufällig" soll hier eben gerade bedeuten, dass jede Person dieselbe Chance hat, ausgewählt zu werden.)

Allgemein kann man sich ein Glücksrad (vgl. oben) vorstellen, das in n gleiche Sektoren aufgeteilt ist. Beispielsweise ist das nebenstehende Rad ein *Modell* für einen ausgewogenen Würfel (mit $n = 6$).

Da solche Wahrscheinlichkeitsräume häufig vorkommen, tragen sie einen besonderen Namen: Man nennt sie *Laplace-Räume**. Also:

> Ein Wahrscheinlichkeitsraum heisst ein *Laplace-Raum*, wenn er endlich ist und wenn jedes Ergebnis (bzw. genauer: jedes Elementarereignis) dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

* Nach P.S. de Laplace, 1749-1827.

Es schadet vielleicht nichts, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass die Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse nicht aus den Axiomen herleitbar ist. Vielmehr ist dies eine Zusatzinformation, die man aufgrund der Kenntnis des Zufallsexperiments zur Verfügung hat und sozusagen von aussen her eingibt. Wenn man etwa beim Würfelspiel oder beim Roulette von einem Laplace-Raum spricht, dann will man damit einfach ausdrücken, dass das Spielgerät unverfälscht sei.

In einem Laplace-Raum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ist, wie in jedem Wahrscheinlichkeitsraum, die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse gleich 1. Da aber zusätzlich alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, folgt daraus, dass gilt:

$$P(\omega) = \frac{1}{n}, \quad \text{für alle } \omega \in \Omega \,,$$

oder, etwas anders geschrieben,

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \,.$$

Wenn ein Ereignis E aus k Ergebnissen besteht, dann ist wegen Regel 8 seine Wahrscheinlichkeit die Summe der k einzelnen Wahrscheinlichkeiten, in Formeln also:

$$P(E) = \frac{k}{n} \,.$$

Wird wie in (3.3.4) die Abkürzung $|M|$ für die Anzahl der Elemente der Menge M benützt, so lautet die Formel

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \,.$$

Mit der üblichen Sprechweise

$|E|$: Anzahl der günstigen Fälle,

$|\Omega|$: Anzahl der möglichen Fälle,

erhält man die bekannte Regel:

Regel 9:

In einem Laplace-Raum gilt:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$$

oder kurz

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \,.$$

Nun ist diese Regel ja nicht neu; wir haben sie bereits in Beispiel 3.1.2.B und auch später verwendet. Wie ist ihr erneutes Auftauchen zu verstehen? Die Sache ist die: Bis jetzt wurde diese Formel ("klassische Wahrscheinlichkeit") ohne Begründung (der Anschauung entsprechend) benützt, wobei aber klar war, dass sie nicht in allen Fällen gebraucht werden konnte. In 3.3 war sie dann eine der *Motivationen* für die Axiome von Kolmogoroff. Jetzt aber — und das ist das Neue — lässt sich diese Formel *beweisen* und zwar unter Verwendung der Axiome von Kolmogoroff, zusammen mit der Zusatzvoraussetzung, dass ein Laplace-Raum vorliegt. Der Kreis hat sich also geschlossen.

Ebenso sollte nun völlig klar sein, dass die Formel $P(E) = |E|/|\Omega|$ *nur* in Laplace-Räumen gilt, also nur dann, wenn man von vornherein weiss oder annimmt, dass nur endlich viele Ergebnisse auftreten und dass alle gleich wahrscheinlich sind.

Die in der Regel 9 benötigte Anzahl der günstigen bzw. der möglichen Fälle kann in einfachen Situationen durch Auszählen ermittelt werden. In komplizierteren Fällen wird eine etwas höher entwickelte Form des Zählens verwendet, die Sie unter dem Namen *Kombinatorik* kennen. Die einfachen Resultate, die wir hier brauchen, werden als bekannt vorausgesetzt. Nötigenfalls finden Sie aber in Kapitel 1 eine kurze Einführung.

(3.4.4) Beispiele zur Wahrscheinlichkeit in Laplace-Räumen

Beispiel 3.4.4.A Zahlenlotto

Beim einem Lotto werden aus 45 Zahlen 6 gezogen. Da es auf die Reihenfolge nicht ankommt, gibt es hierfür

$$\binom{45}{6} = 8'145'060$$

Möglichkeiten. (Vgl. (1.5) für weitere Informationen, insbesondere zu den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.)

Wieviele Möglichkeiten gibt es für 4 richtige Zahlen? Man erzielt einen "Vierer", indem man 4 Zahlen aus den 6 richtigen und die übrigen 2 Zahlen aus den 39 falschen wählt. Fürs erste hat man $\binom{6}{4}$, fürs zweite $\binom{39}{2}$ Möglichkeiten. Dies ergibt total

$$\binom{6}{4}\binom{39}{2} = 11'115$$

Möglichkeiten.

In gleicher Weise überlegt man sich: Die Anzahl der Möglichkeiten für genau k richtige beträgt

$$\binom{6}{k}\binom{39}{6-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ .$$

Man erhält die folgenden Zahlen:

$k = 6$	1
$k = 5$	234
$k = 4$	11'115
$k = 3$	182'780
$k = 2$	1'233'765
$k = 1$	3'454'542
$k = 0$	3'262'623
total	8'145'060

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten brauchen wir nun die Formel der klassischen Wahrscheinlichkeit, also Regel 9. Nach der obigen Tabelle gibt es 8'145'060 mögliche Fälle. Davon sind günstig:

Für einen "Sechser": 1.

Für einen "Fünfer": 234, usw.

Damit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser zu

$$\frac{1}{8'145'060} = 0.000'000'122'8 \ .$$

Für einen Fünfer ist sie gleich

$$\frac{234}{8'145'060} = 0.000'028'729'1 \ .$$

Die weiteren Wahrscheinlichkeiten betragen (in Prozenten und gerundet):

$$\begin{array}{lr}
4 \text{ Richtige:} & 0.14\% \ , \\
3 \text{ Richtige:} & 2.24\% \ , \\
2 \text{ Richtige:} & 15.15\% \ , \\
1 \text{ Richtige:} & 42.41\% \ , \\
0 \text{ Richtige:} & 40.01\% \ .
\end{array}$$

⊠

Beispiel 3.4.4.B

Der Chevalier de Méré, ein Edelmann am Hof von Ludwig XIV., stellte dem Philosophen und Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662) folgendes Problem: Ist es wahrscheinlicher

a) bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu erreichen oder
b) bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erzielen?

Wir wollen nun die beiden Wahrscheinlichkeiten berechnen. Die Aufgabe ist ein schönes Beispiel dafür, dass es oft einfacher ist, statt einer bestimmten Wahrscheinlichkeit jene des Gegenereignisses ("Gegenwahrscheinlichkeit") zu bestimmen (3.2.6), (3.3.3).

Frage a):

Für die vier Würfe mit einem Würfel gibt es gemäss (1.6) oder (besser) dem gesunden Menschenverstand $6^4 = 1296$ Möglichkeiten. Alle sind gleich wahrscheinlich (sofern der Würfel nicht gefälscht ist), d.h., es liegt ein Laplace-Raum vor. Das gesuchte Ereignis

$$E: \text{ mindestens eine Sechs}$$

tritt ein, wenn 1, 2, 3 oder 4 mal eine Sechs geworfen wird. Wegen dieser vielen Fälle ist es einfacher, das Ereignis

$$\overline{E}: \text{ keine Sechs}$$

zu betrachten.

Günstig für $\overline{E}$ (also Ergebnisse, bei denen $\overline{E}$ eintritt) sind bei jedem Wurf die fünf Möglichkeiten: 1, 2, 3, 4, 5 Augen. Total gibt es also $5^4 = 625$ für $\overline{E}$ günstige Fälle. Es folgt

$$P(\overline{E}) = \frac{|\overline{E}|}{|\Omega|} = \frac{625}{1296} = 0.4823 ,$$

und nach Regel 6 ist $P(E) = 1 - 0.4823 = 0.5177$.

Frage b)

Bei einem Wurf mit zwei Würfeln gibt es 36 Möglichkeiten, bei 24 Würfen also (wegen (1.6)) 36^{24} mögliche Ergebnisse. Es sei

$$F: \text{ mindestens eine Doppelsechs,}$$
$$\overline{F}: \text{ keine Doppelsechs.}$$

Günstig für $\overline{F}$ sind bei jedem Wurf 35 Möglichkeiten. Da 24-mal geworfen wird, umfasst das Ereignis $\overline{F}$ total 35^{24} Fälle. Es folgt

$$P(\overline{F}) = \frac{|\overline{F}|}{|\Omega|} = \frac{35^{24}}{36^{24}} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.5086$$

und somit

$$P(F) = 1 - 0.5086 = 0.4914 .$$

Das in a) beschriebene Ereignis ist also etwas wahrscheinlicher als das Ereignis von b). ⊠

Beispiel 3.4.4.C

Wie oft muss man mit einem gewöhnlichen Würfel mindestens würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs mindestens 95% ist?

Die (vorläufig unbekannte) Anzahl der Würfe bezeichnen wir mit n. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt dann 6^n. Das Ereignis E: “mindestens eine Sechs” bedeutet “1, 2, ... oder n Sechsen”. Wie im Beispiel 3.4.4.B ersparen wir uns die Untersuchung all dieser verschiedenen Fälle, indem wir zum Gegenereignis $\overline{E}$: “keine

Sechs” übergehen. Dieses tritt ein, wenn in jedem Wurf eine der Augenzahlen 1 bis 5 (aber eben keine 6) auftritt. Dafür gibt es 5^n Möglichkeiten. Somit ist

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

Die Aufgabenstellung verlangt

$$P(E) \geq 0.95, \quad \text{also} \quad 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.95 .$$

Umgeformt ergibt dies

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.05 .$$

Um den Exponenten n zu bestimmen, nehmen wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus:

$$n \cdot \ln \frac{5}{6} \leq \ln 0.05 \quad \text{oder in Zahlen} \quad n \cdot (-0.1823) \leq -2.9957 .$$

Daraus folgt

$$n \geq 16.43 .$$

Hier ist zu beachten, dass bei der Division einer Ungleichung durch eine negative Zahl das Ungleichheitszeichen seine Richtung wechselt. Analog natürlich bei der Multiplikation (vgl. (26.7) im ersten Band).

Somit sind mindestens 17 Würfe erforderlich. ⊠

Beispiel 3.4.4.D

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich beim Schieber vier Bauern (Under) habe?

Ich erhalte 9 von den 36 Karten. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es dafür (vgl. (1.5)) $\binom{36}{9}$ Möglichkeiten. In wieviel Fällen habe ich vier Bauern? Wenn ich diese mal habe, dann bleiben noch 32 Karten (“Nicht-Bauern”) übrig, von denen ich noch 5 kriege. Dafür gibt es $\binom{32}{5}$ Möglichkeiten.

$$P(\text{vier Bauern}) = \frac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{9}} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}$$
$$= 0.00214$$ ⊠

Beispiel 3.4.4.E

Das folgende, rechnerisch sehr einfache Beispiel soll zeigen, dass umgangssprachliche Redewendungen wie “etwas geschieht zufällig” nicht immer präzis genug sind, um eindeutig in eine mathematische Formulierung umgesetzt werden zu können.

Links und rechts von einer Tür sind je zwei Kleiderhaken angebracht. Zwei Personen hängen ihre Mäntel zufällig (aber an verschiedene Haken) auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich die beiden Mäntel auf verschiedenen Seiten der Tür?

Lösung 1

Die erste Person hat vier Haken zur Auswahl, die zweite noch drei. Von diesen zwölf gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten sind vier ungünstig, nämlich die, wo beide ihre Mäntel links bzw. rechts aufhängen (in beiden Fällen gibt es je zwei Möglichkeiten, da die Mäntel vertauscht werden können). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher $8/12 = 2/3$.

Dieselbe Wahrscheinlichkeit kann auch durch andere — gleichwertige — Überlegungen gefunden werden:

– Von den vier Haken sind zwei zu belegen. Nach (1.5) geht dies auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten. Davon sind zwei ungünstig, vier günstig.
– Wenn die erste Person ihren Mantel aufgehängt hat, sind noch drei Haken frei; zwei davon sind günstig.

Lösung 2

Jede Person hat beide Seiten zur Auswahl. Es gibt vier gleich wahrscheinliche Möglichkeiten (nämlich links/links, links/rechts, rechts/links, rechts/rechts), von denen zwei günstig sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $2/4 = 1/2$.

Eine gleichwertige Überlegung: Wenn die erste Person ihren Mantel aufgehängt hat, dann hat die zweite immer noch zwei Möglichkeiten.

Auf den ersten Moment ist es störend und paradox, dass zwei verschiedene Ergebnisse herausgekommen sind. Wie ist dies zu erklären? In der Fragestellung wurde einfach gesagt, die Mäntel würden "zufällig" aufgehängt. Um die Aufgabe rechnerisch zu lösen, mussten wir nun dieses Wort interpretieren. Diese Interpretation wird in den beiden Fällen jeweils durch ein (sehr einfaches) Zufallsexperiment beschrieben.

Bei der Lösung 1 wählt jede Person zufällig einen Haken. Diese zufällige Auswahl könnte etwa dadurch realisiert werden, dass vier Zettel mit den Nummern 1 bis 4 verdeckt auf dem Tisch liegen und dass jede Person einen dieser Zettel auswählt.

Bei der Lösung 2 wählt jede Person zufällig eine Seite, etwa indem sie eine Münze wirft und bei "Kopf" die linke, bei "Zahl" die rechte Seite wählt.

Es ist nun aber klar, dass es sich hier um verschiedene Zufallsversuche handelt; deshalb dürfen wir uns auch nicht allzu sehr wundern, wenn die Ergebnisse verschieden ausfallen. Es ist müssig zu fragen, welche Lösung die richtige sei. Die Aufgabe ist eben so vage formuliert, dass verschiedene Antworten möglich sind. Erst wenn die Fragestellung dadurch präzisiert wird, dass der zugrunde liegende Zufallsmechanismus genau angegeben wird, ist eine eindeutige Antwort möglich.

In solchen Situationen spricht man von Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Probleme dieser Art treten auch in Fällen auf, die weniger leicht zu durchschauen sind als unser schlichtes Beispiel. ⊠

(3.4.5) Abzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsräume

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf den Fall eintreten, wo

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

abzählbar unendlich viele Ergebnisse umfasst. Führt man die Überlegung von (3.4.2) nochmals durch, wendet dabei aber das Axiom 3 in seiner "stärksten" (auf unendlich viele Ereignisse bezogenen) Form an, so erhält man ohne weiteres die Beziehung

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots = 1$$

oder, als (konvergente) unendliche Reihe geschrieben,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1 \ .$$

Ganz entsprechend verallgemeinert man die Regel 8 zu

Regel 10:
In einem abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum gilt: Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E ist die (endliche oder unendliche) Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörigen Ergebnisse.

Dabei ist eine "unendliche Summe" wie üblich als Reihe aufzufassen.

Beispiel 3.4.5.A

Wir werfen eine (unverfälschte) Münze so oft, bis erstmals "Kopf" erscheint, dann hören wir auf. Das Ergebnis des Versuchs sei die Anzahl der benötigten Würfe. Diese Anzahl kann (theoretisch) beliebig gross sein. Es ist sogar (aber wirklich bloss theoretisch, immerhin dürfen wir diese Möglichkeit in unserm Denkmodell nicht ausschliessen) denkbar, dass überhaupt nie "Kopf" eintritt. Dieses besondere Ergebnis bezeichnen wir mit ∞. Der Ergebnisraum hat dann die Form

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\} \ .$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse bestimmen:

1) $\omega = 1$: Hier ist $P(1) = 1/2$, denn für den ersten Wurf gibt es genau zwei mögliche Ausgänge: "Kopf" (K) oder "Zahl" (Z).
2) $\omega = 2$: Es ist $P(2) = 1/4$, denn für zwei aufeinanderfolgende Würfe gibt es vier gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, nämlich ZZ, ZK, KZ, KK, und nur die Folge ZK liefert das Ergebnis "2" (d.h., genau im 2. Wurf erscheint "Kopf").
3) $\omega = 3$: In gleicher Weise ergibt sich $P(3) = 1/8$, denn von den acht Möglichkeiten ZZZ, ZZK, ZKZ, ZKK, KZZ, KZK, KKZ, KKK ist nur ZZK günstig.

Allgemein sieht man nun ein, dass

$$P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ist. Die Summe dieser abzählbar unendlich vielen Wahrscheinlichkeiten beträgt

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Dies ist eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied 1/2 und dem Quotienten 1/2. Ihre Summe errechnet sich sofort zu 1 (vgl. z.B. (19.4) im ersten Band). Weiter oben haben wir gesehen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten *aller* Ereignisse = 1 sein muss. Wir erhalten

$$P(\infty) + \underbrace{P(1) + P(2) + \ldots}_{1} = 1 \, .$$

Es folgt, dass $P(\infty) = 0$ ist.

Wir haben also, ähnlich wie in (3.3.3), einen Fall vor uns, wo ein Ereignis zwar nicht unmöglich ist, aber trotzdem die Wahrscheinlichkeit Null hat.

Nun betrachten wir noch die zwei folgenden Ereignisse. (Da $P(\infty) = 0$ ist, brauchen wir das Ergebnis "∞" gar nicht zu berücksichtigen.)

a) $E = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Interpretation: Das gewünschte Resultat ("Kopf") ist nach einer ungeraden Anzahl von Würfen eingetroffen. Nach Regel 10 ist

$$P(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots = \frac{2}{3} \, .$$

(Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit Anfangsglied 1/2 und Quotient 1/4.)

b) $F = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

Interpretation: Das gewünschte Resultat ist nach einer geraden Anzahl von Würfen eingetroffen. Wir könnten wieder nach Regel 10 vorgehen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, zu beachten, dass F das Gegenereignis von $E \cup \{\infty\}$ ist. Wegen $P(\infty) = 0$ (und Regel 5) gilt also $P(F) = 1 - P(E) = 1/3$.

Vielleicht sind Sie etwas überrascht darüber, dass E und F nicht gleichwahrscheinlich sind. Die Sache erklärt sich aber leicht, wenn man bedenkt, dass das Ergebnis "1" eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit hat (nämlich $P(E) = 1/2$) und dass dieses Ergebnis zu E gehört. ⊠

Beachten Sie schliesslich auch, dass es in diesem Beispiel in keiner Weise möglich gewesen wäre, mit Formeln zu operieren, in denen — wie etwa in Regel 9 — Anzahlen vorkommen, ist doch hier sowohl die Anzahl der möglichen, als auch jene der günstigen Fälle unendlich. Dies zeigt erneut die Zweckmässigkeit unseres axiomatischen Aufbaus.

3.5. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

(3.5.1) Überblick

Wenn E und F zwei Ereignisse aus einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω sind, dann nennt man den Ausdruck

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

eine *bedingte Wahrscheinlichkeit.* Er gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Ereignis E eintritt, unter der Bedingung, dass F eingetreten ist. *(3.5.3)*

Dieser Begriff ist auch nützlich bei der Behandlung von *mehrstufigen Experimenten*, d.h., von Zufallsexperimenten, die aus mehreren nacheinander ausgeführten Einzelversuchen bestehen. Derartige Experimente werden zweckmässigerweise mit *Baumdiagrammen* dargestellt. *(3.5.6)*

Schliesslich geben wir noch eine formelmässige Umschreibung der anschaulichen Vorstellung der "Unabhängigkeit" von Ereignissen:

Zwei Ereignisse E und F sind *unabhängig*, wenn die folgende Beziehung (**Regel 11**) gilt: *(3.5.7)*

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) \ .$$

Diese Definition lässt sich auch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit in Beziehung bringen.

(3.5.2) Ein einleitendes Beispiel

Beispiel 3.5.2.A

Anlässlich einer Umfrage äusserten sich 1000 Personen darüber, ob sie für (F) oder gegen (G) ein bestimmtes Projekt waren. Gliedert man die Ergebnisse nach Altersgruppen (J: unter 25 Jahre, A: über 25 Jahre), so ergeben sich die folgenden Zahlen:

	F	G	total
J	260	140	400
A	240	360	600
total	500	500	1000

Im Gesamten beläuft sich der Anteil der befürwortenden Personen somit auf 50%, anders ausgedrückt: Ihre relative Häufigkeit beträgt 0.5 = 500/1000. Betrachtet man aber nur die Altersgruppe unter 25 Jahren, so ändert sich dieser Anteil: Die relative Häufigkeit ist jetzt $260/400 = 0.65$, d.h., 65% der "Jungen" sind für das Projekt.

Diese relativen Häufigkeiten lassen sich als Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Wir können aber auch den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff benützen. Dazu fassen wir die Menge der 1000 befragten Personen als unsern Ergebnisraum Ω auf. Das Zufallsexperiment besteht im willkürlichen Auswählen (z.B. Auslosen) einer Person. Da dabei jede Person dieselbe Chance hat, ausgewählt zu werden, liegt ein Laplaceraum im Sinne von (3.4.3) vor. Das Ereignis "Befürwortung" besteht dann einfach aus allen befürwortenden Personen und hat deshalb nach der üblichen Formel die Wahrscheinlichkeit $500/1000 = 0.5$.

Schränken wir uns aber von vornherein auf die Altergruppe "J" ein, so besteht der Ergebnisraum nur noch aus 400 Personen, von denen 260 zu den Befürwortern gehören, was eine Wahrscheinlichkeit von $260/400 = 0.65$ ergibt.

Die Wahrscheinlichkeit einer Befürwortung ändert sich also, wenn man von der Gesamtheit der befragten Personen zur Gruppe der unter 25-jährigen übergeht. Dies ist keineswegs unerwartet, und man darf sich nicht darüber wundern, dass hier zwei verschiedene Werte für die Wahrscheinlichkeiten auftreten, denn diese beziehen sich ja auf verschiedene Situationen.

Zur Verdeutlichung pflegt man die zweite der berechneten Wahrscheinlichkeiten (also die Wahrscheinlichkeit 0.65) als *bedingte Wahrscheinlichkeit* zu bezeichnen, denn sie wurde unter einer *Bedingung* bestimmt, nämlich der, dass man sich bloss noch auf die Personen unter 25 Jahren konzentriert, während für die zuerst bestimmte Wahrscheinlichkeit (0.5) keine einschränkende Bedingung vorliegt.

Um zu einer allgemeinen Formel für solche bedingten Wahrscheinlichkeiten zu gelangen, arbeiten wir mit der klassischen Wahrscheinlichkeit. Der Ergebnisraum Ω besteht also aus den 1000 befragten Personen. Zunächst interessieren uns folgende Ereignisse:

F: Die befragte Person ist für das Projekt.

G: Die befragte Person ist gegen das Projekt.

J: Die befragte Person ist jünger als 25 Jahre.

A: Die befragte Person ist älter als 25 Jahre.

Daneben sind auch die Durchschnitte ("sowohl als auch", vgl. (3.2.6)) von Bedeutung, z.B.

$F \cap J$: Die befragte Person ist weniger als 25 Jahre alt und für das Projekt,

etc.

Wir erhalten so die folgende Tabelle:

$F \cap J$	$G \cap J$	J
$F \cap A$	$G \cap A$	A
F	G	Ω

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnen sich zu*

$$P(F \cap J) = \frac{|F \cap J|}{|\Omega|} = \frac{260}{1000} = 0.26, \quad \text{etc.}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich in Tabellenform zusammenfassen:

0.26	0.14	0.4
0.24	0.36	0.6
0.5	0.5	1.0

Die bereits mehrfach erwähnte bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person aus der Gruppe "J" für das Projekt ist, wurde mit der Formel

$$\frac{|F \cap J|}{|J|} = \frac{260}{400} = 0.65$$

berechnet.

Für diese Wahrscheinlichkeit gebraucht man gewöhnlich die folgende Bezeichnung:

$$\boxed{P(F|J)\ ,}$$

gelesen als: "Die bedingte Wahrscheinlichkeit von F unter der Bedingung J". In unserem Beispiel ist also

$$P(F|J) = 0.65\ .$$

Es ist wichtig, die Wahrscheinlichkeiten $P(F \cap J)$ und $P(F|J)$ gut zu unterscheiden. Die erste bezieht sich auf das Ereignis, aus der gesamten Stichprobe von 1000 Personen jemanden auszuwählen, der "für das Projekt" und gleichzeitig "jung" ist. Die zweite dagegen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter den "Jungen" gewählte Person zu den Befürwortern gehört.

Wir berechnen nun noch die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine unter allen Befürwortern herausgegriffene Person zu den "Jungen" gehört. Sie bestimmt sich zu

$$P(J|F) = \frac{|J \cap F|}{|F|} = \frac{260}{500} = 0.52$$

und ist natürlich etwas anderes als $P(F|J)$.

* $|F \cap J|$ bezeichnet wie in (3.3.4) die Anzahl der Elemente in $F \cap J$.

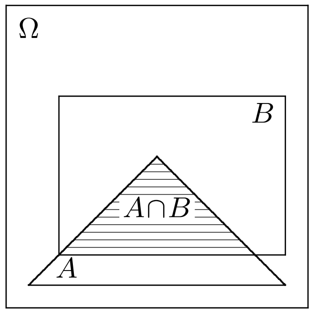
Schliesslich wollen wir eine Formel für $P(J|F)$ angeben, in der nur noch Wahrscheinlichkeiten vorkommen. Dazu erweitern wir einfach den Bruch mit $1/|\Omega|$,

$$P(J|F) = \frac{\frac{|J \cap F|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}} ,$$

und erhalten

$$P(J|F) = \frac{P(J \cap F)}{P(F)} .$$

(3.5.3) Die allgemeine Definition



Die obige Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit wurde für den Fall der klassischen Wahrscheinlichkeit hergeleitet. Sie kann aber auch für geometrische Wahrscheinlichkeiten bewiesen werden.

Wir stellen uns dazu eine etwas ungewöhnliche Zielscheibe vor. Die Wahrscheinlichkeiten $P(A), P(B)$ und $P(\Omega) = 1$ eines Treffers in die bezeichneten Teilstücke sind durch Flächeninhalte gegeben.

Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Dreieck A getroffen wurde unter der Voraussetzung, dass der Pfeil im Rechteck B landete? Die Figur zeigt, dass dies gleich dem Verhältnis der Flächeninhalte des schraffierten Dreiecks $A \cap B$ und des Rechtecks B ist, also

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Wir erhalten bis auf die Bezeichnungen dieselbe Formel wie am Schluss von (3.5.2).

Es ist deshalb vernünftig, diese Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit auch für den abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff zu verwenden, wie er in (3.3.5) mit den Axiomen von Kolmogoroff festgelegt wurde. In diesem abstrakten Rahmen lässt sich die Formel nicht beweisen, es handelt sich vielmehr um eine *Definition*. Natürlich muss noch der guten Ordnung halber vorausgesetzt werden, dass der auftretende Nenner $\neq 0$ ist. Man kommt so zu folgender Begriffsbildung:

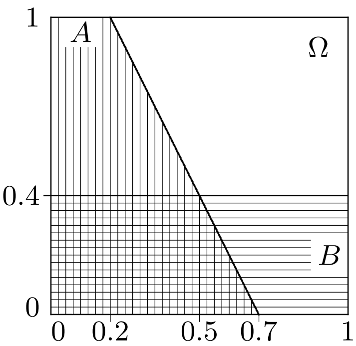
Es sei Ω ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und es seien E, F Ereignisse aus Ω mit $P(F) \neq 0$. Dann nennt man

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung F.*

Kürzer spricht man einfach von einer bedingten Wahrscheinlichkeit schlechthin.

Bevor wir weiterfahren, sollen noch einmal die verschiedenen Begriffsbildungen verglichen werden. Wir wählen dazu ein Beispiel mit geometrischen Wahrscheinlichkeiten.



Dargestellt ist der Ergebnisraum Ω mit zwei Ereignissen A (senkrecht schraffiert) und B (waagrecht schraffiert). Die schräge Gerade geht durch die Punkte mit den Koordinaten $(0.2, 1)$ und $(0.7, 0)$. Sie hat also die Steigung -2 und man stellt leicht fest, dass ihr Schnittpunkt mit der horizontalen Geraden die Koordinaten $(0.5, 0.4)$ hat. Damit lassen sich die Flächeninhalte, die hier Wahrscheinlichkeiten entsprechen, rasch bestimmen. Natürlich ist $P(\Omega) = 1$. Weiter ist $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.4$. Ferner ist $A \cap B$ das karierte Trapez; es ist $P(A \cap B) = 0.24$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist aber der Anteil von $A \cap B$ am Inhalt von B, d.h., sie ist gleich $P(A \cap B)/P(B) = 0.24/0.4 = 0.6$. Analog ist $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 0.24/0.45 = 0.5333$. Damit treten die Unterschiede zwischen den drei Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ und $P(B|A)$ nochmals klar zu Tage.

Bevor wir zu Beispielen übergehen, noch eine Bemerkung allgemeiner Art. Die Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(E|F)$ bedeutet, dass wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E aus Ω neu festlegen und zwar so, dass F nun die Wahrscheinlichkeit 1 und $\overline{F}$ die Wahrscheinlichkeit 0 hat*. Damit drücken wir aus, dass wir F als sicher betrachten. Warum wir dies tun, ist für die Rechnung irrelevant. Insbesondere braucht im Allgemeinen kein zeitlicher Zusammenhang zwischen F und den anderen Ereignissen vorzuliegen, auch wenn ein solcher in manchen Beispielen vorkommt (so etwa in 3.5.4.B oder 3.5.4.C, wo davon gesprochen wird, dass ein bestimmtes Ereignis bereits eingetreten sei).

Um die Tatsache zu betonen, dass wirklich eine Wahrscheinlichkeit, wenn auch eine "anders verteilte", vorliegt, schreiben manche Autoren $P_F(E)$ statt $P(E|F)$. Man kann zeigen, dass die auf der Menge aller Ereignisse von Ω definierte Abbildung $E \mapsto P_F(E)$ die Axiome von Kolmogoroff (3.3.5) erfüllt und somit tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit im abstrakten Sinn ist. Wir werden uns aber an die weiter verbreitete Bezeichnungsweise $P(E|F)$ halten.

(3.5.4) Beispiele zur bedingten Wahrscheinlichkeit

Wir illustrieren nun den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und die Anwendung der entsprechenden Formel an einigen Beispielen.

---

* In der Tat ist ja $P(F|F) = P(F \cap F)/P(F) = P(F)/P(F) = 1$ und $P(\overline{F}|F) = P(\overline{F} \cap F)/P(F) = P(\varnothing)/P(F) = 0$.

Beispiel 3.5.4.A

Beim Roulette erscheinen die Zahlen 0 bis 36 mit (so wollen wir wenigstens hoffen) derselben Wahrscheinlichkeit. Wir betrachten einige (in den Casinos unübliche) Ereignisse, nämlich E: die gespielte Zahl ist durch 2 teilbar, F: die gespielte Zahl ist durch 3 teilbar, G: die gespielte Zahl ist durch 6 teilbar. Gesucht ist a) $P(E|F)$, b) $P(F|E)$, c) $P(G|E)$, d) $P(E|G)$.

Es ist zu beachten, dass 0 durch alle Zahlen, also insbesondere durch 2, 3 und 6 teilbar ist*. Zunächst ist $|E| = 19$, denn E besteht aus den geraden Zahlen $0, 2, \ldots, 36$. Analog ist $|F| = 13$ und $|G| = 7$. Da eine Zahl genau dann durch 6 teilbar ist, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist $G = E \cap F$. Da G in E enthalten ist, ist $G \cap E = G$. Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir:

a) $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{7/37}{13/37} = \dfrac{7}{13} = 0.5385.$

b) $P(F|E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{7/37}{19/37} = \dfrac{7}{19} = 0.3684.$

c) $P(G|E) = \dfrac{P(G \cap E)}{P(E)} = \dfrac{7/37}{19/37} = \dfrac{7}{19} = 0.3684.$

d) $P(E|G) = \dfrac{P(G \cap E)}{P(G)} = \dfrac{7/37}{7/37} = \dfrac{7}{7} = 1.$

Da jede durch 6 teilbare Zahl auch gerade ist, tritt E sicher ein, wenn G eingetroffen ist. Dies erklärt unmittelbar die letzte Beziehung $P(E|G) = 1$. ⊠

Beispiel 3.5.4.B

Wir betrachten beim Würfelspiel die Ereignisse

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ F = \{4, 5, 6\},\ E \cap F = \{4, 5\}\ .$$

Nach den Regeln der klassischen Wahrscheinlichkeit (Regel 9) ist $P(E) = \frac{5}{6}$, $P(F) = \frac{3}{6}$, $P(E \cap F) = \frac{2}{6}$.

Nun würfelt mein Kollege und sagt mir, dass das Ereignis F eingetreten sei (im Klartext: "Ich habe mehr als drei Augen geworfen."). Wie gross ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung, dass F eingetroffen ist? Mit unserer Formel berechnet man sofort

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}\ .$$

Dies leuchtet auch direkt ein: Wenn F eingetreten ist, dann liegen 4 oder 5 oder 6 Augen. Bei 4 oder 5 Augen tritt auch E ein, bei 6 Augen nicht. Von den drei noch möglichen Fällen (4, 5, 6) sind zwei günstig, einer ist ungünstig. Nach den Regeln der klassischen Wahrscheinlichkeit ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit tatsächlich $= \frac{2}{3}$.

* Deshalb ist E nicht gleich dem Ereignis "pair" von (3.2.6), Illustration 2.

Nun nehmen wir noch das weitere Ereignis $G = \{3,4\}$ mit $P(G) = \frac{2}{6}$ hinzu. Dann ist $E \cap G = G$ und daher auch $P(E \cap G) = \frac{2}{6}$. Es folgt

$$P(E|G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{2/6}{2/6} = 1 \ .$$

Auch dieses Resultat verwundert nicht: Wenn nämlich G eintritt, dann tritt automatisch auch E ein, denn $G \subset E$. Das Eintreten von E unter der Bedingung G ist also sicher! (Vgl. Beispiel 3.5.4.A.) Dagegen berechnet sich $P(G|E)$ zu $\frac{2}{5}$. ☒

Beispiel 3.5.4.C

Dieses Beispiel ist von der Kombinatorik her etwas komplizierter, dafür aber (hoffentlich) auch lehrreich.

Der in Beispiel 3.5.4.A erwähnte Kollege macht auch beim Schieber mit, wo 36 Karten auf 4 Personen verteilt werden. Er ist etwas geschwätzig und verplappert sich gerne. Einmal sagt er, er habe eben ein Ass aufgenommen, ein zweites Mal ist er noch etwas präziser und plaudert aus, dass er das Rosen-Ass hat. Wie gross ist in den beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er noch mindestens ein weiteres Ass hat?

Gefragt ist also nach der bedingten Wahrscheinlichkeit dafür, dass mein Kollege K mindestens zwei Asse hat, vorausgesetzt,

a) dass er mindestens ein Ass hat,

b) dass er das Rosen-Ass hat.

Fall a)

Der Ergebnisraum Ω ist hier die Menge aller "Blätter" aus 9 Karten. Wie wir bereits in Beispiel 3.4.4.D gesehen haben, gibt es hierfür $\binom{36}{9}$ Möglichkeiten: $|\Omega| = \binom{36}{9}$. Weiter sei E das Ereignis "K hat mindestens ein Ass", F das Ereignis "K hat mindestens zwei Asse". Gesucht ist

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \ .$$

Wir berechnen zuerst $|E|$: Da es ausser den Assen 32 Karten gibt, gibt es $\binom{32}{9}$ Möglichkeiten für ein Blatt ganz ohne Ass. Um $|E|$ zu erhalten, ist diese Zahl von der Anzahl aller Möglichkeiten für ein Blatt zu subtrahieren:

$$|E| = \binom{36}{9} - \binom{32}{9} = 66'094'480 \ .$$

Nun bestimmen wir $|F|$. Diese Zahl erhalten wir, indem wir von $|E|$ die Anzahl der Fälle subtrahieren, in denen K genau ein Ass hat. Diese letztere Zahl wird so berechnet: K hat genau ein Ass, wenn er aus der Menge der 4 Asse *eine* Karte, aus der Menge der 32 "Nicht-Asse" aber *acht* Karten auswählt. Für's erste gibt es $\binom{4}{1} = 4$, für's zweite $\binom{32}{8}$, total also $4 \cdot \binom{32}{8} = 42'073'200$ Möglichkeiten*. Es folgt

$$|F| = |E| - 4 \cdot \binom{32}{8} \ .$$

Wegen $F \subset E$ (wenn man mindestens zwei Asse hat, dann hat man sicherlich mindestens ein Ass!) ist der Durchschnitt $F \cap E = F$. Nun setzen wir ein, was wir wissen. Gesucht ist ja $P(F|E)$.

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{P(F)}{P(E)} = \frac{|F|/|\Omega|}{|E|/|\Omega|} = \frac{|F|}{|E|}$$
$$= \frac{|E| - 4 \cdot \binom{32}{8}}{|E|} = 1 - \frac{4 \cdot \binom{32}{8}}{|E|} = 1 - \frac{42'073'200}{66'094'480} = 0.3634 \ .$$

* Dies ist im Prinzip genau dieselbe Überlegung wie beim Zahlenlotto (3.4.4.A).

Fall b)

Ω und F sind wie im Fall a) bestimmt. Gesucht ist nun aber

$$P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} ,$$

wobei G das Ereignis "K hat das Rosen-Ass" ist. Wenn K dieses Ass hat, dann gibt es für die restlichen acht Karten $\binom{35}{8}$ Möglichkeiten:

$$|G| = \binom{35}{8} .$$

Wie gross ist $|F \cap G|$? Die $\binom{35}{8}$ Fälle, wo K das Rosen-Ass hat, lassen sich in zwei Gruppen aufteilen:

1. K hat kein anderes Ass mehr.
2. K hat neben dem Rosen-Ass noch mindestens ein weiteres Ass. Dies ist gerade das Ereignis $F \cap G$.

Die Anzahl der Möglichkeiten in 1. lässt sich gut berechnen: In diesem Fall hat K nämlich neben dem Rosen-Ass 8 Karten aus der Menge der 32 "Nicht-Asse"; dafür gibt es $\binom{32}{8}$ Möglichkeiten. Für die Anzahl der Möglichkeiten in 2., also $|F \cap G|$, gilt daher

$$|F \cap G| = |G| - \binom{32}{8} .$$

Wir erhalten somit

$$P(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{\binom{35}{8}}{|\Omega|}, \quad P(F \cap G) = \frac{|G| - \binom{32}{8}}{|\Omega|} = \frac{\binom{35}{8} - \binom{32}{8}}{|\Omega|} .$$

Schliesslich finden wir für die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{\binom{35}{8} - \binom{32}{8}}{\binom{35}{8}} = 1 - \frac{\binom{32}{8}}{\binom{35}{8}} = \ldots = 0.5531 .$$

Das Ergebnis überrascht vielleicht etwas; im Fall b) beträgt die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein weiteres Ass etwa 55%, im Fall a) dagegen nur etwa 36%. Man darf aber nicht vergessen, dass es sich hier eben um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt, die unter verschiedenen Voraussetzungen berechnet wurden. ⊠

In solchen Fällen kann es hilfreich sein, ein ähnliches, aber einfacheres Problem zu betrachten, das besser überblickbar ist. Wir erfinden dazu ein Kartenspiel für zwei Personen mit nur vier Karten, nämlich mit Rosen-Ass (RA), Rosen-König (RK), Eichel-Ass (EA) und Eichel-König (EK). Jede Person erhält zwei Karten. Für meinen Kollegen K gibt es also $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, nämlich

1. {RA,EA}, 2. {RA,RK}, 3. {RA,EK}, 4. {RK,EA}, 5. {EA,EK}, 6. {RK,EK} .

Die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, zwei Asse zu haben, beträgt 1/6.

a) Wenn K nun sagt, er habe (mindestens) ein Ass, dann liegt einer der Fälle 1. bis 5. vor. Im Fall 1. hat er dann sogar beide Asse; die bedingte Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt somit 1/5.

b) Sagt K aber präziser, er habe das Rosen-Ass, so sind nur noch drei Möglichkeiten übrig, nämlich 1., 2. und 3. Die zugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit ist nun gleich 1/3.

(3.5.5) Die Produktformel

Die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

wird oft auch auf eine etwas andere Weise verwendet. Damit das Resultat schön herauskommt, vertauschen wir zunächst E und F. Wegen $E \cap F = F \cap E$ finden wir dann

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \ .$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man daraus sofort die so genannte *Produktformel*

$$\boxed{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) \ .}$$

Diese Formel ist deshalb nützlich, weil es oft vorkommt, dass die rechts stehenden Wahrscheinlichkeiten bekannt sind. Daraus kann dann die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts (d.h., des Ereignisses "E und F") berechnet werden. Beispiele hierzu folgen in (3.5.6).

Die Produktregel kann auf mehr als zwei Ereignisse erweitert werden. Wir betrachten dazu $P(E \cap F \cap G) = P\big((E \cap F) \cap G\big)$ und wenden die Produktformel zunächst auf die beiden Ereignisse $E \cap F$ und G an. Wir erhalten

$$P(E \cap F \cap G) = P(E \cap F) \cdot P(G|E \cap F) \ .$$

Für $P(E \cap F)$ kennen wir aber bereits die Produktformel. Durch Einsetzen erhalten wir die *erweiterte Produktformel*

$$\boxed{P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F|E) \cdot P(G|E \cap F) \ .}$$

Es sollte nun klar sein, wie die Formel für vier und mehr Ereignisse aussieht. Es sei aber darauf verzichtet, sie anzuschreiben.

Anwendungen der Produktformel werden, wie erwähnt, in (3.5.6) gegeben. Auch im folgenden Beispiel wird sie benützt:

<u>Beispiel 3.5.5.A</u>

Eine grosse Zahl von Samenkörnern wurde auf folgende Eigenschaften hin untersucht:

i) Auf die drei Farben braun (B), dunkelgrün (D), hellgrün (H).
ii) Auf die zwei Grössen gross (G), klein (K).

Durch Auszählen und Schätzen sind die folgenden (z.T. bedingten) Wahrscheinlichkeiten bestimmt worden:

$$P(B) = 0.3, \ P(D) = 0.5, \ P(G) = 0.6, \ P(D|G) = 0.3, \ P(H|G) = 0.2 \ .$$

Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(H)$, b) $P(D \cap G)$, c) $P(G|D)$, d) $P(B|G)$, e) $P(K|H)$.

a) Die Ereignisse B, D und H sind paarweise unvereinbar, und es ist $B \cup D \cup H = \Omega$. Somit ist $P(B) + P(D) + P(H) = P(\Omega) = 1$, woraus $P(H) = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2$ folgt. (Dies ist letzlich eine Anwendung von Axiom 3 [oder des gesunden Menschenverstandes].)

b) Es ist $P(D|G) = P(D \cap G)/P(G)$ oder $P(D \cap G) = P(D|G) \cdot P(G)$. Wir kennen $P(D|G) = 0.3$ sowie $P(G) = 0.6$ und finden* $P(D \cap G) = 0.18$.

c) Es ist $P(G|D) = P(D \cap G)/P(D) = 0.18/0.5 = 0.36$, wobei der in b) bestimmte Wert von $P(D \cap G)$ benützt wurde.

d) Auch unter der Bedingung, dass das Samenkorn gross (G) ist, ist es entweder braun (B), dunkelgrün (D) oder hellgrün (H). Es folgt, dass

$$(*) \qquad P(B|G) + P(D|G) + P(H|G) = 1$$

ist. Mit den gegebenen Werten finden wir $P(B|G) = 1 - P(D|G) - P(H|G) = 0.5$.

Die benützte Formel $(*)$ lässt sich auch abstrakt begründen: Es ist $(B \cap G) \cup (D \cap G) \cup (H \cap G) = G$, und die drei in Klammern gesetzten Durchschnitte sind paarweise unvereinbar. Es folgt $P(B \cap G) + P(D \cap G) + P(H \cap G) = P(G)$. Dividiert man durch $P(G)$, so erhält man die gewünschte Beziehung $P(B|G) + P(D|G) + P(H|G) = 1$.

e) Mit demselben Argument wie in d) ist $P(K|H) = 1 - P(G|H)$. Wir kennen zwar $P(G|H)$ nicht, wohl aber $P(H|G)$, und damit können wir wie in c) den Wert von $P(G|H)$ bestimmen: Es ist $P(H \cap G) = P(H|G) \cdot P(G) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$. Es folgt $P(G|H) = P(H \cap G)/P(H) = 0.12/0.2 = 0.6$. Damit wird $P(K|H) = 0.4$.

Man sieht ferner, dass $P(K|H) = P(K)$ ist. Daraus folgt, das H und K unabhängig sind (im Sinne von (3.5.7)). ⊠

(3.5.6) Mehrstufige Experimente

Besteht ein Zufallsexperiment aus mehreren nacheinander ausgeführten Einzelexperimenten, so spricht man von einem *mehrstufigen Experiment*. Die Ergebnisse lassen sich dann sehr anschaulich durch so genannte *Baumdiagramme* darstellen.

Beispiel 3.5.6.A

Drei Urnen U, V, W enthalten rote und weisse Kugeln wie folgt:

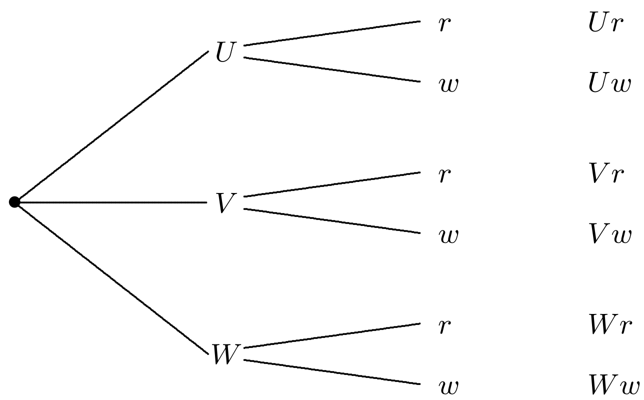
Urne U: 8 rote, 2 weisse,
Urne V: 3 rote, 7 weisse,
Urne W: 5 rote, 5 weisse.

* Es wäre falsch, $P(D \cap G) = P(D) \cdot P(G) = 0.3$ zu setzen, denn D und G sind nicht unabhängig. (Der Begriff “Unabhängigkeit” wird in (3.5.7) behandelt.)

Der Zufallsversuch besteht aus zwei Stufen:

1. Ich wähle zufällig eine der drei Urnen, indem ich einen ehrlichen Würfel werfe und mich bei den Augenzahlen 1, 2 oder 3 für die Urne U, bei 4 oder 5 für die Urne V und bei 6 schliesslich für die Urne W entscheide.
2. Ich entnehme der gewählten Urne zufällig eine Kugel.

Die folgende schematische Darstellung gibt den Vorgang übersichtlich wieder:



In der Figur sind die zur Wahl stehenden Objekte (Urne, Kugel) eingetragen, rechts sind in leicht verständlicher Abkürzung die sechs möglichen Ergebnisse angeschrieben. Diese bilden den Ergebnisraum Ω:

$$\Omega = \{Ur, Uw, Vr, Vw, Wr, Ww\} \ .$$

Die im 1. Schritt erfolgte Wahl der Urne U wird durch das Ereignis

$$U = \{Ur, Uw\}$$

beschrieben. Entsprechendes gilt für V und W.

Natürlich interessieren wir uns hauptsächlich für die Farbe der gewählten Kugel, also für die Ereignisse r (rot) und w (weiss):

$$r = \{Ur, Vr, Wr\}, \qquad w = \{Uw, Vw, Ww\} \ .$$

Es ist dann

$$\{Ur\} = U \cap r \quad \text{usw. (total 6 Fälle)} \ .$$

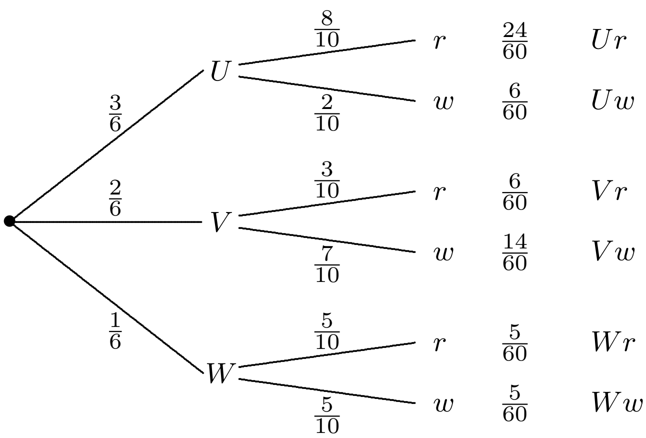
Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit von $\{Ur\}$? Hierzu benützen wir die in (3.5.5) angegebene Produktformel:

$$P(\{Ur\}) = P(U \cap r) = P(U) \cdot P(r|U) \ .$$

Dies ist deshalb eine gute Idee, weil wir die beiden rechts stehenden Wahrscheinlichkeiten kennen. Zunächst ist aufgrund der "Spielregel" $P(U) = 3/6 = 1/2$, $P(V) = 2/6 = 1/3$ und $P(W) = 1/6$. Die Zahl $P(r|U)$ lässt sich aber ebenfalls sofort berechnen: In der gewählten Urne U hat es 8 rote und 2 weisse Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist also $8/10$. (Hier und im Folgenden lassen wir der Einheitlichkeit halber die Brüche zunächst ungekürzt stehen.) Damit ergibt sich

$$P(\{Ur\}) = P(U \cap r) = P(U) \cdot P(r|U) = \frac{3}{6} \cdot \frac{8}{10} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}\ .$$

Die benützten Wahrscheinlichkeiten schreibt man am besten direkt ins Diagramm. Beachten Sie, dass die Berechnung von $P(\{Ur\})$ deshalb möglich ist, weil man $\{Ur\}$ als Durchschnitt von zwei Ereignissen $(U \cap r)$ darstellen und dann die Produktformel anwenden kann. Führt man die analoge Rechnung für die übrigen Ergebnisse durch, so erhält man die rechts aussen notierten einzelnen Wahrscheinlichkeiten.



Wie wir gesehen haben, wird die Farbe der gewählten Kugel durch die Ereignisse

$$r = \{Ur, Vr, Wr\} \quad \text{und} \quad w = \{Uw, Vw, Ww\}$$

beschrieben. Durch Addition findet man dann

$$P(r) = P(\{Ur\}) + P(\{Vr\}) + P(\{Wr\}) = \frac{24}{60} + \frac{6}{60} + \frac{5}{60} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}\ ,$$
$$P(w) = P(\{Uw\}) + P(\{Vw\}) + P(\{Ww\}) = \frac{6}{60} + \frac{14}{60} + \frac{5}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}\ .$$

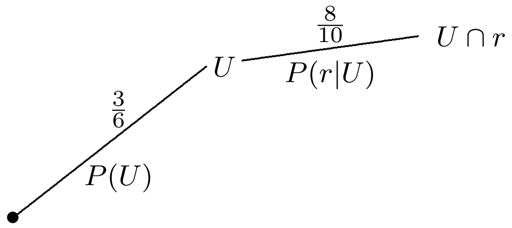
Mit dem Baumdiagramm kann man auch andere Fragen zur bedingten Wahrscheinlichkeit behandeln, wie etwa die folgende: Beim obigen Versuch sei eine weisse Kugel gezogen worden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie aus der Urne U stammt? Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(U|w) = \frac{P(U \cap w)}{P(w)}\ .$$

Wir haben die Wahrscheinlichkeiten rechts aber bereits bestimmt. Es gilt ja $P(U \cap w) = P(\{Uw\}) = 6/60 = 1/10, P(w) = 5/12$. Es folgt

$$P(U|w) = \frac{1/10}{5/12} = \frac{6}{25} \; . \qquad \boxtimes$$

Wir wollen uns nochmals allgemein überlegen, wie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten zusammenhängt und betrachten dazu den obersten Zweig:



Rechts aussen haben wir jetzt nicht mehr einfach r, sondern genauer $U \cap r$ hingeschrieben. Dieses Ereignis bedeutet im Klartext: Aus der Urne U wurde eine rote Kugel gewählt. Dies erlaubt uns, die Produktformel anzuwenden, wobei die Wahrscheinlichkeit von $U \cap r$ das Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf den Wegstücken ist, also $P(U \cap r) = P(\{Ur\}) = P(U) \cdot P(r|U)$. Dabei ist die 2. Wahrscheinlichkeit gerade die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis r (rote Kugel) eingetroffen ist, vorausgesetzt, das Ereignis U (Wahl von Urne U) sei zuvor eingetroffen.

Die weiter oben in Beispiel 3.5.6.A berechnete Wahrscheinlichkeit für $P(r)$ schreibt sich unter Verwendung des soeben angestellten Gedankengangs in der Form

$$P(r) = P(\{Ur\}) + P(\{Vr\}) + P(\{Wr\}) = P(U) \cdot P(r|U) + P(V) \cdot P(r|V) + P(W) \cdot P(r|W) \; .$$

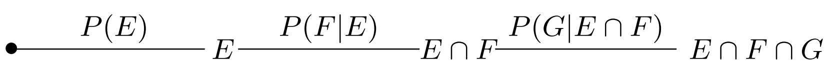
Eine analoge Formel ist als *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* bekannt: Schreibt man B statt r und ersetzt man die Ereignisse U, V, W durch n paarweise unvereinbare Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) > 0$ für alle i und $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, dann erhält man mit ganz analogen Überlegungen die Formel

$$\text{(A)} \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) \; .$$

Die im Beispiel 3.5.6.A ausführlich dargestellten Überlegungen funktionieren auch für Zufallsexperimente mit mehr als zwei Stufen: Jeder Knotenpunkt wird mit einem Ereignis identifiziert, und jede Wegstrecke wird mit der bedingten Wahrscheinlichkeit dafür angeschrieben, dass das “Endereignis” eintritt, vorausgesetzt, das “Anfangsereignis” habe stattgefunden:

Aufgrund der erweiterten Produktformel von (3.5.5) ist dann z.B.

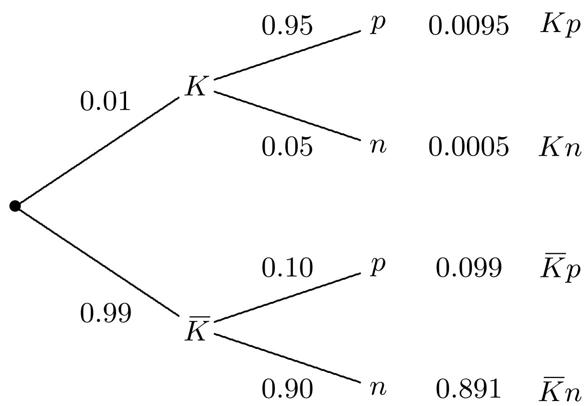
$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F|E) \cdot P(G|E \cap F) \; .$$



Beispiel 3.5.6.B

Wir nehmen an, 1% der Bevölkerung leide an einer gewissen Krankheit K. Nun gibt es einen Test, der bei vorhandener Krankheit (Ereignis K) mit 95% Wahrscheinlichkeit positiv (Ereignis p) reagiert, bei nicht vorhandener Krankheit ($\overline{K}$) aber mit 90% Wahrscheinlichkeit negativ (n). Jetzt wird der Test bei einer Person durchgeführt und geht positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person die Krankheit wirklich hat?

Wir zeichnen das Baumdiagramm und tragen die durch die Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten ein:



Die vier Wahrscheinlichkeiten rechts wurden wie vorher durch Multiplikation bestimmt. So ist zum Beispiel

$$P(\{Kp\}) = P(K \cap p) = P(K) \cdot P(p|K) = 0.01 \cdot 0.95 = 0.0095 ,$$

usw. Dabei ist $K = \{Kp, Kn\}$ das Ereignis “Krankheit vorhanden”, $p = \{Kp, \overline{K}p\}$ das Ereignis “Test fällt positiv aus”. Die Wahrscheinlichkeit für p findet man durch Addition:

$$P(p) = P(\{Kp\}) + P(\{\overline{K}p\}) = 0.0095 + 0.099 = 0.1085 .$$

Gesucht ist ja die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(K|p)$. Wir erhalten dafür (gerundet)

$$P(K|p) = \frac{P(K \cap p)}{P(p)} = \frac{0.0095}{0.1085} = 0.0876 .$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein der Krankheit ist also sehr klein, auch wenn der Test positiv ausgefallen ist. Dies liegt daran, dass zwar viele Leute diese Krankheit nicht haben, dass aber bei 10% davon der Test trotzdem positiv ausgeht. ⊠

Man kann die eben angestellten Überlegungen auch allgemein durchführen. Beachtet man nämlich, dass $P(K \cap p) = P(K) \cdot P(p|K)$ ist, so erhält die Formel für $P(K|p)$ die Gestalt

$$P(K|p) = \frac{P(K) \cdot P(p|K)}{P(p)} .$$

Schreiben wir allgemein B (mit $P(B) > 0$) statt p und A_k statt K, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbare Ereignisse mit $P(A_k) > 0$ für alle k sind, so lautet dieselbe Formel nun

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(B)} \;.$$

Wegen der weiter oben hergeleiteten Beziehung (A) können wir $P(B)$ anders schreiben. Der resultierende Ausdruck

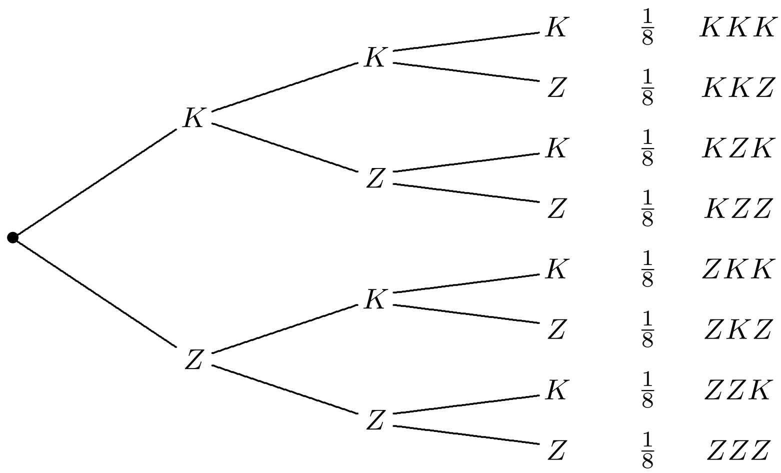
$$\text{(B)} \qquad P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

heisst die *Formel von Bayes**. Ihre Bedeutung liegt darin, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_k|B)$ aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$ und den “unbedingten” Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ bestimmt werden kann.

Beachten Sie aber, dass wir in Beispiel 3.5.6.B das Resultat ohne Verwendung der Formel von Bayes durch direkte Überlegung am Baumdiagramm erhalten haben. Man kann in einfacheren Fällen also ohne weiteres ohne diese Formel auskommen.

Beispiel 3.5.6.C

Ein einfaches Beispiel eines “dreistufigen” Versuchs ist der dreimalige Münzenwurf, zu dem das folgende Baumdiagramm gehört:



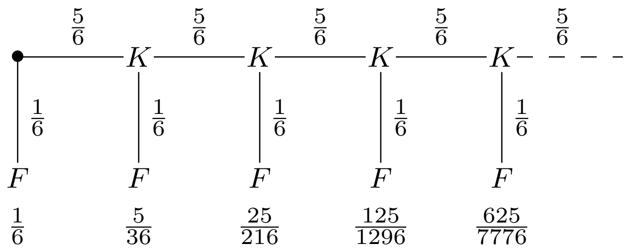
Hier ist jede Einzelwahrscheinlichkeit $= 1/2$, die Wahrscheinlichkeiten der 8 Ergebnisse sind dann $= (1/2)^3 = 1/8$, was sich auch daraus ergibt, dass alle acht Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. ⊠

Beispiel 3.5.6.D

Baumdiagramme können auch unendlich sein. Wir nehmen das Beispiel 3.2.3.C (Eile mit Weile) wieder auf, diesmal soll aber (notfalls bis in alle Ewigkeit) gewürfelt werden, bis eine Fünf erscheint. Die Wahrscheinlichkeit für eine Fünf ist (bei einem

* Benannt nach Thomas Bayes, 1702–1761.

ehrlichen Würfel) natürlich 1/6, das Gegenereignis hat die Wahrscheinlichkeit 5/6. Man erhält das folgende Diagramm, in welchem F für "eine Fünf" und K für "keine Fünf" steht.



Die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass die erste Fünf im Wurf Nummer k fällt, ist daher durch die folgende Tabelle gegeben:

k	1	2	3	4	$\dots$	k	$\dots$
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$	$\dots$	$\frac{5^{k-1}}{6^k}$	$\dots$

Wir können noch die Summe der Wahrscheinlichkeiten $p_k,\ k = 1, 2, 3, \dots$ berechnen. Es handelt sich um eine unendliche Reihe und zwar genauer um eine geometrische Reihe mit Anfangsglied $\frac{1}{6}$ und Quotient $\frac{5}{6}$:

$$\frac{1}{6}\Big(1 + \big(\frac{5}{6}\big) + \big(\frac{5}{6}\big)^2 + \big(\frac{5}{6}\big)^3 + \big(\frac{5}{6}\big)^4 + \dots\Big) = \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\Big) = 1\ .$$

Hier wurde die bekannte Summenformel für die geometrische Reihe verwendet (siehe z.B. (19.4.a) im ersten Band). Die Summe ergibt, wie es sein muss, 1 (vgl. auch (3.4.5)).

(3.5.7) Unabhängige Ereignisse

Der Begriff der *Unabhängigkeit* von zwei Ereignissen hat eine anschauliche Bedeutung: Wenn ich etwa eine Münze zweimal hintereinander werfe, dann ist das Ergebnis des zweiten Wurfs völlig unabhängig vom Ausgang des ersten Wurfs, denn die Münze hat ja kein Gedächtnis. Noch etwas extremer: Auch wenn ich zehnmal hintereinander "Kopf" geworfen habe, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch beim elften Mal "Kopf" erscheint, eben immer noch gleich 1/2 — auch wenn dies manchen Leuten nicht recht einleuchtet.

Wir müssen nun diesen Sachverhalt in eine mathematische Formel umsetzen. Dazu betrachten wir zuerst ein Beispiel, das uns dann auf die gewünschte Formel führt. Anschliessend werden wir auch noch sehen, wie der Begriff der *Unabhängigkeit* mit der *bedingten Wahrscheinlichkeit* zusammenhängt.

Beispiel 3.5.7.A

In einem Betrieb sind 70% der Beschäftigten Männer, 30% Frauen. Weiter seien 60% aller (männlichen und weiblichen) Beschäftigten weniger als 40 Jahre alt, die restlichen 40% sind dann logischerweise älter als 40 Jahre.

In dieser Situation besteht der Ereignisraum Ω aus allen Mitarbeiter(inne)n des Betriebs. Das zugehörige Zufallsexperiment besteht darin, eine Person zufällig auszuwählen (z.B. auszulosen). Mit M, W, J, A bezeichnen wir die Ereignisse "männlich", "weiblich", "jünger als vierzig", "älter als vierzig". Für diese Ereignisse gelten dann die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(M) = 0.7,\ P(W) = 0.3,\ P(J) = 0.6,\ P(A) = 0.4\ .$$

Wir wollen nun annehmen, die Altersstruktur sei (im anschaulichen Sinne) unabhängig vom Geschlecht. Dies bedeutet aber einfach, dass sowohl unter den Männern als unter den Frauen jeweils 60% jünger als vierzig sind. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, einen "jungen" Mann auszuwählen? Da nach der eben getroffenen Annahme 60% aller Männer "jung" sind, müssen wir 60% von den 70% nehmen, das sind 42%. Rechnen wir wie für die Theorie üblich nicht mit Prozenten, sondern mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1, so finden wir

$$P(M \cap J) = P(M) \cdot P(J) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42\ .$$

Unsere Annahme, die Altersstruktur sei unabhängig vom Geschlecht, hätten wir übrigens auch auf eine zweite Art in eine Formel umsetzen können: Von den 60% "Jungen" müssen 70% Männer sein (derselbe Prozentsatz wie für die gesamte Belegschaft). Dies führt ebenfalls auf eine Wahrscheinlichkeit von 42% für das Ereignis $M \cap J$.

Auf genau dieselbe Weise berechnet man die andern Wahrscheinlichkeiten. So ist etwa

$$P(W \cap A) = P(W) \cdot P(A) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12\ .$$

Diese Zahlen lassen sich genau wie in (3.5.2) in Tabellenform darstellen:

	M	W	total
J	0.42	0.18	0.60
A	0.28	0.12	0.40
total	0.70	0.30	1.00

Wir sehen: Die Wahrscheinlichkeit von $E \cap F$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl E als auch F eintritt, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten von E und von F, *vorausgesetzt, dass E und F unabhängig sind.* ⊠

Wir haben die Formel $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ aufgrund einer konkreten Situation hergeleitet, wo der anschauliche Begriff der Unabhängigkeit rechnerisch einfach umgesetzt werden konnte. Dieses Beispiel motiviert nun die folgende Definition, die für ganz beliebige Wahrscheinlichkeiträume gelten soll:

Zwei Ereignisse E und F heissen *unabhängig*, falls gilt

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) .$$

Statt des Begriffs "unabhängig" benützen manche Autoren die präzisere Bezeichung "stochastisch unabhängig"*.

Bei dieser Gelegenheit sei gleich betont, dass man die Begriffe "Unabhängigkeit" und "Unvereinbarkeit" keinesfalls verwechseln darf. E und F heissen ja unvereinbar, wenn $E \cap F = \varnothing$ ist, siehe (3.2.7). In diesem Fall kann die obige Formel $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ also nicht gelten (ausser im Sonderfall, wo $P(E)$ oder $P(F) = 0$ ist), d.h., unvereinbare Ereignisse sind i. Allg. *nicht* unabhängig. Weiter gilt für unvereinbare Ereignisse bekanntlich eine Formel für die Vereinigung $P(E \cup F)$, nämlich $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, wogegen für unabhängige Ereignisse eine Formel für den Durchschnitt $P(E \cap F)$ besteht.

Es ist ferner bemerkenswert, dass die Unvereinbarkeit zweier Ereignisse E und F auch ohne Kenntnis der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nachgeprüft werden kann (es ist ja nur zu kontrollieren, ob der Durchschnitt $E \cap F$ leer ist), während zum Nachweis der Unabhängigkeit die Wahrscheinlichkeiten selber eine Rolle spielen.

Die Definition der Unabhängigkeit (und mit ihr die Formel), kann auf zwei Arten gebraucht werden:

1) Aus der Problemstellung (z.B. Würfel- oder Münzenwurf) weiss man von vornherein, dass die Ereignisse im anschaulichen Sinn unabhängig sind. Dies übersetzt man dadurch in die Theorie, dass man die oben stehende Formel anwendet. Wenn man also $P(E)$ und $P(F)$ kennt, so lässt sich daraus $P(E \cap F)$ bestimmen. (Siehe Beispiele 3.5.8.A und 3.5.8.B.) In diesem Fall ist die Formel eine Rechenregel, nämlich die *Multiplikationsregel*:

Regel 11:

Wenn die Ereignisse E und F unabhängig sind, dann gilt

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) .$$

* Unter dem Begriff "Stochastik" fasst man die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik zusammen.

2) Man kennt alle drei Wahrscheinlichkeiten $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cap F)$ und kann damit kontrollieren, ob E und F unabhängig sind. (Siehe Beispiele 3.5.8.C und 3.5.8.D.)

Wir zeigen nun noch einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Begriffen "Unabhängigkeit" und "bedingte Wahrscheinlichkeit" auf.

Wenn E und F unabhängig sind, wenn also

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) \tag{1}$$

ist, dann gilt offenbar (für $P(F) \neq 0$)

$$P(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \; . \tag{2}$$

Nun ist aber die rechte Seite gerade gleich $P(E|F)$. Für unabhängige Ereignisse E und F gilt daher

$$P(E) = P(E|F) \; . \tag{3}$$

Dividiert man (1) durch $P(E)$ statt durch $P(F)$, so erhält man analog die Beziehung

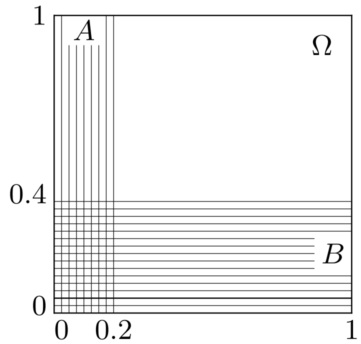
$$P(F) = P(F|E) \; . \tag{4}$$

Umgekehrt folgt aus (3) durch Multiplikation der gleichwertigen Formel (2) mit $P(F)$ wiederum die ursprüngliche Formel (1). Die Aussage (3) (und entsprechend die Aussage (4)) ist also einfach eine andere Art, die Unabhängigkeit von E und F auszudrücken.

In Worten bedeutet (3): Die Wahrscheinlichkeit von E hängt nicht davon ab, ob die Bedingung F erfüllt ist oder ob nichts über F vorausgesetzt wird. Da dies auch anschaulich eine durchaus einleuchtende Beschreibung der Idee der Unabhängigkeit ist, wird die Formel (3) oft zur *Definition* dieses Begriffs verwendet*.

Die verschiedenen Beziehungen kann man sich am nachstehenden Beispiel mit geometrischen Wahrscheinlichkeiten klar machen (vgl. auch eine ähnliche Situation in (3.5.3)).

Durch Vergleich der Flächeninhalte stellt man folgende Beziehungen fest:



$$P(A) = 0.2,\; P(B) = 0.4,\; P(A \cap B) = 0.08 \; .$$

Somit sind A und B unabhängig. Weiter folgt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.08}{0.4} = 0.2 \; ,$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 \; .$$

* Ein kleiner Nachteil dieses Zugangs ist allerdings der, dass die Formel (3) a priori nicht symmetrisch in Bezug auf E und F ist. Der Übergang von (3) zu (1) liefert aber sogleich eine symmetrische Aussage.

Es gilt also, wie es gemäss (3) sein muss, $P(A) = P(A|B)$ und $P(B) = P(B|A)$. Weiter liest man ab, dass

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.12 = 0.2 \cdot 0.6 = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

ist. Dies illustriert übrigens die erste Formel von Beispiel 3.5.8.E; die andern könnten analog behandelt werden.

(3.5.8) Beispiele zur Unabhängigkeit

Beispiel 3.5.8.A

Ein ganz einfaches Beispiel ist der zweimalige Münzenwurf. Mit E bezeichnen wir das Ereignis "beim ersten Mal Kopf", mit F das Ereignis "beim zweiten Mal Zahl". Natürlich ist $P(E) = P(F) = \frac{1}{2}$ und da die beiden Ereignisse sicher im anschaulichen Sinn unabhängig sind, verwenden wir die Regel 11 — dies ist die weiter oben beschriebene "Art 1)" der Anwendung — und finden $P(E \cap F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. $E \cap F$ bedeutet dann "erster Wurf Kopf, zweiter Wurf Zahl".

Dieses Beispiel kann noch anders behandelt werden: Der Sachverhalt wird durch den Laplace-Raum $\Omega = \{KK,\ KZ,\ ZK,\ ZZ\}$ beschrieben. Dabei ist $E = \{KK,\ KZ\}$, $F = \{KZ,\ ZZ\}$ und $E \cap F = \{KZ\}$. Auf diese Weise stellt man direkt fest, dass $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ ist. Man kann nun den Spiess umdrehen und aus diesem Ergebnis — im Sinne von "Art 2)" der Anwendung — zurückschliessen, dass E und F unabhängig sein müssen. Bei der ersten Rechnung hatten wir dies von vornherein angenommen. ⊠

Beispiel 3.5.8.B

An meinem Bahnhof fährt der Zug mit 10% Wahrscheinlichkeit zu spät ab, und ich komme mit 20% Wahrscheinlichkeit zu spät. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug mit mir an Bord pünktlich abfährt?

E sei das Ereignis "Zug zu spät", F bedeute "ich bin zu spät". Das gesuchte Ereignis findet statt, wenn weder E noch F eintrifft, oder — was hier sinnvoll ist — mit Gegenereignissen ausgedrückt, wenn sowohl $\overline{E}$ als auch $\overline{F}$, d.h., wenn $\overline{E} \cap \overline{F}$ eintritt. Es ist klar, dass hier die beiden Ereignisse $\overline{E}$ und $\overline{F}$ unabhängig sind (übrigens auch E und F, was anschaulich einleuchtet, aber auch rechnerisch gezeigt werden kann, vgl. Beispiel 3.5.8.E). Somit gilt $P(\overline{E} \cap \overline{F}) = P(\overline{E}) \cdot P(\overline{F}) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 72% fährt also der Zug mit mir als Passagier pünktlich ab. ⊠

Beispiel 3.5.8.C

Wir betrachten das Zahlenmaterial aus dem Beispiel 3.5.2.A. F (bzw. J) bezeichnete damals das Ereignis "die befragte Person ist für das Projekt (bzw. jünger als 25 Jahre)". Wir stellten unter anderem folgendes fest:

$$P(F) = 0.5, \quad P(J) = 0.4, \quad P(F \cap J) = 0.26\ .$$

Hier ist $P(F \cap J) \neq P(F) \cdot P(J)$, was bedeutet, dass die beiden Ereignisse nicht unabhängig sind: Zustimmung bzw. Ablehnung des Projekts hängt von der Altersgruppe ab.

Wir können auch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit operieren: Wegen $P(F|J) = P(F \cap J)/P(J) = 0.26/0.4 = 0.65 \neq 0.5 = P(F)$ folgt erneut, dass F und J nicht unabhängig sind (vgl. Formel (3) in (3.5.7)). ⊠

Diese Schlussfolgerung bezieht sich zunächst nur auf die Gruppe der 1000 befragten Personen. Es ist Sache der beurteilenden Statistik, zu untersuchen, wieweit man daraus Schlüsse in Bezug auf die Gesamtbevölkerung ziehen darf, vgl. (9.4.5).

Im Beispiel 3.5.7.A haben wir — in einer ähnlichen Situation — den Fall vor uns, wo Unabhängigkeit vorliegt.

Beispiel 3.5.8.D

Wir werfen eine Münze dreimal hintereinander. Mit E, F, G bezeichen wir der Reihe nach die Ereignisse "der erste Wurf ist Kopf", "der zweite Wurf ist Kopf", "es werden genau zwei Köpfe hintereinander geworfen". Wie steht es mit der Unabhängigkeit? Mit

$$\Omega = \{KKK,\ KKZ,\ KZK,\ KZZ,\ ZKK,\ ZKZ,\ ZZK,\ ZZZ\}$$

ist

$$E = \{KKK,\ KKZ,\ KZK,\ KZZ\}, \quad F = \{KKK,\ KKZ,\ ZKK,\ ZKZ\}\ ,$$
$$G = \{KKZ,\ ZKK\}\ .$$

Weiter ist

$$E \cap F = \{KKK,\ KKZ\}, \quad E \cap G = \{KKZ\}, \quad F \cap G = \{KKZ,\ ZKK\}\ .$$

Durch Abzählen findet man sofort die Beziehungen

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= \frac{1}{4} = P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ , \\ P(E \cap G) &= \frac{1}{8} = P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\ , \\ P(F \cap G) &= \frac{1}{4} \neq P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\ . \end{aligned}$$

Somit sind E und F sowie E und G unabhängig, nicht aber F und G. Dies ist gefühlsmässig vielleicht nicht mehr ohne weiteres klar. Beachten Sie aber, dass beim Eintreffen von G der zweite Wurf zwingend "Kopf" sein muss. Nun erstaunt es weniger, dass F und G abhängig sind.

Es ist nicht immer einfach, die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen gefühlsmässig einzuschätzen, und man ist dann auf die Rechnung angewiesen. Manchmal hilft aber der Miteinbezug von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Im obigen Beispiel ist

$$P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \neq P(F) = \frac{1}{2}\ ,$$

und diese Ungleichheit sagt Ihnen, dass F und G nicht unabhängig sind. Noch etwas anders formuliert: Nehmen wir an, Sie müssten auf das Ereignis F (zweiter Wurf Kopf) wetten. Wenn Ihnen nun ein hilfreicher Geist zuflüstert, es seien genau zwei Köpfe hintereinander gefallen, dann sind Sie sicher, dass jedenfalls der zweite Wurf "Kopf" war, und Sie können beruhigt Ihr ganzes Vermögen einsetzen. Ohne diese Zusatzinformation sollten Sie dies vielleicht besser nicht tun, denn die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit für F ist nur gleich 50%. Etwas abstrakter ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit von F hängt davon ab, ob G eingetroffen ist oder nicht, und diese Ereignisse sind daher nicht unabhängig. ⊠

Beispiel 3.5.8.E

Eine allgemeine Aussage: Wenn E und F unabhängige Ereignisse sind, dann sind auch die Ereignispaare a) E und $\bar{F}$, b) $\bar{E}$ und F, c) $\bar{E}$ und $\bar{F}$ unabhängig.

a) Wie man z.B. anhand einer Skizze einsieht, gilt

$$(E \cap \bar{F}) \cup (E \cap F) = E, \quad (E \cap \bar{F}) \cap (E \cap F) = \varnothing \,.$$

Nach Regel 4 von (3.3.6) ist somit $P(E) = P(E \cap \bar{F}) + P(E \cap F)$. Weil E und F nach Voraussetzung unabhängig sind, gilt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Es folgt $P(E) = P(E \cap \bar{F}) + P(E) \cdot P(F)$ oder $P(E) \cdot (1 - P(F)) = P(E \cap \bar{F})$. Wegen Regel 6 (3.3.6) erhalten wir schliesslich $P(E) \cdot P(\bar{F}) = P(E \cap \bar{F})$, was bedeutet, dass E und $\bar{F}$ unabhängig sind.

b) Dies folgt durch Vertauschen der Rollen von E und F.

c) Wenn E und F unabhängig sind, dann sind dies wegen a) auch E und $\bar{F}$. Wir betrachten nun das Paar E, $\bar{F}$ und wenden darauf b) an, woraus sich die Behauptung c) ergibt. ⊠

(3.5.9) Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Der Begriff der Unabhängigkeit lässt sich auch für mehr als zwei Ereignisse erklären. Man setzt dazu folgendes fest:

Die Ereignisse $E_1,\ E_2, \ldots, E_n$ heissen *unabhängig*, wenn für je m Ereignisse

$$E_{k_1},\ E_{k_2},\ \ldots,\ E_{k_m}\ ,$$

wobei m eine natürliche Zahl mit $2 \le m \le n$ und $\{k_1, \ldots, k_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ ist, stets gilt

$$P(E_{k_1} \cap E_{k_2} \cap \ldots \cap E_{k_m}) = P(E_{k_1}) \cdot P(E_{k_2}) \cdot \ldots \cdot P(E_{k_m})\ .$$

Die (unumgängliche) Verwendung von "Doppelindizes" soll am Spezialfall für $n = 3$ klar gemacht werden. Hier heissen die Ereignisse $E_1,\ E_2,\ E_3$ unabhängig, falls gilt

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)\ ,$$

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)\ ,$$

$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)\ ,$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)\ .$$

Hinweis

Man kann Beispiele angeben, die zeigen, dass es für $n > 2$ *nicht* genügt, zu verlangen, dass die E_i bloss "paarweise" unabhängig sind, d.h., dass bloss gilt $P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$ für alle $i \neq j$.

(3.∞) Aufgaben

Aufgaben zu den Grundbegriffen

3−1 Im Altertum wurden so genannte Astralagi (Fussgelenkknöchel von Lämmern) ähnlich wie Würfel benützt. Ein Astralagus ist an zwei seiner Seiten rund und kann demzufolge nur auf eine von vier Seiten, nennen wir sie α, β, γ, δ, zu liegen kommen. Von einem solchen Astralagus hat man durch Experimentieren festgestellt, dass in der Hälfte aller Fälle α oben liegt, β ist siebenmal so häufig wie δ, γ doppelt so häufig wie δ. Geben Sie die einzelnen Wahrscheinlichkeiten in Prozenten an. Um welche Art der Wahrscheinlichkeit handelt es sich hier?

3−2 In einer menschlichen Population beträgt die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe 0 bzw. A 0.40 bzw. 0.42. Blutgruppe B ist doppelt so wahrscheinlich wie Blutgruppe AB. a) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten für B und AB? b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand Blutgruppe A oder AB hat? Welche Interpretation der Wahrscheinlichkeit haben Sie hier verwendet?

3−3 20 Feldmäuse wurden auf Gramm genau gewogen. Dabei erhielt man folgende Gewichte:

49, 44, 38, 50, 46, 46, 43, 44, 45, 39, 43, 49, 48, 46, 44, 40, 39, 48, 42, 45.

Aus dieser Gruppe wird ein Tier zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es zwischen 41 g und 46 g wiegt? a) Grenzen eingeschlossen, b) Grenzen nicht eingeschlossen. Welchen Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie verwendet ?

3−4 Beim Auszählen von 1000 Erbsen fand man 700 grüne und 300 gelbe. In Bezug auf die Form erwiesen sich 400 als kantig und 600 als rund. Genau 200 waren sowohl kantig als auch grün. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig herausgepickte Erbse kantig oder grün (oder beides miteinander)? Mit welcher Art Wahrscheinlichkeit haben Sie gearbeitet?

3−5 Wir würfeln gleichzeitig mit zwei Würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a) die Augenzahlen verschieden sind und die grössere durch die kleinere teilbar ist, b) dass sich die beiden Augenzahlen um 2 unterscheiden, c) dass sich die beiden Augenzahlen um mindestens 2 unterscheiden, d) dass die eine Augenzahl genau doppelt so gross ist wie die andere? Welchen Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie verwendet?

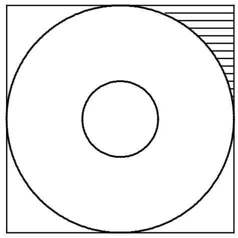
3−6 Ein fleissiger Wahrscheinlichkeitsrechner hat 30 Kugeln mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 30 beschriftet und in ein Behältnis getan. Daraus wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie a) durch 4 teilbar, b) eine Quadratzahl, c) eine Primzahl, d) eine vollkommene Zahl*? Welchen Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie verwendet?

3−7 An einem Volkslauf werden Startnummern von 1 bis 2500 zufällig ausgegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass meine Startnummer a) mit "1" beginnt, b) mit "1" endet? Welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde verwendet?

3−8 Aus sechs Ostereiern mit den Gewichten 60, 52, 61, 60, 54 und 58 Gramm wird eines zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es leichter als a) der Durchschnitt, b) der Median der Gewichte der sechs Eier?

3−9 Eine Zielscheibe für das Pfeilwurfspiel hat eine Seitenlänge von 30 cm. Der Zentrumskreis hat 10 cm Durchmesser. Ein Pfeil trifft zufällig die Scheibe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft

* Dies ist ein Begriff aus der Zahlentheorie: Ein Zahl n heisst vollkommen, wenn sie die Summe aller ihrer Teiler ist, wobei n selbst nicht mitgerechnet wird. Zum Beispiel ist $6 = 1 + 2 + 3$ vollkommen.



er a) den Zentrumskreis, b) den schraffierten Spickel rechts oben? Mit welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff haben Sie gearbeitet?

3−10 Ein Tischtuch ist mit Karos von 6 cm Seitenlänge versehen. Eine Person wirft einen Fünfliber auf den Tisch (Durchmesser 3.1 cm). Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt er vollständig innerhalb eines Karos? Mit welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde hier gearbeitet?

3−11 Ein Stab der Länge 1 m wird an einer zufällig ausgewählten Stelle markiert und durchgesägt.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit unterscheiden sich die beiden Teile um höchstens 10 cm?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das längere Stück mehr als doppelt so lang als das kürzere? Mit welcher Interpretation der Wahrscheinlichkeit können Sie das Problem anpacken?

3−12 Diese Aufgabe handelt wie das Beispiel 3.1.3.F von Xaver und Yvonne.
a) Die beiden bleiben jetzt beide T Minuten. Wie gross müssen sie T wählen, damit sie sich mit 50% Wahrscheinlichkeit treffen?
b) Noch eine Variante dieses Beispiels: Xaver braucht 10 Minuten für seinen Kaffee, Yvonne nur 5 Minuten. Wie gross ist jetzt die Wahrscheinlichkeit eines Treffens?

3−13 Aus dem Intervall [0,1] werden zufällig zwei Zahlen ausgewählt und addiert. Ihre Summe wird dann in der üblichen Weise auf die nächste ganze Zahl auf- bzw. abgerundet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei diesem Prozess 0 bzw. 1 bzw. 2 herauskommt?

3−14 Das Nadelexperiment von Buffon (G.L.L. Buffon, 1707–1788): In der Ebene sind parallele Geraden im Abstand 2 gezogen. Auf diese Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge 1 geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Nadel eine der Geraden? Die verblüffende Antwort lautet: $\frac{1}{\pi}$.
Beweisen Sie dies mit Hilfe der geometrischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Dazu sei y der Abstand des Mittelpunkts der Nadel von der nächstliegenden Geraden ($0 \leq y \leq 1$), und α sei der Winkel, den die Nadel mit der Geraden einschliesst ($0 \leq \alpha < \pi$). Die möglichen Ergebnisse bilden daher ein Rechteck in der α-y-Ebene. Untersuchen Sie, für welche Punkte dieses Rechtecks die Nadel die Gerade trifft.

Aufgaben zu Ergebnisse und Ereignisse

3−15 Aus einer Warensendung werden vier Artikel zur Prüfung auf Brauchbarkeit (Symbol 1) bzw. Unbrauchbarkeit (Symbol 0) herausgegriffen. Geben Sie einen passenden Ergebnisraum sowie die folgenden Ereignisse an:
a) A: Das erste Stück ist unbrauchbar.
b) B: Das erste Stück ist unbrauchbar, alle anderen sind brauchbar.
c) C: Mindestens zwei Artikel sind brauchbar.
d) $A \cap C$. Was bedeutet dies in Worten?

3−16 Bei einem Tennismatch mit den Spielerinnen A und B gewinnt die Spielerin, die zuerst zwei Sätze für sich entschieden hat. Geben sie a) den Ergebnisraum Ω an sowie die Ereignisse b) B: Spielerin B gewinnt den Match, c) C: der Match geht über drei Sätze.

3−17 Aus Ihrer Jugendzeit ist Ihnen vielleicht bekannt, wie man mit dem Verfahren “Schere-Stein-Papier” etwas ausknobelt. Beide Kinder formen mit der Hand eines dieser Symbole. Dabei schlägt der Stein (◯) die Schere (×) (denn er macht sie schartig), die Schere das Papier (□) (denn sie schneidet es) und das Papier den Stein (denn man kann ihn ins Papier einwickeln). Haben beide Kinder dasselbe Symbol gewählt, so ist der Fall unentschieden, das Spiel wird wiederholt. Geben Sie (für ein einzelnes Spiel) einen passenden Ergebnisraum an sowie die Ereignisse a) Kind 1 gewinnt, b) Kind 2 gewinnt, c) unentschieden.

3−18 Ein Zufallsexperiment besteht im Auswählen und Wägen eines Hühnereis (Gewicht beliebig genau). Geben Sie einen möglichen Ergebnisraum Ω an, und identifizieren Sie die folgenden Ereignisse mit Teilmengen von Ω. a) A: Das Ei wiegt weniger als 60 g. b) B: Es wiegt zwischen 61 g und 65 g (Grenzen eingeschlossen). c) C: Es wiegt mehr als 64 g. d) Welche der Ereignisse A, B, C sind unvereinbar?

3−19 Wir untersuchen Familien mit drei Kindern, wobei wir auf die Altersreihenfolge achten. Wir unterscheiden also z.B. die Fälle, wo ein Mädchen zwei jüngere bzw. zwei ältere Brüder hat. a) Geben Sie einen passenden Ergebnisraum Ω an. b) Geben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω an. E: Genau zwei der Kinder sind Knaben. F: Das älteste Kind ist ein Mädchen. c) Was bedeuten die Ereignisse $E \cap F$, $\overline{E}$, $\overline{E} \cap F$ in Worten?

3−20 Ein Kind beschäftigt sich auf einer langen Autofahrt damit, eine Statistik über die Kantonszugehörigkeit der überholenden CH-Autos zu führen (Halbkantone eingeschlossen).

a) Wieviele Elemente hat der Ergebnisraum Ω?
b) Geben Sie das Ereignis G : "Auf dem Kontrollschild kommt der Buchstabe G vor" als Teilmenge von Ω an.
c) Dasselbe für das Ereignis B : "Auf dem Kontrollschild kommt die Farbe blau vor".
d) Geben Sie das Ereignis $G \cap B$ in Worten und als Teilmenge von Ω an.

3−21 Ein Zufallsexperiment besteht im gleichzeitigen Wurf zweier Würfel. Geben Sie den Ergebnisraum Ω an, und stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar:
a) A: Beide Augenzahlen sind gleich.
b) B: Die Summe der Augenzahlen ist 6.
c) C: Die grössere der beiden Augenzahlen ist um mindestens drei grösser als die kleinere.
d) Bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

3−22 In einem Behältnis liegen 20 Kugeln, die mit den Zahlen von 21 bis 40 versehen sind. Das Zufallsexperiment besteht darin, dass eine Kugel gezogen wird.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an, und beschreiben Sie die folgenden Ereignisse A bis D als Teilmengen von Ω.
   A: Es wird eine ungerade Zahl gezogen.
   B: Es wird eine Primzahl gezogen.
   C: Es wird eine durch drei teilbare Zahl gezogen.
   D: Es wird eine Zahl > 30 gezogen.
b) Bestimmen Sie $A \cap C \cap D$, und beschreiben Sie dieses Ereignis in Worten.
c) Welche der Ereignisse A bis D sind unvereinbar? Warum?
d) Es ist $B \subset A$. Was bedeutet dies hier konkret?

3−23 Für beliebige Mengen A, B gelten die Beziehungen $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, wie Sie leicht mit Venn-Diagrammen einsehen können. Die Richtigkeit dieser Formeln lässt sich auch mit der Sprache der Ereignisse überlegen. Tun Sie dies.

3−24 Es seien A und B Ereignisse. a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ und $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ gleich sind (benützen Sie ein Venn-Diagramm). b) Erklären Sie in Worten, was dieses Ereignis im folgenden konkreten Fall bedeutet. Es sei nämlich Ω die Menge aller Studierenden an einer Universität, A sei das Ereignis "die oder der Studierende hat eine altsprachliche Maturität erworben", und B sei das Ereignis "die Person studiert im Hauptfach Biologie".

3−25 Zwei Zahlen x, y mit $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ werden willkürlich gewählt. Stellen Sie die folgenden Ereignisse graphisch dar:
a) Ω, b) $A : y \leq x$, c) $B : y \geq (x-1)^2$, d) $A \cap B$.
Berechnen Sie ferner die geometrisch interpretierte Wahrscheinlichkeit der Ereignisse e) B, f) $A \cap B$.

Aufgaben zu Rechenregeln und Axiome

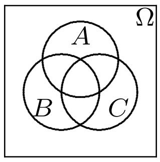
3−26 Aus Erfahrung weiss man, dass ein(e) Student(in) die Prüfung in Alphalogie mit 80% Wahrscheinlichkeit, jene in Betametrie mit 70% Wahrscheinlichkeit besteht. Mit 60% Wahrscheinlichkeit werden beide Prüfungen bestanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Person bei beiden Prüfungen durch?

3−27 Es seien E und F Ereignisse. Man weiss, dass $P(E \cup F) = 0.7$, $P(E \cap F) = 0.2$ und $P(\overline{E}) = 0.6$ ist. Berechnen Sie $P(E)$ und $P(F)$.

3−28 In (3.2.6) ist erwähnt worden, dass die Beziehung $A \subset B$ für Ereignisse bedeutet, dass B aus A folgt. In diesem Fall leuchtet es anschaulich ein, dass $P(A) \leq P(B)$ ist. Beweisen Sie dies mit Hilfe der Axiome von Kolmogoroff.

3−29 Es seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse.
a) Umschreiben Sie $A \cap B$ und $A \cap \overline{B}$ in Worten.
b) Zeichnen Sie ein illustrierendes Venn-Diagramm.
c) Was können Sie über $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ sagen? Welches Axiom verwenden Sie?
d) Berechnen Sie $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3−30 Interpretieren Sie die durch Kreise dargestellten Mengen A, B, C aus der Figur als Ereignisse und geben Sie eine der Regel 7 ähnliche Formel für $P(A \cup B \cup C)$ an. Geben Sie auch einen rechnerischen Beweis unter Verwendung der Axiome 1, 2, 3.



3−31 Das Axiom 1 kann noch etwas abgeschwächt werden, indem man nur noch "die erste Hälfte" verlangt, nämlich

$$\text{Axiom 1*: } 0 \leq P(E) \text{ für alle } E\,.$$

Zeigen Sie, dass die Beziehung $P(E) \leq 1$ (und damit das Axiom 1) unter Verwendung der Axiome 1*, 2 und 3 *bewiesen* werden kann. (Dies ist insofern von Interesse, als die Mathematiker bei einem Axiomensystem möglichst wenig verlangen möchten.

Aufgaben zu endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

3−32 Willy Würfel, eine legendäre Gestalt in den Spelunken der Hafenstadt, benützte (jedenfalls bis man ihn erwischte) einen Würfel, bei welchem die Sechs dreimal wahrscheinlicher als die Eins war. Die übrigen Augenzahlen waren alle halb so wahrscheinlich wie die Sechs. a) Bestimmen Sie die einzelnen Wahrscheinlichkeiten. b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Willy eine ungerade Zahl würfelte? c) Wieviele Ereignisse aus $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ haben die Wahrscheinlichkeit 0.3?

3−33 Ein Glücksrad hat vier Sektoren, welche mit 1, 2, 3, 4 beschriftet sind. Der zugehörige Ergebnisraum ist somit gleich $\{1, 2, 3, 4\}$. Jedes der Ereignisse $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ soll dreimal so wahrscheinlich sein wie dasjenige mit der vorausgehenden Nummer. a) Berechnen Sie die Öffnungswinkel der vier Sektoren. b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt eine gerade Zahl heraus? c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt die "4" nicht heraus?

3−34 Ein Glücksrad soll aus einem roten, einem blauen und einem grünen Sektor bestehen. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit für "rot oder blau" gleich jener für "grün" und die Wahrscheinlichkeit für "blau oder grün" doppelt so gross wie jene für "rot" sein. a) Berechnen Sie die drei Wahrscheinlichkeiten, und legen Sie die Winkel der Sektoren des Glückrads fest. b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für "rot oder grün"?

3–35 Wir würfeln dreimal mit einem normalen Würfel. Mit den erhaltenen Augenzahlen wird in der gewürfelten Reihenfolge eine dreistellige Zahl gebildet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese a) ≥ 123, b) ≥ 456, c) ≥ 567?

3–36 Aus der "Ars conjectandi" von Jakob Bernoulli (1654–1705): "Jemand will mit einem gewöhnlichen Würfel auf 6 Würfe erreichen, dass alle 6 Würfelflächen nach oben zu liegen kommen; es soll also jede Augenzahl einmal und keine zweimal erscheinen. Wie gross ist seine Hoffnung?" Berechnen Sie diese Hoffnung (= Wahrscheinlichkeit).

3–37 Eine natürliche Zahl n mit $1000 \leq n \leq 9999$ wird zufällig gewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle vier Ziffern verschieden sind?

3–38 Drei Würfel A, B, C sind wie folgt beschriftet:

$$A\ :\ 1,1,6,6,8,8. \qquad B\ :\ 3,3,5,5,7,7. \qquad C\ :\ 2,2,4,4,9,9.$$

Bestimmen Sie die Gewinn-Wahrscheinlichkeit von A über B, von B über C und von C über A. Was ist daran merkwürdig?

3–39 Auf einem sonst leeren Schachbrett steht der schwarze König a) auf dem Feld a8 (d.h., in einer Ecke), b) auf dem Feld c4. Nun wird die weisse Dame zufällig auf eines der 63 freien Felder gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bietet sie Schach?

3–40 Ergänzen Sie die Aufstellung von Beispiel 3.4.4.A durch die Wahrscheinlichkeit eines "Fünfers mit Zusatzzahl".

3–41 Mit E_k bezeichnen wir das Ereignis "Beim Zahlenlotto (6 aus 45) ist die kleinste gezogene Zahl gleich k". Geben Sie eine Formel für $P(E_k)$, $k = 1, \ldots, 45$ an.

3–42 Wir treffen die (unrealistische) Annahme, beim Sporttoto (vgl. (1.6)) seien bei jedem der 13 Spiele die drei Ausgänge 1, x, 2 gleich wahrscheinlich. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zufälligem Ausfüllen einer Tippkolonne genau 11 Richtige zu erzielen?

3–43 Farbwürfel haben zwei rote, zwei blaue und zwei grüne Seitenflächen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim gleichzeitigen Wurf von a) drei, b) vier solchen Farbwürfeln alle drei Farben oben zu liegen kommen?

3–44 Eine Packung Krokuszwiebeln enthält zwei weisse, zwei violette und zwei gelbe Pflanzen; leider sind die Zwiebeln nicht unterscheidbar. Die Zwiebeln werden in eine Reihe gepflanzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gleichen Farben jeweils nebeneinander wachsen?

3–45 In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Stifte heraus. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: a) Genau einer der Farbstifte ist rot, b) mindestens ein Farbstift ist blau.

3–46 In einem Skirennen sind unter den 15 Fahrerinnen der ersten Startgruppe 6 Schweizerinnen. Wie gross ist (bei zufälliger Auslosung) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Startnummern 1–4 alle an Schweizerinnen gehen?

3–47 In einem Korb hat es 5 gute und 3 faule Äpfel. Ich nehme diese einzeln nacheinander und in zufälliger Reihenfolge aus dem Korb. Mit welcher Wahrscheinlichkeit folgen sich die drei faulen unmittelbar?

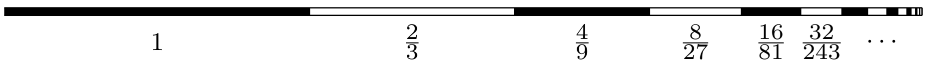
3–48 Es sind fünf Strecken mit den Längen 1, 3, 5, 7 und 9 cm gegeben. Drei davon werden willkürlich ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man daraus ein Dreieck bilden kann?

3–49 Wir gehen von der Annahme aus, dass die Geburten gleichmässig auf die sieben Wochentage verteilt seien. An einem Fest sind n Personen beisammen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei davon am gleichen Wochentag geboren worden sind? Wählen Sie $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

3−50 Einige, mathematischer ausgedrückt n, Personen gehen ins Wirtshaus und hängen ihre Mäntel im Gang an Kleiderhaken. Zur Polizeistunde ist die klare Sicht nicht mehr so gegeben, vielleicht ist aber auch einfach das Licht im Gang erloschen. Jedenfalls nimmt jede Person zufällig einen der Mäntel an sich.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_n haben *alle* einen falschen Mantel erwischt? Lösen Sie die Aufgabe für $n = 2, 3, 4$.
b) Eine Variante: Es sei $n = 4$. Im Gang hängen total zwölf Mäntel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt nun jede der vier Personen zufällig ihren eigenen Mantel?

3−51 Wie oft darf man eine (unverfälschte) Münze höchstens werfen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei *nie* Kopf erscheint a) mindestens 10%, b) mindestens 10^{-10} betragen soll?

3−52 Auf eine 3 m lange Holzleiste werden mit schwarzer Farbe Streifen gemalt. Dabei ist das erste (schwarze) Stück 1 m lang; jedes der nachfolgenden (abwechselnd unbemalten bzw. schwarzen) Stücke hat zwei Drittel der Länge des vorhergehenden. Dies wird (in Gedanken) unendlich oft durchgeführt.



Eine (für unser Gedankenexperiment punktförmig gedachte) Mücke setzt sich zufällig auf die Leiste. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt sie kleben?

3−53 Ein (offensichtlich nur in der Gedankenwelt existierendes) Glücksrad hat abzählbar unendlich viele Sektoren, die mit 1, 2, 3, ... nummeriert sind. Diese Zahl ist gleichzeitig der Gewinn in Franken, der zum betreffenden Sektor gehört. Der Sektor Nummer k hat den Öffnungswinkel

$$\frac{360°}{k(k+1)} .$$

Mit p_k bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger im Sektor k stehen bleibt. a) Wie gross ist p_k? b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ist (wie es sein muss). c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gewinn bei einmaligem Drehen höchstens n Franken beträgt?

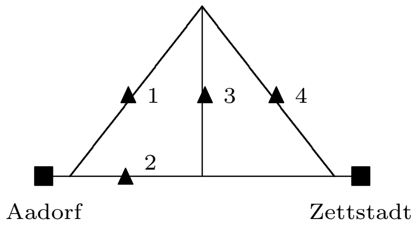
Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

3−54 Von 500 Personen waren 300 gegen eine Krankheit geimpft. Von den geimpften erkrankten 50 Personen, von den ungeimpften dagegen 100. Aus dieser Schar wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit I bzw. N bezeichnen wir die Ereignisse "geimpft" bzw. "nicht geimpft", mit K bzw. G die Ereignisse "erkrankt" bzw. "gesund geblieben". Berechnen Sie a) $P(I)$, b) $P(G)$, c) $P(K)$, d) $P(I \cap G)$, e) $P(G|I)$, f) $P(I|G)$.

3−55 Zwei ehrliche Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie gross ist unter der Bedingung, dass die beiden Augenzahlen verschieden sind, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a) mindestens ein Würfel eine Sechs zeigt, b) beide Würfel eine Fünf zeigen, c) der erste Würfel eine Vier zeigt, d) die Summe der Augenzahlen 6 ist?

3−56 Wir kümmern uns erneut um Xaver und Yvonne (Beispiel 3.1.3.F). Die Voraussetzungen sind dieselben, wir fragen nun aber: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eines Treffens unter der Bedingung, dass beide nach 12 Uhr 30 (aber vor 13 Uhr) in die Cafeteria gehen?

3−57 Von Aadorf führen mehrere Strassen nach Zettstadt (siehe Plan). Die Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnen Baustellen, die jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit die Durchfahrt verunmöglichen, wobei der Zustand einer Baustelle auf den der andern keinen Einfluss hat. Es sei E das Ereignis "Baustelle 1 ist passierbar", F das Ereignis "man kann von Aadorf nach Zettstadt gelangen". Berechnen Sie $P(E)$, $P(F)$, $P(F|E)$.



3−58 Von meiner Tramhaltestelle fährt sowohl die Linie A als auch die Linie B ins Stadtzentrum. Beide fahren alle 10 Minuten (und zwar, wie wir annehmen wollen, ganz pünktlich). Die Linie A fährt jeweils um 07.00, 07.10, 07.20, usw., die Linie B dagegen um 07.03, 07.13, 07.23, usw. In der Linie A finde ich erfahrungsgemäss mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% einen Sitzplatz, in der Linie B aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Ich gehe völlig zufällig zur Haltestelle und nehme das erstbeste Tram. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwische ich einen Sitzplatz? b) Ich bin ohne mich umzusehen in ein Tram eingestiegen und finde einen Sitzplatz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitze ich in einem Tram der Linie A?

3−59 In einer Schachtel hat es 25 rote, 15 braune und 10 grüne Gummibärchen. Ihr Kollege und Sie nehmen (ohne zu gucken) je ein Bärchen, wobei Sie ihm den Vortritt lassen. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm, und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: a) Beide Gummibärchen haben dieselbe Farbe. b) Genau eines der Gummibärchen ist grün. c) Mindestens ein Gummibärchen ist rot.

3−60 Ein Spiel: In einer Schachtel hat es 4 weisse, 6 graue und 10 schwarze Kugeln. Das Ziel ist es, in maximal drei Versuchen eine weisse Kugel zu erwischen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Versuch zurückgelegt wird. Zieht man eine schwarze Kugel, dann ist Schluss. Zieht man eine graue Kugel, so darf man (im Rahmen der Maximalzahl von drei Versuchen) nochmals probieren. Wie gross ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

3−61 In einem Dorf in den Schweizer Alpen leben während der Ferienzeit dreimal so viele (männliche) Touristen wie Einheimische. 20% der Einheimischen und 40% der Fremden tragen ein Sennenkäppli. Ich treffe einen Herrn mit einer derartigen Kopfbedeckung an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

3−62 Ein Massenartikel wird auf drei Maschinen produziert. 50% der Produktion stammen von Maschine A, 30% von B, der Rest von C. Maschine A liefert 10% Ausschuss, Maschine B 5%, Maschine C 2%. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Gesamtproduktion gewählter Artikel brauchbar? b) Ich habe einen defekten Artikel erwischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Maschine A?

3−63 Diese Aufgabe führt auf ein unendliches Baumdiagramm, vgl. Beispiel 3.5.6.D. Wir würfeln so lange mit zwei Würfeln, bis ein Wurf mit der Augensumme 10 auftritt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass dies im k-ten Wurf ($k = 1, 2, 3, \ldots$) geschieht?

3−64 Max und Moritz möchten eine Fensterscheibe einschmeissen und werfen abwechselnd Steine. Max beginnt. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Max ist bei jedem Wurf $= p$, jene von Moritz $= q$. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt Max der erste Treffer? b) Es sei $p = 1/3$. Wie gross muss q sein, damit beide dieselbe Chance haben, die Scheibe zuerst zu treffen?

3−65 Wir würfeln mit einem roten und einem blauen Würfel. Mit E bezeichnen wir das Ereignis "der rote Würfel zeigt eine gerade Zahl", mit F das Ereignis "beide Würfel zeigen dieselbe Zahl". Sind E und F unabhängig?

3−66 Aus einer Menge M von Zahlen wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Es sei E (bzw. F) das Ereignis "die ausgewählte Zahl ist durch 2 (bzw. 3) teilbar". Sind E und F unabhängig

a) für $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
b) für $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Pro memoria: Die Zahl 0 ist durch jede Zahl teilbar.

3−67 In der Schulklasse A hat es 10 Mädchen und 15 Knaben. Von der Schulklasse B weiss ich nur, dass sie 20 Schüler(innen) hat, die Anzahl der Knaben wird darum mit n bezeichnet. a) Eine aus den beiden Klassen zufällig ausgewählte Person erweist sich als Knabe. Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser in der Klasse A ist? (In der Antwort kommt natürlich die Zahl n vor.) b) Für welches n wird diese Wahrscheinlichkeit maximal bzw. minimal? c) Für welches n sind die Ereignisse "Person gehört zur Klasse A" und "Person ist männlichen Geschlechts" unabhängig?

3−68 Wir geben uns noch einmal mit Xaver und Yvonne ab. Die Geschichte ist immer noch dieselbe wie in Beispiel 3.1.3.F (d.h., die beiden warten höchstens 20 Minuten aufeinander). Wir betrachten die folgenden drei Ereignisse:

E: Die beiden treffen sich.
F: Xaver erscheint zwischen 12.00 und 12.30 Uhr.
G: Xaver erscheint nach Yvonne.

Prüfen Sie E, F sowie E, G und F, G auf Unabhängigkeit.

3−69 Von 500 befragten Personen (300 Frauen, 200 Männer) waren 400 schweizerischer Nationalität. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig aus dieser Gruppe ausgewählte Person a) männlich, b) Ausländerin ist? Welche (plausible) Annahme müssen Sie im Fall b) treffen?

3−70 Wir würfeln mit zwei Würfeln und betrachten die Ereignisse

A: Der erste Würfel zeigt eine gerade Zahl.
B: Der zweite Würfel zeigt eine ungerade Zahl.
C: Die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade.

Zeigen Sie, dass die Paare (A, B), (A, C) und (B, C) jeweils unabhängig sind. Sind die drei Ereignisse im Sinne von (3.5.9) unabhängig?