

## 6. AUSGEWÄHLTE VERTEILUNGEN (DISTRIBUTIONS)

### (6.0) Überblick

Wir präsentieren hier viele Resultate, welche wir aus Zeitgründen nicht alle nachprüfen. Viele der nachfolgenden Resultate sind bereits bekannt und werden hier nur kompakt zusammengefasst. Es kommen auch Verteilungen vor, welchen wir bis jetzt noch nicht begegnet sind. Repetieren Sie diese Teile nochmals, sobald Sie auf diese Verteilungen stossen; es ist also nicht gravierend, wenn man einzelne Teile (noch) nicht versteht. Wie zum Beispiel eine Summe von Zufallsgrössen ( $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ) zu verstehen ist, folgt ausführlich zu Beginn von Kapitel 8. Dort wird auch “iid” definiert; kurz: “iid” steht für Englisch “independent and identically distributed”, also unabhängig und identisch verteilt.

Sie lernen hier, wie Wahrscheinlichkeitsfunktionen ( $P[X = k]$ ) oder Dichten ( $f(x)$ ) der wichtigsten Verteilungen aussehen. Wir werden dies in der Statistik (Ablehnungsbereiche bei Tests) intensiv brauchen. Nehmen Sie sich eine Stunde Zeit, um in R bei diesen Verteilungen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen bzw. Dichten anzuschauen. Variieren Sie dabei Erwartungswert und Varianz. Für Ihr weiteres Studium gilt nämlich: je mehr Verteilungen Sie kennen, desto besser können Sie die Wirklichkeit modellieren.

Ab jetzt schreiben wir manchmal sehr kompakt zum Beispiel  $E[Be(p)] = p$ . Das bedeutet: sei  $X$  eine  $Be(p)$ -Zufallsgrösse; “ $E[Be(p)] = p$ ” steht dann für  $E[X] = p$ .

**hier nochmals zusammengefasst definieren, was  $t_{\alpha,n}^{-1}$  u.ä. oder wie auch immer wir das machen und auch  $\alpha/2$  bedeuten.**

### (6.1) Diskrete Verteilungen

#### (6.1.1) Bernoulli $Be(p)$ ; R: binom mit $n = 1$

$X$  kann 2 Werte annehmen: 0 und 1.  $P[X = 1] = p$  (Erfolg) und  $P[X = 0] = 1 - p$  (Misserfolg),  $p \in [0, 1]$ .  $E[X] = p$  und  $V[X] = p(1 - p)$ . Mit  $k \in \{0, 1\}$  haben wir

$$P[X = k] = p^k(1 - p)^{1-k}.$$

Dies ist in der Tat gleichwertig wie oben, zielt aber bereits auf die  $\text{Bin}(n,p)$ :

$$k = 0: \text{ dann haben wir } P[X = 0] = p^0(1-p)^{1-0} = 1-p$$

$$k = 1: \text{ dann haben wir } P[X = 1] = p^1(1-p)^{1-1} = p$$

Je nach Modellierungssituation kann eine  $\text{Be}(p)$  auch symmetrisch um Null mit möglichen Werten  $-1$  und  $+1$  und Wahrscheinlichkeiten je  $0.5$  definiert werden. Dann gilt übrigens  $E[X] = 0$ . Der symmetrische Random Walk baut darauf auf.

(6.1.2) Binomial  $\text{Bin}(n,p)$ ; R: binom

Seien  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n$  iid  $\text{Be}(p)$ -Zufallsgrößen. Sei  $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann hat  $Y$  per definitionem die Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$ ;  $\text{Bin}(n,p)$ .  $E[Y] = np$  und  $V[Y] = np(1-p)$ .  $0 \leq k \leq n$ :

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Einsatz: Anzahl Erfolge ( $k$ ) bei  $n$  unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ .

Wenn  $n = 1$  ist, sollte das die  $\text{Be}(p)$  geben:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k}$$

Weil sowohl  $\binom{1}{0} = 1$  wie auch  $\binom{1}{1} = 1$  und jetzt nur noch  $k \in \{0, 1\}$  ist das in der Tat die  $\text{Be}(p)$ , vgl. mit oben 6.1.1.

Auf der kommenden Seite sind die Zahlen

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

für  $n = 2, \dots, 8$ ,  $k = 0, \dots, n$  und  $p = 0.05, 0.10, \dots, 0.50$  tabelliert.

Die Tabelle kann auch für Werte von  $p > 0.50$ , genauer für  $p = 0.55, \dots, 0.95$ , gebraucht werden. In diesen Fällen ist die *kursive* Beschriftung unten bzw. rechts zu benutzen. Beispielsweise gilt für die Binomialverteilung mit  $n = 7$  und  $p = 0.7$ ,  $q = 0.3$ , dass  $P(X = 5) = 0.3177$  ist.

Dies ist gleichzeitig der Wert von  $P(X = 2)$  für die Binomialverteilung mit  $n = 7$  und  $p = 0.3$ ,  $q = 0.7$ . Hier wird eine Symmetrie ausgenutzt, die schon an den Graphen in (4.2.2) sichtbar geworden ist. Wegen der Beziehung  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  gilt nämlich, wenn wir zur Unterscheidung die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  bzw.  $q$  (mit  $p+q=1$ ) als Index schreiben

$$P_p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{n-k} q^{n-k} p^k = P_q(X = n-k),$$

woraus sich die erwähnte Symmetrie ergibt.

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung Bin( $n, p$ )												
$n$	$k$	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	
<hr/>												
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	2
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	1
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	0 2
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	3
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	2
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	1
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250	0 3
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	4
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	3
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	2
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500	1
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625	0 4
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312	5
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562	4
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	3
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125	2
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562	1
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312	0 5
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	6
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	5
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	4
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125	3
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344	2
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938	1
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156	0 6
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	7
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547	6
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	5
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734	4
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734	3
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641	2
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547	1
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078	0 7
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	8
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312	7
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	6
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188	5
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734	4
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188	3
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094	2
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312	1
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039	0 8
<hr/>												
		.95	.90	.85	.80	.75	.70	.65	.60	.55	.50	$k$ $n$

(6.1.3) Geometrisch  $\text{Ge}(p)$ ; R: geom

Bei dieser Verteilung interessieren wir uns für den Zeitpunkt des ersten Erfolgs (erste Mal eine 6 beim Würfel, erste Mal Kopf beim Münzwurf).  $Z$  ist eine Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen ohne die Null. Wir haben mit  $p \in [0, 1]$

$$P[Z = k] = p(1 - p)^{k-1}.$$

Es gilt  $E[Z] = 1/p$  (das merkt man sich am Besten mit dem Würfel:  $1/p = 1/(1/6) = 6$  - es braucht durchschnittlich 6 Würfe, bis eine 6 kommt, aus Symmetriegründen: im Durchschnitt kommt alle 6 mal eine 6, ebenso eine 5, eine 4, etc.) und  $V[Z] = (1-p)/p^2$ .

Die  $\text{Ge}(p)$  hat die Eigenschaft, dass sie die einzige diskrete Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit  $n > m > 0$  gilt hier

$$P[Z > n | Z > m] = P[Z > (n - m)].$$

”Gegeben, es hat schon  $m = 1000$  Würfe ohne 6 (=Erfolg) gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens  $n = 1004$  Würfe ohne 6 geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz  $n - m = 4$  abhängig. Wie lange es bereits keine 6 gegeben hat, ist egal!”

Es sei noch erwähnt, dass die geometrische Verteilung in gewissen Lehrbüchern - und in R - so definiert wird, dass man die Anzahl Misserfolge  $M$  bis zum ersten Erfolg zählt. Dann nimmt die  $\text{Ge}(p)$  Werte auf den natürlichen Zahlen *inklusive* die 0 an. Die Resultate sind analog, aber leicht komplizierter:  $P[M = k] = p(1 - p)^k$  für  $k \geq 0$ . Der Erwartungswert muss neu 1 tiefer sein:  $E[M] = 1/p - 1 = \frac{1-p}{p}$  und die Varianz  $V[M] = (1-p)/p^2$  ist gleich wie oben, weil es eine Parallelverschiebung der Zufallsgrösse (oder der Daten) ist.

(6.1.4) Poisson  $\text{Po}(\lambda)$ ; ausführlich in Kapitel 7, R: pois

Eine Zufallsgrösse  $X$  ist *poissonsches*, wenn sie Werte auf den natürlichen Zahlen inklusive 0 annimmt und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$E[X] = V[X] = \lambda$ . Motivation Poissonverteilung in Kapitel 7; en bref:

\* bis jetzt wird gesagt: "Sei  $X \sim Po(\lambda)$ ": einfach lösen, ohne Motivation zu kennen

\* später in Kapitel 7, Motivation geht über folgende Punkte:

1. Situation, wo erste Idee  $Bin(n, p)$ , zB # Hausbrände in CH pro Jahr, # Meteoriteneinschläge pro Jahr, # Flugzeugabstürze pro Jahr
2.  $n$  gross und  $p$  klein
3. Kapitel 7: nehme stattdessen  $Po(\lambda)$ , da einfacher und nur 1 Parameter statt 2
4.  $\lambda$  so, dass  $E[Bin(n, p)] = E[Po(\lambda)]$ , das heisst  $np = \lambda$  (manchmal kennt man eher  $\lambda$  und nicht  $np$  (Meteoriteneinschläge))

Auf der nächsten Seite sind die Zahlen

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

für  $\lambda = 0.2, 0.4, \dots, 9.0$  und  $k = 0, 1, \dots, 10$  tabelliert.

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung  $Po(\lambda)$ 

$\lambda$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2	0.819	0.164	0.016	0.001	0.000						
0.4	0.670	0.268	0.054	0.007	0.001	0.000					
0.6	0.549	0.329	0.099	0.020	0.003	0.000					
0.8	0.449	0.359	0.144	0.038	0.008	0.001	0.000				
1.0	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.001	0.000			
1.2	0.301	0.361	0.217	0.087	0.026	0.006	0.001	0.000			
1.4	0.247	0.345	0.242	0.113	0.039	0.011	0.003	0.001	0.000		
1.6	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	0.001	0.000		
1.8	0.165	0.298	0.268	0.161	0.072	0.026	0.008	0.002	0.000		
2.0	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012	0.003	0.001	0.000	
2.2	0.111	0.244	0.268	0.197	0.108	0.048	0.017	0.005	0.002	0.000	
2.4	0.091	0.218	0.261	0.209	0.125	0.060	0.024	0.008	0.002	0.001	0.000
2.6	0.074	0.193	0.251	0.218	0.141	0.074	0.032	0.012	0.004	0.001	0.000
2.8	0.061	0.170	0.238	0.222	0.156	0.087	0.041	0.016	0.006	0.002	0.000
3.0	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101	0.050	0.022	0.008	0.003	0.001
3.2	0.041	0.130	0.209	0.223	0.178	0.114	0.061	0.028	0.011	0.004	0.001
3.4	0.033	0.113	0.193	0.219	0.186	0.126	0.072	0.035	0.015	0.006	0.002
3.6	0.027	0.098	0.177	0.212	0.191	0.138	0.083	0.042	0.019	0.008	0.003
3.8	0.022	0.085	0.162	0.205	0.194	0.148	0.094	0.051	0.024	0.010	0.004
4.0	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	0.005
4.2	0.015	0.063	0.132	0.185	0.194	0.163	0.114	0.069	0.036	0.017	0.007
4.4	0.012	0.054	0.119	0.174	0.192	0.169	0.124	0.078	0.043	0.021	0.009
4.6	0.010	0.046	0.106	0.163	0.188	0.173	0.132	0.087	0.050	0.026	0.012
4.8	0.008	0.040	0.095	0.152	0.182	0.175	0.140	0.096	0.058	0.031	0.015
5.0	0.007	0.034	0.084	0.140	0.175	0.175	0.146	0.104	0.065	0.036	0.018
5.2	0.006	0.029	0.075	0.129	0.168	0.175	0.151	0.113	0.073	0.042	0.022
5.4	0.005	0.024	0.066	0.119	0.160	0.173	0.156	0.120	0.081	0.049	0.026
5.6	0.004	0.021	0.058	0.108	0.152	0.170	0.158	0.127	0.089	0.055	0.031
5.8	0.003	0.018	0.051	0.098	0.143	0.166	0.160	0.133	0.096	0.062	0.036
6.0	0.002	0.015	0.045	0.089	0.134	0.161	0.161	0.138	0.103	0.069	0.041
6.2	0.002	0.013	0.039	0.081	0.125	0.155	0.160	0.142	0.110	0.076	0.047
6.4	0.002	0.011	0.034	0.073	0.116	0.149	0.159	0.145	0.116	0.082	0.053
6.6	0.001	0.009	0.030	0.065	0.108	0.142	0.156	0.147	0.121	0.089	0.059
6.8	0.001	0.008	0.026	0.058	0.099	0.135	0.153	0.149	0.126	0.095	0.065
7.0	0.001	0.006	0.022	0.052	0.091	0.128	0.149	0.149	0.130	0.101	0.071
7.2	0.001	0.005	0.019	0.046	0.084	0.120	0.144	0.149	0.134	0.107	0.077
7.4	0.001	0.005	0.017	0.041	0.076	0.113	0.139	0.147	0.136	0.112	0.083
7.6	0.001	0.004	0.014	0.037	0.070	0.106	0.134	0.145	0.138	0.117	0.089
7.8	0.000	0.003	0.012	0.032	0.063	0.099	0.128	0.143	0.139	0.121	0.094
8.0	0.000	0.003	0.011	0.029	0.057	0.092	0.122	0.140	0.140	0.124	0.099
8.2	0.000	0.002	0.009	0.025	0.052	0.085	0.116	0.136	0.139	0.127	0.104
8.4	0.000	0.002	0.008	0.022	0.047	0.078	0.110	0.132	0.138	0.129	0.108
8.6	0.000	0.002	0.007	0.020	0.042	0.072	0.103	0.127	0.137	0.131	0.112
8.8	0.000	0.001	0.006	0.017	0.038	0.066	0.097	0.122	0.134	0.131	0.116
9.0	0.000	0.001	0.005	0.015	0.034	0.061	0.091	0.117	0.132	0.132	0.119

## (6.1.5) Hypergeometrische Verteilung; R: hyper

Man hat  $N$  Objekte, wovon  $M$  “gut” sind. Aus den gesamten  $N$  Objekten werden nun  $n$  ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit  $P(X = k)$  dafür, dass unter den  $n$  ausgewählten Objekten genau  $k$  “gute” sind,  $\max(0, n + M - N) \leq k \leq \min(M, n)$ , ist

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k}}{\binom{N}{n}}.$$

Mit der Abkürzung

$$p := \frac{M}{N} \quad \text{ist} \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p) \frac{N - n}{N - 1}.$$

## (6.2) Stetige Verteilungen

Vorsicht: "stetig" heisst hier nicht (wie im ersten Band), dass etwa die Dichte  $f(x)$  stetig sein muss, siehe auch gleich nachfolgend:

(6.2.1) Uniform  $U[a, b]$ ; R: unif - auch Gleichverteilung / Rechteckverteilung

Die einfachste stetige Verteilung ist die Uniform-Verteilung: Eine Zufallsgrösse  $U$  ist auf dem Intervall  $[a, b]$  uniform verteilt, wenn  $U$  folgende Dichtefunktion hat:

$$f(u) = (b - a)^{-1},$$

wobei dann natürlich  $a \leq u \leq b$  zu gelten hat. Ausserhalb von  $[a, b]$  ist die Dichte gleich null. Es gilt  $E[U] = (a + b)/2$  und  $V[U] = (b - a)^2/12$ .

(6.2.2) (Negativ-) Exponential  $\text{Exp}(\lambda)$ ; R: exp

Eine Zufallsgrösse  $X$  mit Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

heisst exponentialverteilt mit Parameter (oder Rate)  $\lambda$ ;  $\text{Exp}(\lambda)$ . Es gilt  $E[X] = 1/\lambda$  und  $V[X] = 1/\lambda^2$ . Es macht Sinn, dass die erwartete Zeit bis zum (nächsten) Ereignis umgekehrt proportional zur Rate sein muss. Modell für: Zeit bis radioaktiver Zerfall, "wann geht eine Glühbirne kaputt?", Zwischenzeit bei der Ankunft von KundInnen in einem Geschäft und vieles mehr.

Die  $\text{Exp}(\lambda)$  hat die Eigenschaft, dass sie die einzige stetige Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit  $t > s > 0$  gilt hier

$$P[X > t | X > s] = P[X > (t - s)].$$

"Gegeben, es hat schon  $s = 1000$  Sekunden keinen Atomzerfall gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens  $t = 1004$  Sekunden keinen Atomzerfall geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz  $t - s = 4$  Sekunden abhängig. Wie lange es bereits keinen Atomzerfall gegeben hat, ist egal!"

(6.2.3) Normal  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ; auch Gauss-, Glocken-, Bell-, Forrest Gump-Verteilung, R: norm

Vorsicht: in R:  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , im Buch:  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes (siehe Kapitel 7) ist die Normalverteilung sehr wichtig: Mit Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt  $E[X] = \mu$  und  $V[X] = \sigma^2$ .

“Z-Transform” - siehe Kapitel 5: Wenn  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung hat, dann hat

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{Z - Transform})$$

eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung (welche auf der kommenden Seite und Libraries von Statistik-Paketen abgelegt ist).  $\mathcal{N}(0, 1)$  nennen wir ”Standard-Normalverteilung”.

Auf der kommenden Seite sind die Werte der Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$  der Standard-Normalverteilung  $\mathcal{N}(0; 1)$  tabelliert:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

Zwischen den tabellierten Werten kann man *linear interpolieren*.

### Beispiele zur Interpolation

Es geht nicht um eine systematische Theorie der Interpolation, sondern um die Darlegung der Idee.

1. Gesucht ist  $\Phi(1.07)$ . Da 1.07 in der Mitte zwischen 1.06 und 1.08 ist, nimmt man den Durchschnitt dieser Werte:

$$\Phi(1.07) = \frac{1}{2}(\Phi(1.06) + \Phi(1.08)) = \frac{1}{2}(0.8554 + 0.8599) \approx 0.8576 \text{ oder } 0.8577.$$

(Dies ist eine Frage der Rundung. Umfangreichere Tabellen oder Rechner zeigen, dass 0.8577 der bessere Wert ist.)

2. Gesucht ist  $\Phi(0.623)$ . Benachbarte Tabellenwerte sind  $\Phi(0.62) = 0.7324$  und  $\Phi(0.64) = 0.7389$  mit der Differenz 0.0065.  $3/20$  dieser Differenz, nämlich 0.0010, addieren wir zu 0.7324 und erhalten  $\Phi(0.623) \approx 0.7334$ . ( $3/20$  haben wir natürlich deshalb genommen, weil  $0.623 - 0.62$  gerade  $3/20$  der Differenz  $0.64 - 0.62$  ist.)

3. Für welches  $x$  ist  $\Phi(x) = 0.8$ ? Dieses  $x$  liegt irgendwo zwischen 0.84 und 0.86. Nun ist  $\Phi(0.86) - \Phi(0.84) = 0.8051 - 0.7995 = 0.0056$  und  $0.8 - 0.7995 = 0.0005$ . Die letzte Zahl ist etwa  $1/11$  der gesamten Differenz 0.0056, also addieren wir zu 0.84 einen Elftel der Differenz  $0.86 - 0.84 = 0.02$  und erhalten  $x \approx 0.842$ . ☒

An den äussersten Enden der Tabellen ist die vierstellige Genauigkeit nicht mehr aussagekräftig genug, weshalb die folgenden genaueren Werte angegeben seien:

$x$	$\Phi(x)$
-4.00	0.000032
-3.90	0.000049
-3.80	0.000072
-3.70	0.000108
-3.60	0.000159

$x$	$\Phi(x)$
3.60	0.999841
3.70	0.999892
3.80	0.999928
3.90	0.999952
4.00	0.999968

Für ausführlichere Tabellen sei auf die Literatur verwiesen. Manchmal sind dort nur die Werte für positive (oder negative)  $x$  tabelliert, was aber wegen der leicht zu beweisenden Beziehung  $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$  keine wesentliche Einschränkung bedeutet.

Kritische Werte der Standard-Normalverteilung (zweiseitig) (vgl. dazu (5.10.5))

$\alpha$	0.000'001	0.000'01	0.000'1	0.001	0.0025	0.005	0.01	
$z_\alpha$	4.892	4.417	3.891	3.291	3.023	2.807	2.576	
$\alpha$	0.02	0.025	0.03	0.04	0.05	0.1	0.15	0.2
$z_\alpha$	2.326	2.241	2.170	2.054	1.960	1.645	1.440	1.282

Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$ 

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
-4.00	0.0000	-1.10	0.1357	0.02	0.5080	1.12	0.8686
-3.90	0.0000	-1.08	0.1401	0.04	0.5160	1.14	0.8729
-3.80	0.0001	-1.06	0.1446	0.06	0.5239	1.16	0.8770
-3.70	0.0001	-1.04	0.1492	0.08	0.5319	1.18	0.8810
-3.60	0.0002	-1.02	0.1539	0.10	0.5398	1.20	0.8849
-3.50	0.0002	-1.00	0.1587	0.12	0.5478	1.22	0.8888
-3.40	0.0003	-0.98	0.1635	0.14	0.5557	1.24	0.8925
-3.30	0.0005	-0.96	0.1685	0.16	0.5636	1.26	0.8962
-3.20	0.0007	-0.94	0.1736	0.18	0.5714	1.28	0.8997
-3.10	0.0010	-0.92	0.1788	0.20	0.5793	1.30	0.9032
-3.00	0.0013	-0.90	0.1841	0.22	0.5871	1.32	0.9066
-2.90	0.0019	-0.88	0.1894	0.24	0.5948	1.34	0.9099
-2.80	0.0026	-0.86	0.1949	0.26	0.6026	1.36	0.9131
-2.70	0.0035	-0.84	0.2005	0.28	0.6103	1.38	0.9162
-2.60	0.0047	-0.82	0.2061	0.30	0.6179	1.40	0.9192
-2.50	0.0062	-0.80	0.2119	0.32	0.6255	1.42	0.9222
-2.45	0.0071	-0.78	0.2177	0.34	0.6331	1.44	0.9251
-2.40	0.0082	-0.76	0.2236	0.36	0.6406	1.46	0.9279
-2.35	0.0094	-0.74	0.2296	0.38	0.6480	1.48	0.9306
-2.30	0.0107	-0.72	0.2358	0.40	0.6554	1.50	0.9332
-2.25	0.0122	-0.70	0.2420	0.42	0.6628	1.55	0.9394
-2.20	0.0139	-0.68	0.2483	0.44	0.6700	1.60	0.9452
-2.15	0.0158	-0.66	0.2546	0.46	0.6772	1.65	0.9505
-2.10	0.0179	-0.64	0.2611	0.48	0.6844	1.70	0.9554
-2.05	0.0202	-0.62	0.2676	0.50	0.6915	1.75	0.9599
-2.00	0.0228	-0.60	0.2743	0.52	0.6985	1.80	0.9641
-1.95	0.0256	-0.58	0.2810	0.54	0.7054	1.85	0.9678
-1.90	0.0287	-0.56	0.2877	0.56	0.7123	1.90	0.9713
-1.85	0.0322	-0.54	0.2946	0.58	0.7190	1.95	0.9744
-1.80	0.0359	-0.52	0.3015	0.60	0.7257	2.00	0.9772
-1.75	0.0401	-0.50	0.3085	0.62	0.7324	2.05	0.9798
-1.70	0.0446	-0.48	0.3156	0.64	0.7389	2.10	0.9821
-1.65	0.0495	-0.46	0.3228	0.66	0.7454	2.15	0.9842
-1.60	0.0548	-0.44	0.3300	0.68	0.7517	2.20	0.9861
-1.55	0.0606	-0.42	0.3372	0.70	0.7580	2.25	0.9878
-1.50	0.0668	-0.40	0.3446	0.72	0.7642	2.30	0.9893
-1.48	0.0694	-0.38	0.3520	0.74	0.7704	2.35	0.9906
-1.46	0.0721	-0.36	0.3594	0.76	0.7764	2.40	0.9918
-1.44	0.0749	-0.34	0.3669	0.78	0.7823	2.45	0.9929
-1.42	0.0778	-0.32	0.3745	0.80	0.7881	2.50	0.9938
-1.40	0.0808	-0.30	0.3821	0.82	0.7939	2.60	0.9953
-1.38	0.0838	-0.28	0.3897	0.84	0.7995	2.70	0.9965
-1.36	0.0869	-0.26	0.3974	0.86	0.8051	2.80	0.9974
-1.34	0.0901	-0.24	0.4052	0.88	0.8106	2.90	0.9981
-1.32	0.0934	-0.22	0.4129	0.90	0.8159	3.00	0.9987
-1.30	0.0968	-0.20	0.4207	0.92	0.8212	3.10	0.9990
-1.28	0.1003	-0.18	0.4286	0.94	0.8264	3.20	0.9993
-1.26	0.1038	-0.16	0.4364	0.96	0.8315	3.30	0.9995
-1.24	0.1075	-0.14	0.4443	0.98	0.8365	3.40	0.9997
-1.22	0.1112	-0.12	0.4522	1.00	0.8413	3.50	0.9998
-1.20	0.1151	-0.10	0.4602	1.02	0.8461	3.60	0.9998
-1.18	0.1190	-0.08	0.4681	1.04	0.8508	3.70	0.9999
-1.16	0.1230	-0.06	0.4761	1.06	0.8554	3.80	0.9999
-1.14	0.1271	-0.04	0.4840	1.08	0.8599	3.90	1.0000
-1.12	0.1314	-0.02	0.4920	1.10	0.8643	4.00	1.0000
		0.00	0.5000				

Ab hier hat es in Kapitel 6 viele Details, welche wir erst später besprechen werden. Die Zusammenfassung bereits in Kapitel 6 macht doch Sinn, damit Sie die wichtigsten Verteilungen hier kompakt wiederfinden. Operationelles Hauptziel des ersten Durchlesens sollte vorerst sein, dass Sie die folgenden 3 Tabellen und die Erklärungen dazu wieder erkennen, sich erinnern, wo gesehen und bei Bedarf nachlesen.

Drei Arten von Tabellen: In Statistikbüchern findet man gewöhnlich, so auch hier, *drei* Arten von Tabellen:

$\mathcal{N}$ : Weil jede Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  via Z-Transform zu  $\mathcal{N}(0, 1)$  transformierbar ist, reicht eine (!)  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Tabelle mit "allen" Werten; "allen" heisst bis auf die Gitter- oder Maschenbreite von mindestens 0.02 bei uns.

$\chi^2$  und t: Diese Tabellen haben *einen* sogenannten Freiheitsgrad (in R "df" von Degree of Freedom),  $n$ ,  $n \geq 1$ , welchen wir im Index angeben als  $\chi_n^2$  und  $t_n$ . Wir können nicht für jeden Freiheitsgrad df die ganze Tabelle wie bei  $\mathcal{N}$  angeben, das wäre zu viel und eine Z-Transform gibt es hier leider nicht. Stattdessen haben wir je eine Tabelle mit Zeilen von diversen df und Spalten mit häufigen  $\alpha$  (6 pro df). Vorsicht: häufig muss man in den Anwendungen einen Freiheitsgrad df abziehen!

F: hat *zwei* df,  $m, n$  je  $\geq 1$ ; deshalb  $F_{m,n}$ , Tabelle mit Zeilen und Spalten von je eigenen df ( $m, n$ ); relevanter Wert ist dann im "Fadenkreuz"; nur ein  $\alpha = 0.05$  bzw 0.95 (je nach Lesart, siehe (6.2.5)). Vorsicht: häufig muss man in den Anwendungen Freiheitsgrade (Mehrzahl) abziehen! Zum Beispiel bei der ANOVA in Kapitel 10 sind die Freiheitsgrade df  $k - 1$  im Zähler und df  $n - k$  im Nenner.

(6.2.4)  $\chi^2$ ; R: chisq

Diese Verteilung ist in der Statistik zentral wichtig und verdankt ihre Bedeutung weitgehend dem zentralen Grenzwertsatz (Kapitel 7), insbesondere, dass man in Modellen der Datenanalyse Fehlerterme häufig normalverteilt modelliert. Wenn  $(X_i)_{i=1}^n$  iid  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind, dann ist  $\sum_{i=1}^n X_i^2$   $\chi_n^2$ -verteilt (sprich "Chiquadrat mit n Freiheitsgraden" (degree of freedom, df)). Die einzelnen  $X_i^2$  sind als Quadrate alle grösser 0 und damit wandert die Verteilung mit wachsendem  $n$  nach rechts, siehe auch die Darstellung weiter unten.

Wenn  $(Y_i)_{i=1}^n$  iid  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt sind, dann hat wegen der Z-Transformation

$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

die  $\chi_n^2$ -Verteilung.  $\mu$  kennt man aber oft nicht und schätzt es deshalb mit  $\bar{Y} := \sum_{i=1}^n Y_i/n$ . Das gibt dann ein wenig überraschend: Wenn (vergleiche Zähler oben)

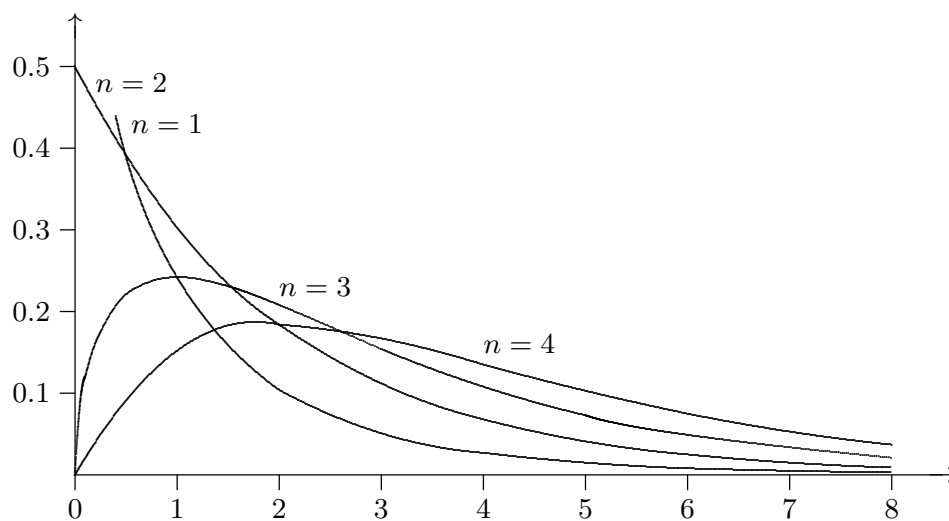
$$S^2 := \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

hat  $S^2/\sigma^2$  die  $\chi_{n-1}^2$ -Verteilung. Eine Bauernregel sagt: ein df geht verloren pro Parameter, den man schätzt ( $\mu$  wird mit  $\bar{Y}$  geschätzt). Die Dichte der  $\chi_n^2$ -Verteilung ist

$$f(x) := \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}}, \quad x \geq 0, \quad (\text{Monster I})$$

wobei die  $\Gamma$ -Funktion uns hier nicht weiter interessiert (es gilt für gerade  $n$ :  $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)!$ ).  $E[\chi_n^2] = n$ ;  $V[\chi_n^2] = 2n$ .

In Anbetracht der Definition ist es nicht überraschend, dass, wenn  $X$  eine  $\chi_a^2$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine  $\chi_b^2$ -Zufallsgrösse ist und  $X$  und  $Y$  unabhängig voneinander sind, dann ist  $W := X + Y$  eine  $\chi_{a+b}^2$ -Zufallsgrösse.



Auf der kommenden Seite sind die kritischen Werte  $\chi_{\alpha,n}^2$  für die sechs Signifikanzschwellen  $\alpha = 0.20, 0.10, 0.05, 0.02, 0.01, 0.001$  und für die Freiheitsgrade  $n$  von 1 bis 30, sowie für einige grössere Freiheitsgrade tabelliert.

Für Freiheitsgrade  $n > 30$  kann auch die folgende Approximation verwendet werden:

$$\chi_{\alpha,n}^2 \approx n \left( 1 - \frac{2}{9n} + Z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2}{9n}} \right)^3,$$

wobei  $Z_{\alpha}$  der untersten Zeile entnommen wird. Dabei ist  $Z_{\alpha} = z_{2\alpha}$ , wobei  $z_{2\alpha}$  ein kritischer Wert der Standard-Normalverteilung ist.

### Beispiel

Für  $n = 100$  und  $\alpha = 0.001$  erhält man mit dieser Formel:

$$\chi_{\alpha,n}^2 \approx 100 \left( 1 - \frac{2}{900} + 3.09 \cdot \sqrt{\frac{2}{900}} \right)^3 = 149.5,$$

also eine recht gute Approximation des Tabellenwerts. ☒

Kritische Werte der  $\chi_n^2$ -Verteilung für ein Signifikanzniveau von  $\alpha$

$n$	$\alpha$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1		1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828
2		3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816
3		4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4		5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.467
5		7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6		8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458
7		9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8		11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9		12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10		13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11		14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12		15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13		16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14		18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15		19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16		20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17		21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18		22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19		23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20		25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21		26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22		27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23		28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24		29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25		30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26		31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27		32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28		34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29		35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30		36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703
40		47.3	51.8	55.8	60.4	63.7	73.4
50		58.2	63.2	67.5	72.6	76.2	86.7
60		69.0	74.4	79.1	84.6	88.4	99.6
80		90.4	96.6	101.9	108.1	112.3	124.8
100		111.7	118.5	124.3	131.1	135.8	149.5
150		164.3	172.6	179.6	187.7	193.2	209.3
200		216.6	226.0	234.0	243.2	249.4	267.6
$Z_\alpha$		0.842	1.282	1.645	2.054	2.326	3.090

(6.2.5) F; R: f

Seien  $U$  und  $V$  zwei unabhängige,  $\chi_m^2$ -, bzw.  $\chi_n^2$ -verteilte Zufallsgrößen. Dann ist der Ausdruck

$$W := \frac{U/m}{V/n}$$

$F$ -verteilt mit Parametern  $m, n$ :  $F_{m,n}$ . Diese Zufallsgrößen kommen in Kapitel 10 vor. Für  $x \geq 0$  haben wir die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}} \quad (\text{Monster II})$$

Es gilt  $E[W] = n/(n-2)$  (falls  $n > 2$ ), also etwa 1 und  $V[W] = [2n^2(m+n-2)]/[m(n-2)^2(n-4)]$  (falls  $n > 4$ ).

Auf der kommenden Seite sind die kritischen Werte der  $F_{m,n}$ -Verteilung für ein Signifikanzniveau von 5% angegeben. Weil wir 2 Freiheitsgrade haben, wäre es sehr aufwendig, hier gleich mehrere Signifikanzniveaus anzugeben. Hingegen kann man wegen obiger Definition

$$W := \frac{U/m}{V/n}$$

schliessen, dass auch der Kehrwert  $K$

$$K := W^{-1} := \frac{V/n}{U/m}$$

eine  $F$ -Verteilung besitzt; aber jetzt mit ausgetauschten Freiheitsgraden, also  $F_{n,m}$ . Mit der Bildung des Kehrwertes werden grosse Werte neu klein und umgekehrt. Für Quantile gilt damit: obige 5 % - Grenzen werden zu unteren 5 % - Grenzen. Die nachfolgenden kritischen Werte für ein Signifikanzniveau von 5 % geben folgenden indirekt definierten Wert  $a$  an:  $P[W \geq a] = 0.05$ , oder auch  $P[W \leq a] = 0.95$ . Damit haben wir aber auch  $P[W^{-1} \leq a^{-1}] = 0.05$ . Damit haben wir also in der kommenden Tabelle zu jedem oberen kritischen Wert auch einen unteren kritischen Wert (aber zu vertauschten Freiheitsgraden). Dazu schaut man besser ein Beispiel an: sei bei  $W$   $m=3$  und  $k=17$ . Wir lesen ab:  $P[W \leq 3.197] = 0.95$ . Damit gilt auch für den Kehrwert mit  $K := W^{-1}$  und Freiheitsgraden 17 und 3 wegen  $3.197^{-1} = 0.3128$ :  $P[K \leq 0.3128] = 0.05$ .

Kritische Werte der  $F_{m,n}$ -Verteilung für ein Signifikanzniveau von 5%

$n$	$m$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	245.9	248.0	250.1	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46	
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.703	8.660	8.617	
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.858	5.803	5.746	
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.496	
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.938	3.874	3.808	
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.511	3.445	3.376	
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.218	3.150	3.079	
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.006	2.936	2.864	
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.700	
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.719	2.646	2.570	
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.617	2.544	2.466	
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.533	2.459	2.380	
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.463	2.388	2.308	
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.247	
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.352	2.276	2.194	
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.308	2.230	2.148	
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.269	2.191	2.107	
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.234	2.155	2.071	
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	2.039	
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.176	2.096	2.010	
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.151	2.071	1.984	
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.128	2.048	1.961	
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.108	2.027	1.939	
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.919	
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220	2.072	1.990	1.901	
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.056	1.974	1.884	
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.041	1.959	1.869	
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.027	1.945	1.854	
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.841	
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199	2.153	2.003	1.920	1.828	
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142	1.992	1.908	1.817	
33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179	2.133	1.982	1.898	1.806	
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170	2.123	1.972	1.888	1.795	
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114	1.963	1.878	1.786	
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106	1.954	1.870	1.776	
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145	2.098	1.946	1.861	1.768	
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091	1.939	1.853	1.760	
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131	2.084	1.931	1.846	1.752	
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.744	
41	4.079	3.226	2.833	2.600	2.443	2.330	2.243	2.174	2.118	2.071	1.918	1.832	1.737	
42	4.073	3.220	2.827	2.594	2.438	2.324	2.237	2.168	2.112	2.065	1.912	1.826	1.731	
43	4.067	3.214	2.822	2.589	2.432	2.318	2.232	2.163	2.106	2.059	1.906	1.820	1.724	
44	4.062	3.209	2.816	2.584	2.427	2.313	2.226	2.157	2.101	2.054	1.900	1.814	1.718	
45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049	1.895	1.808	1.713	
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.871	1.784	1.687	
55	4.016	3.165	2.773	2.540	2.383	2.269	2.181	2.112	2.055	2.008	1.852	1.764	1.666	
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.649	
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.812	1.722	1.622	
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.793	1.703	1.602	
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.779	1.688	1.586	
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.768	1.676	1.573	
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.717	1.623	1.516	
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854	1.691	1.597	1.488	
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850	1.686	1.592	1.482	
1000	3.851	3.005	2.614	2.381	2.223	2.108	2.019	1.948	1.889	1.840	1.676	1.581	1.471	

(6.2.6) t; R: t

Sei  $Y$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse und  $Z$  eine  $\chi_n^2$ -Zufallsgrösse;  $Y$  unabhängig von  $Z$ .

$$T_n := \frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

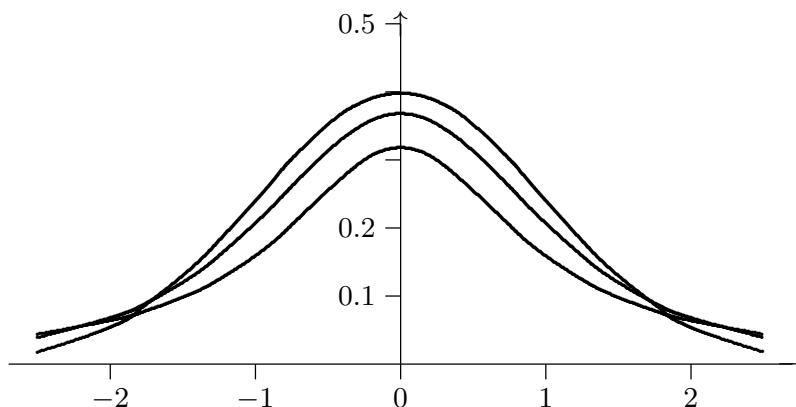
ist dann fast  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt, aber nicht genau, die genaue Verteilung ist Student- $t$ -Verteilung mit  $n$  df. Die Dichte der  $t_n$ -Verteilung ist

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Monster III})$$

Es gilt  $E[t_n] = 0$  (falls  $n > 1$  und falls  $n = 1$  existiert der Erwartungswert nicht),  $V[t_n] = n/(n-2)$ , sobald  $n > 2$ . Der Graph der Dichtefunktion  $f$  ähnelt jenem der Standard-Normalverteilung. Er ist symmetrisch zur  $y$ -Achse, aber “in der Mitte” etwas niedriger und dafür mit mehr Gewicht in den Enden als die Normalverteilung. Je grösser der Freiheitsgrad  $n$  ist, desto mehr nähert sich die  $t$ -Verteilung der Standard-Normalverteilung. Die oberste Kurve in der unteren Darstellung gehört zur Standard-Normalverteilung, die mittlere zur  $t$ -Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $n = 3$  und die unterste zur  $t$ -Verteilung mit  $n = 1$ . Der Zusammenhang mit anderen Verteilungen ist: “ $\sqrt{F_{1,n}} = |t_n|$ ” (siehe Definition);  $t_\infty = \mathcal{N}(0, 1)$ , siehe auch Tabelle auf der nächsten Seite. Dort findet man auch die kritischen Werte  $t_{\alpha,n}$  für die sechs Signifikanzschwellen  $\alpha = 0.20, 0.10, 0.05, 0.02, 0.01, 0.001$  und für die Freiheitsgrade  $n$  von 1 bis 30, sowie für einige grössere Freiheitsgrade.

Weil mit wachsendem  $n$  die Dichtefunktion der  $t$ -Verteilung gegen jene der Standard-Normalverteilung strebt, kann man für grosse  $n$  auch die kritischen Werte der Standard-Normalverteilung verwenden. Sie sind in der Zeile  $\infty$  nochmals notiert.

Der kritische Wert  $t_{\alpha,n} = t_\alpha$  bezieht sich auf den *zweiseitigen* Test mit der Signifikanzschwelle  $\alpha$ . Beim *einseitigen* Test mit der gleichen Signifikanzschwelle ist der Wert  $t_{2\alpha}$  zu wählen. Alternativ können Sie die Signifikanzschwelle in der untersten, mit \* bezeichneten, Zeile verwenden.



Kritische Werte der  $t_n$ -Verteilung für ein Signifikanzniveau von  $\alpha$

$n$	$\alpha$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35		1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40		1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45		1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50		1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60		1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70		1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80		1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90		1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100		1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
1000		1.282	1.645	1.962	2.330	2.581	3.300
$\infty$		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291
*		0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005

\*: Signifikanzschwellen für den einseitigen Test.

(6.3) Zusammenhänge bei Verteilungen I:  $\sum$  von *unabhängigen* Zufallsgrößen, vgl 7.3

Die Summanden in den folgenden Summen müssen immer unabhängig sein. Wenn nicht anders erwähnt, fordern wir auch die gleiche Verteilung. Mit kompakten Formeln wie

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n, p)$$

weiter unten ist eigentlich gemeint: Seien  $X_1, \dots, X_n$  iid  $Be(p)$ -verteilt. Dann hat

$$Y := \sum_{i=1}^n X_i$$

eine  $Bin(n, p)$ -Verteilung.

\* Summe von Bernoulli ist Binomial

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n, p)$$

\* Grosser Bruder hiervon: Summe von Binomial ist Binomial ( $p$  muss immer gleich sein!)

$$\sum_1^n Bin(n_i, p) = Bin\left(\sum_1^n n_i, p\right)$$

\* Summe von Poisson ist Poisson (Summanden müssen nicht mal identisch verteilt sein)

$$\sum_{i=1}^n Po(\lambda_i) = Po\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

\* Summe von Normal ist Normal (Summanden müssen nicht mal identisch verteilt sein)

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$