12. LÖSUNGEN DER AUFGABEN

(12.1) Lösungen zu Kapitel 1

1−1 Für den ersten der vier Buchstaben des Worts haben Sie 26 Möglichkeiten zur Auswahl, für den zweiten ebenfalls. Das macht für die zwei ersten Buchstaben schon $26 \cdot 26 = 26^2$ Möglichkeiten, für alle vier also $26^4 = 459976$ Möglichkeiten. Siehe (1.6).

1−2 a) Jede der zwanzig Personen sagt 19-mal Grüezi; alle zusammen also $20 \cdot 19 = 380$ mal. (Vgl. (1.3) mit $n = 20$, $k = 2$).) b) Wenn sich zwei Personen begrüssen, so sagen zwar beide Grüezi, schütteln sich aber nur einmal die Hand. Dies gibt $380/2 = 190$ Händedrucke. Beachten Sie, dass diese genau die Anzahl der Möglichkeiten ist, aus einer Menge von 20 Objekten eine Teilmenge mit zwei Elementen auszuwählen: $\binom{20}{2} = 190$ (1.5).

1−3 a) Analog zu Aufgabe 1−1: Für jedes der 4 Tiere gibt es 6 Möglichkeiten; total $6^4 = 1296$ (1.6). b) Für das erste Tier sind alle 6 Aufgaben möglich, für das zweite aber nur noch 5, für das dritte noch 4, für das vierte noch 3: Total $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten (1.3).

1−4 a) Nach (1.5) kann man aus 18 Personen auf $\binom{18}{4} = 3060$ Arten eine Vierergruppe auswählen (die Reihenfolge spielt ja keine Rolle). b) Hier spielt die Reihenfolge sehr wohl eine Rolle. In jeder der obigen Vierergruppen können die vier Ämtli auf $4! = 24$ Arten verteilt werden (1.4); total gibt es also $3060 \cdot 24 = 73440$ Möglichkeiten. Dies kann auch direkt ausgerechnet werden (1.3): Für den Tafelwart gibt es 18 KandidatInnen; für das Klassenbuch noch 17 usw., total $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73440$ Möglichkeiten (1.3).
Stellt man die Überlegung in b) zuerst an, so kann man die Formel für a), also $\binom{18}{4} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ direkt herleiten (vgl. (1.5)).

1−5 Für jedes Symbol gibt es zwei Zustände (ein/aus), total also $2^7 = 128$. (Dabei ist das "leere" Symbol ("alles aus") mitgezählt.)

1−6 a) Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, 8 "Objekte" anzuordnen: $8! = 40320$. Direkte Überlegung: Die erste Person hat 8 Möglichkeiten; die zweite 7, die dritte 6, etc.: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ (vgl. (1.4). b) Man kann dies verschieden anpacken. Am einfachsten geht's wohl so: Gretel nimmt zuerst Platz; dazu hat sie 8 Möglichkeiten. Für Hänsel gibt es dann nur noch zwei Plätze (links und rechts von seiner Gretel). Die restlichen 6 Plätze können auf 6! Arten belegt werden. Total $8 \cdot 2 \cdot 6! = 11520$ Möglichkeiten.

1−7 Wie in Aufgabe 1−4 gibt es in der ersten Klasse $\binom{20}{3}$, in der zweiten $\binom{18}{3}$ und in der dritten $\binom{15}{2}$ Möglichkeiten, gesamthaft also $\binom{20}{3} \cdot \binom{18}{3} \cdot \binom{15}{2} = 97675200$.

1−8 Von den 20 Frauen kann man auf $\binom{20}{4}$ Arten vier auswählen (vgl. Aufgabe 1−4), von den Männern analog auf $\binom{10}{2}$ Arten zwei. Total $\binom{20}{4} \cdot \binom{10}{2} = 4845 \cdot 45 = 218025$. Dies ist im Grunde dieselbe Überlegung wie beim Zahlenlotto (3.4.4.A), siehe auch (4.1.9.c).

1−9 Ähnlich wie in Aufgabe 1−8: Für den ersten Käfig muss man vier der zwölf Tiere auswählen. Dies geht auf $\binom{12}{4}$ Arten (die Reihenfolge spielt ja keine Rolle, vgl. (1.5)). Dann bleiben noch acht übrig, für den 2. Käfig gibt's noch $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten, für die letzten 4 bleibt keine Wahl mehr (übereinstimmend ist $\binom{4}{4} = 1$). Total $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = 495 \cdot 70 = 34650$.

1−10 a) Mit der Königin sind es elf Bienen; dies ergibt (Anzahl der fünf-elementigen Teilmengen einer elf-elementigen Menge (1.5)) $\binom{11}{5} = 462$ Arten. b) Jetzt sind es $\binom{10}{5} = 252$ Arten.

1−11 a) Es gibt $\binom{n+1}{k}$ Möglichkeiten, aus allen Bienen k auszuwählen. b) Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus den Arbeiterbienen k auszuwählen. Nun kann die Anzahl gemäss a) noch anders interpretiert werden: Entweder wähle ich k der n Arbeiterbienen (ohne Königin) (wie in b)), oder ich wähle nur $k-1$ Arbeiterbienen aus, was auf $\binom{n}{k-1}$ Arten geht) und nehme noch die Königin dazu. Zusammen muss ich $\binom{n+1}{k}$ erhalten. Dies führt auf die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, die Sie auch durch Nachrechnen bestätigen können.

(12.2) Lösungen zu Kapitel 2

2−1 a) Quantitativ und stetig, b) quantitativ und diskret, c) qualitativ, d) quantitativ und diskret, e) quantitativ und stetig, f) qualitativ.

2−2 a) Nominalskala. b) Ordinalskala. c) Verhältnisskala. d) Verhältnisskala. e) Intervallskala (die Höhenangabe bezieht sich auf einen willkürlich gewählten Nullpunkt). f) Verhältnisskala.

2−3 Die Skalen werden mit N, O, I und V abgekürzt. 7:N, 3141:N, 27:I, 14:N, 1:O, 708:N, 703:I, 4:V, 5:V, 75:I, 13:O, 129:V.

Mögliche Diskussionspunkte:

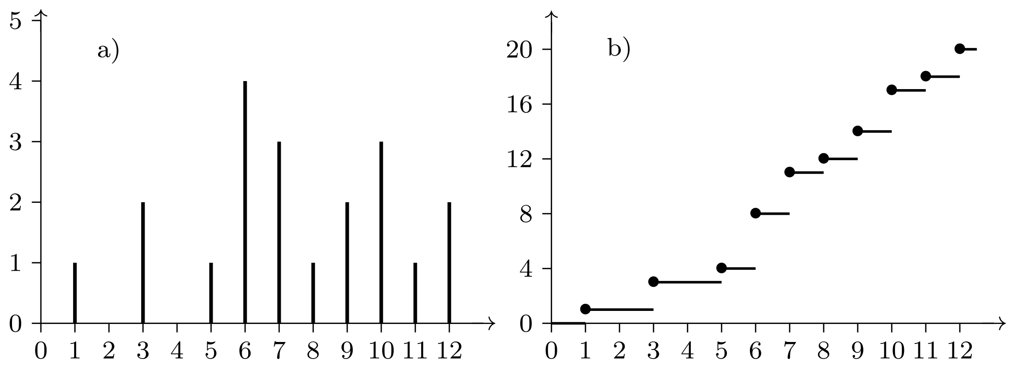
Die Hausnummer 7 ist gemäss der üblichen Interpretation bloss eine Bezeichnung des Hauses, das auch etwa "zum goldenen Ochsen" heissen könnte. Anderseits sind die Hausnummern in einer Strasse normalerweise systematisch angebracht: Je höher die Nummer, desto weiter ist das Haus vom Anfang der Strasse entfernt. Ist man also der Auffassung, dass die Hausnummern nicht in erster Linie der Identifikation, sondern der Angabe der Reihenfolge entlang der Strasse dienen, so muss man von einer Ordinalskala sprechen. Ähnlich lässt sich über die Gleisnummer streiten. Zwar sind die Geleise üblicherweise der Reihe nach nummeriert, aber hier scheint doch die "nominale Funktion" im Vordergrund zu stehen. Diese Beispiele zeigen, dass die Art der Skala auch von der gewählten Betrachtungsweise abhängig sein kann.

Da vom 1. Juli bis zum 5. Juli gleichviel Zeit vergeht wie vom 13. Juli bis zum 17. Juli, liegt eine Intervallskala vor. Es ist aber nicht sinnvoll, vom "Doppelten des 1. Juli" oder dergleichen zu sprechen, es handelt sich also nicht um eine Verhältnisskala.

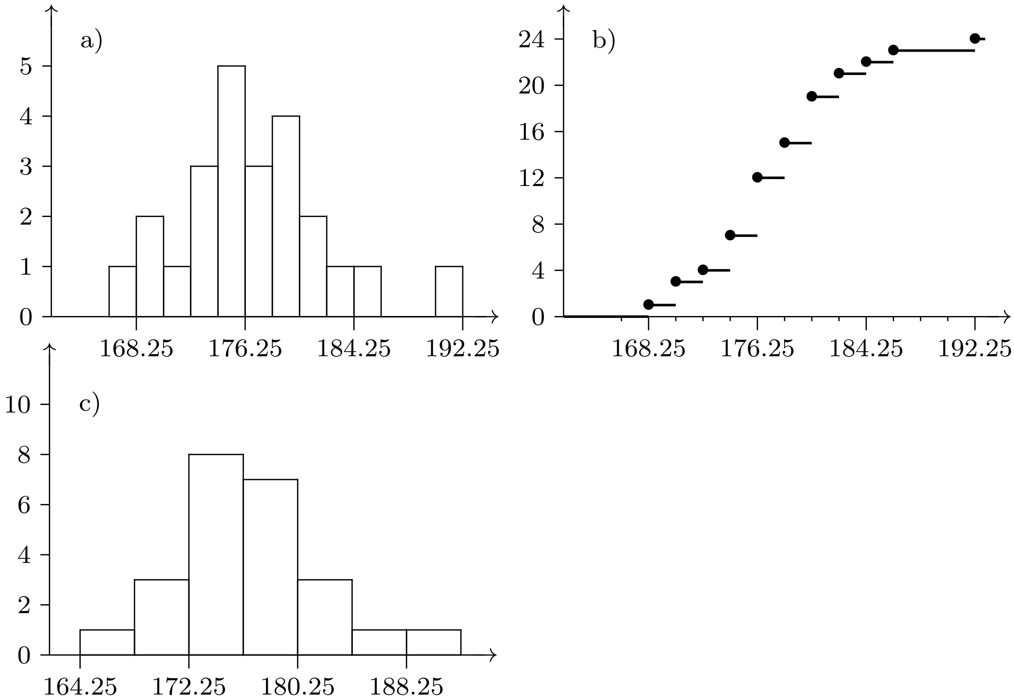
Die Zugsnummer ist eine Nominalskala. Ein Blick ins Kursbuch zeigt, dass die Zugsnummern keine erkennbare "ordinale Funktion" haben.

Die Abfahrtszeit ist keine Verhältnisskala. Die Aussage "mein Zug fährt 10% früher ab als deiner" ist nicht sinnvoll.

2−4



2−5



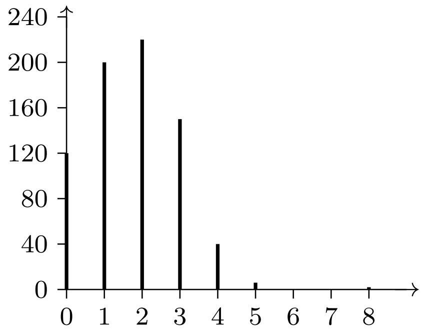
Es wird auf 0.5 cm genau gemessen. Die Angabe "182.0" beispielsweise bedeutet also, dass die effektive Körperlänge im Intervall $(181.75, 182.25]$ liegt (182.0 ist dann die Klassenmitte). Die Intervalle der Breite 2 cm (in a)) bzw. 4 cm (in c)) beginnen entsprechend mit $(166.25, 168.25]$ bzw. $(164.25, 168.25]$. Wie in (2.2.2.7) angegeben, springt die Treppenkurve in b) jeweils am Ende des Intervalls. Der erste Sprung erfolgt also bei 168.25.

2−6 $\bar{x} = 2.4$, $\tilde{x} = \frac{1}{2}(2.3 + 2.5) = 2.4$.

2−7 a) $\bar{x} = 7.4$. b) $\tilde{x} = 7$. c) Modus $= 6$. d) Interdezilbereich $= 11 - 3 = 8$. e) $s^2 = 9.2$. f) $s = 3.033$.

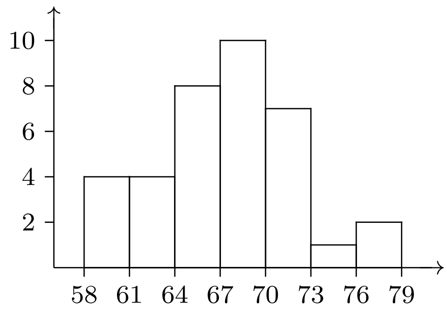
2−8 Wir ordnen die Zahlen der Grösse nach: 20, 22, 23, 25, 25, 30. Für $U \geq 25$ ist der mittlere Wert, also der Median $\tilde{x} = 25$, für $U = 24$ ist $\tilde{x} = 24$ und für $U \leq 23$ ist $\tilde{x} = 23$. Andere Werte kommen nicht in Frage.

2−9 a)



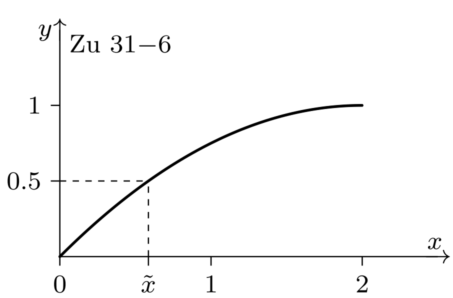
b) $\bar{x} = 1.7476$, $\tilde{x} = 2$. Zur Berechnung der Varianz kann man die Formel von (2.2.3.7.d) verwenden. Man findet $n = 737$, $\sum H_i x_i = 1288$, $\sum H_i x_i^2 = 3284$. Es folgt $s^2 = \frac{1}{736}\left(3284 - \frac{1}{737} 1288^2\right) = 1.4036$.

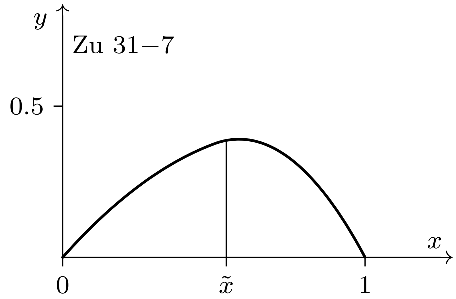
2−10 a)



b) $\bar{x} = \frac{1}{36}(4 \cdot 59.5 + 4 \cdot 62.5 + 8 \cdot 65.5 + 10 \cdot 68.5 + 7 \cdot 71.5 + 1 \cdot 74.5 + 2 \cdot 77.5) = 67.4167$. Der Median wird mit der Methode von (2.2.3.4.c) bestimmt. Er liegt in der Klasse (67,70], die 10 Eier enthält. Davon sind 2 "nach links" und 8 "nach rechts" zu verteilen. Es folgt $\tilde{x} = 67 + \frac{2}{10}3 = 67.6$. Schliesslich ist $s^2 = 21.679$.

2−11 Die Funktion $F(x) = x - \frac{1}{4}x^2$ wächst im Intervall [0,2] und es ist $F(0) = 0,\ F(2) = 1$. Ihr Graph kann deshalb als idealisierte Summenhäufigkeitverteilung aufgefasst werden. Gemäss der Figur am Ende von (2.2.3.4) ist $\tilde{x}$ durch die Bedingung $F(\tilde{x}) = 0.5$ bestimmt. Es ist also die Gleichung $x - \frac{1}{4}x^2 = 0.5$ zu lösen. Man findet $\tilde{x} = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$.





2−12 Wir kontrollieren den Flächeninhalt unter der Kurve (er sollte 1 geben). Er ist gegeben durch

$$\int_0^1 4(x - x^3)\, dx = 4\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1\ .$$

Der Median $\tilde{x}$ ist durch die Bedingung

$$\int_0^{\tilde{x}} 4(x - x^3)\, dx = \frac{1}{2}$$

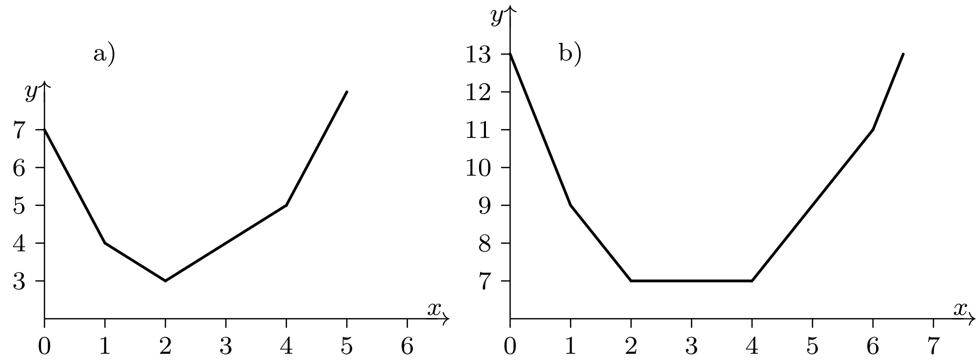
gegeben. Man erhält die Gleichung

$$4\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\tilde{x}} = 2\tilde{x}^2 - \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}\ ,$$

also eine quadratische Gleichung für $\tilde{x}^2$ und findet $\tilde{x}^2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\tilde{x} = 0.5412$.

2−13 Wir leiten die Funktion $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2$ nach x ab und finden $f'(x) = -2[(x_1 - x) + (x_2 - x) + \ldots + (x_n - x)]$. Nullsetzen liefert $nx = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$, also $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$. Unter Verwendung der zweiten Ableitung erkennt man sofort, dass es sich um ein Minimum handelt. Der Ausdruck $\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$ wird also gerade dann minimal, wenn x gleich dem Durchschnitt $\bar{x}$ ist.

2−14 a) Das Minimum wird an der Stelle $x = 2$ angenommen. Dies ist der mittlere Wert, also der Median von 1, 2, 4.
b) Hier ist die Anzahl der gegebenen Werte (1, 2, 4, 6) gerade und es gibt keinen einzelnen mittleren Wert, wohl aber zwei mittlere Werte, nämlich 2 und 4. Wie der Graph zeigt, liefert jedes x mit $2 \le x \le 4$ ein Minimum von $g(x)$. In diesem Sinne könnte jeder solche Wert x als Median interpretiert werden, doch besagt die übliche Konvention, dass man $\tilde{x} = \frac{1}{2}(2+4) = 3$ wählt.



Man kann sich überlegen, dass dieser Sachverhalt auch allgemein gilt: Bei einer ungeraden Anzahl von Werten wird das Minimum von $g(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$ für den Median angenommen. Bei einer geraden Anzahl von Werten verläuft der Graph zwischen den beiden mittleren Werten horizontal.

Beachten Sie die Analogie zu Aufgabe 2−13, wo der Durchschnitt $\bar{x}$ das Minimum der Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$ lieferte.

(12.3) Lösungen zu Kapitel 3

3−1 Zunächst ist $\alpha = 50\%$, woraus $\beta + \gamma + \delta = 50\%$ folgt. Ferner ist $\beta = 7\delta$, $\gamma = 2\delta$. Es folgt $10\delta = 50\%$ und somit $\beta = 35\%$, $\gamma = 10\%, \delta = 5\%$. Da diese Werte experimentell gefunden wurde, liegt hier eine *idealisierte relative Häufigkeit* vor.

3−2 Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten für die vier Blutgruppen mit p_0, p_A, p_B, p_{AB}. Da jeder Mensch zu einer dieser Blutgruppen gehört, ist $p_0 + p_A + p_B + p_{AB} = 1$. Ferner ist angegeben, dass $p_B = 2p_{AB}$ ist. Setzt man dies zusammen mit $p_0 = 0.40$, $p_A = 0.42$ ein, so folgt $3p_B = 1 - 0.40 - 0.42 = 0.18$. Daraus ergibt sich a) $p_B = 0.12, p_{AB} = 0.06$, b) $p_A + p_{AB} = 0.48$. Die verwendeten Wahrscheinlichkeiten sind *idealisierte relative Häufigkeiten.*

3−3 a) $11/20 = 0.55$, b) $8/20 = 0.4$. Da jede Maus dieselbe Chance hat, ausgewählt zu werden, gibt es 20 mögliche Fälle. Beim verwendeten Wahrscheinlichkeitsbegriff handelt es sich um die *klassische Wahrscheinlichkeit.*

3−4 Wir zählen die Erbsen, die kantig oder grün (oder beides zusammen) sind: 700 (grüne) + 400 (kantige). Dabei sind aber die 200 Erbsen, die sowohl grün als auch kantig sind, doppelt gezählt worden. Somit sind 900 Erbsen kantig oder grün, und die Wahrscheinlichkeit, eine solche herauszupicken ist $900/1000 = 0.9$. Diese Zahl errechnet sich aus 1000 möglichen und 900 günstigen Fällen, es liegt der *klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff* vor.

Eine einfache Rechnung zeigt übrigens, dass folgende Verteilung vorliegt: Von den 1000 Erbsen sind 200 grün und kantig, 500 grün und rund, 200 gelb und kantig, 100 gelb und rund.

3−5 a) Das beschriebene Ereignis trifft in 16 Fällen zu:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,4), (2,6), (3,1), (3,6), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (6,2), (6,3).

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $16/36 = 4/9 = 0.4444$.

b) Hier sind 8 Fälle günstig, nämlich

$$(1{,}3),\ (2{,}4),\ (3{,}1),\ (3{,}5),\ (4{,}2),\ (4{,}6),\ (5{,}3),\ (6{,}4).$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $8/36 = 2/9 = 0.2222$.
c) Hier sind 20 Fälle günstig, nämlich

$$(1{,}3),\ (1{,}4),\ (1{,}5),\ (1{,}6),\ (2{,}4),\ (2{,}5),\ (2{,}6),\ (3{,}5),\ (3{,}6),\ (4{,}6),$$

sowie die "gespiegelten", nämlich (3,1), (4,1), ..., (6,4). Die Wahrscheinlichkeit beträgt $20/36 = 5/9 = 0.5556$.
d) Hier gibt es 6 günstige Fälle, nämlich

$$(1{,}2),\ (2{,}1),\ (2{,}4),\ (3{,}6),\ (4{,}2),\ (6{,}3).$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $6/36 = 0.1667$.
Zur Lösung dieser Aufgabe wurde der *klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff* benützt.

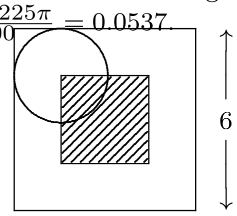
3−6 Wir verwenden den *klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff*. Es gibt dreissig mögliche Fälle. Davon sind günstig:
a) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, also 7 Zahlen.
b) 1, 4, 9, 16, 25, also 5 Zahlen.
c) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, also 10 Zahlen (beachten Sie, dass 1 keine Primzahl ist).
d) 6, 28, also 2 Zahlen.
Für die Wahrscheinlichkeiten gilt somit: a) $7/30 = 0.2333$, b) $5/30 = 0.1667$, c) $10/30 = 0.3333$, d) $2/30 = 0.0667$.

3−7 Hier liegt die *klassische Wahrscheinlichkeit* vor; es gibt 2500 mögliche Fälle.
a) Günstig sind hier: Startnummer 1, die 10 Nummern von 10 bis 19, die 100 Nummern von 100 bis 199 und die 1000 Nummern von 1000 bis 1999. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1111/2500 = 0.4444$.
b) Jede zehnte Nummer endet mit 1, die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.1.

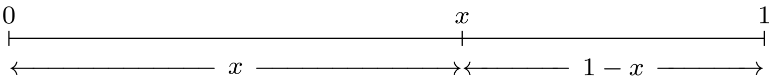
3−8 Gemäss (2.2.3.3.a) bzw. (2.2.3.4.a) ist $\bar{x} = 57.5$, $\tilde{x} = 59$. Wir verwenden die klassische Wahrscheinlichkeit. Im Fall a) sind zwei von sechs Fällen günstig, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 1/3; im Fall b) sind es drei von sechs Fällen, hier ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1/2. (Das zweite Resultat ist auch ohne jede Rechnung klar, denn bei einer geraden Zahl von Messwerten ist genau die Hälfte aller Werte kleiner als der Median, weil dieser gerade durch diese Bedingung definiert ist.)

3−9 Hier wird mit der *geometrischen Wahrscheinlichkeit* gearbeitet. Das Quadrat hat den Inhalt 900 cm^2, der grosse Kreis den Inhalt 225π cm^2 und der kleine den Inhalt 25π cm^2. Es folgt für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten: a) $25\pi/900 = 0.0873$, b) $\frac{1}{4}\,\frac{900-225\pi}{900} = 0.0537$.

3−10 Ein Fünfliber hat einen Durchmesser von 3.1 cm. Wir betrachten das Karo, in welchem der Mittelpunkt der Münze liegt. Diese liegt genau dann ganz innerhalb des Karos, wenn der Mittelpunkt im schraffierten Quadrat liegt. Dessen Seite misst $6 - 3.1 = 2.9$ cm. Unter Verwendung der *geometrischen Wahrscheinlichkeit* folgt, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $2.9^2/6^2 = 0.2336$ ist.



3−11 Dieses Problem lässt sich geometrisch lösen. Mit x bezeichnen wir den Abstand des markierten Punktes vom linken Ende.



a) Die Bedingung lautet $|x - (1-x)| \leq 0.1$, also $|2x - 1| \leq 0.1$ oder $-0.1 \leq 2x - 1 \leq 0.1$. Es folgt $0.9 \leq 2x \leq 1.1$ oder $0.45 \leq x \leq 0.55$. Das für das gesuchte Ereignis günstige Intervall hat die Länge 10 cm; da der Stab 1 m lang ist, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich 0.1.

b) Hier unterscheiden wir die Fälle $x < 0.5$ und $x \geq 0.5$. Im ersten Fall hat das längere Stück die Länge $1 - x$ und muss mehr als doppelt so lang sein als das kürzere Stück. Es muss gelten $1 - x > 2x$, woraus $x < \frac{1}{3}$ folgt (was mit $x < 0.5$ verträglich ist).
Im zweiten Fall hat das längere Stück die Länge x, und es muss $x > 2(1-x)$ sein. Es folgt $x > \frac{2}{3}$ (verträglich mit $x \geq 0.5$).
Gesamthaft gesehen sind alle Fälle günstig, wo der markierte Punkt im Intervall $[0, \frac{1}{3})$ oder im Intervall $(\frac{2}{3}, 1]$ liegt. Diese haben zusammen die Länge $\frac{2}{3}$, und dies ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

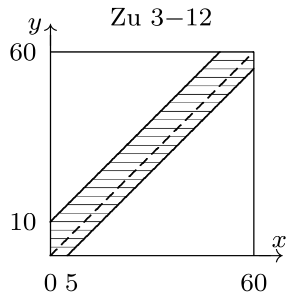
3−12 Die Lösung verwendet wie in Beispiel 3.1.3.F eine *geometrische Interpretation* der Wahrscheinlichkeit. In a) wird dieselbe Überlegung wie im Beispiel angestellt, nur wird die Zahl

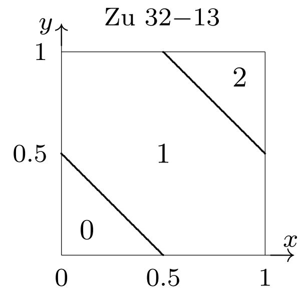
20 durch die unbekannte Grösse T ersetzt. Man findet, da die Wahrscheinlichkeit eines Treffens gleich 0.5 sein soll,

$$\frac{3600-(60-T)^2}{3600} = 0.5 ,$$

was auf die quadratische Gleichung $T^2 - 120T + 1800 = 0$ führt. Davon ist für unsere Aufgabe nur die Lösung $60 - \sqrt{1800} = 17.57$ Minuten brauchbar.
b) Wenn Xaver vor Yvonne eintrifft, d.h., wenn $x < y$ ist, dann treffen sich die beiden, falls $y - x \leq 10$ ist, denn Xaver ist maximal 10 Minuten im Café. Der für das Treffen günstige Streifen wird also begrenzt durch die Geraden $y = x$ und $y = 10 + x$. Ist aber Yvonne vor Xaver da, dann ist $x > y$, und zudem muss $x - y \leq 5$ sein. Die Grenzen für das günstige Gebiet sind die Geraden $y = x$ und $y = x - 5$ (siehe die unten stehende Figur). Die Wahrscheinlichkeit eines Treffens ist also gegeben durch

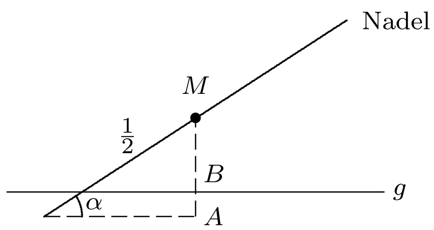
$$\frac{3600 - \frac{1}{2}55^2 - \frac{1}{2}50^2}{3600} = 0.2326 .$$

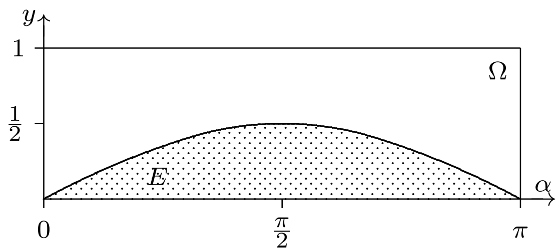




3−13 Die zufällige Auswahl von zwei reellen Zahlen x, y mit $0 \leq x, y \leq 1$ wird durch die zufällige Auswahl eines Punktes im Quadrat mit den Ecken (0,0), (0,1), (1,0) und (1,1) dargestellt. Die üblichen Rundungsregeln ergeben den Wert 0 für $0 \leq x + y < 0.5$, den Wert 1 für $0.5 \leq x + y < 1.5$ und den Wert 2 für $1.5 \leq x + y \leq 2$. Diese drei Teilbereiche des Quadrats sind durch die Geraden $y = 0.5 - x$ und $y = 1.5 - x$ begrenzt (siehe die oben stehende Figur). Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden geometrisch ermittelt. Da die Dreiecke den Inhalt 1/8 haben, erhält man die gerundeten Werte 0, 1 bzw. 2 mit den Wahrscheinlichkeiten 1/8, 3/4 bzw. 1/8.

3−14 Die Nadel hat die Länge 1, der Abstand der parallelen Geraden beträgt 2. Somit trifft die Nadel höchstens eine Gerade. Mit M bezeichnen wir den Mittelpunkt der Nadel, mit g jene Gerade, die am nächsten bei M liegt. (Sollte M genau in die Mitte zwischen zwei Geraden zu liegen kommen, so kommt es nicht darauf an, welche wir wählen.) Der Abstand y von M zu g ist gleich der Länge der Strecke MB. Die Nadel trifft die Gerade genau dann, wenn dieses y kleiner als die oder gleich der Länge der Strecke MA ist. Der Figur links ist zu entnehmen, dass MA die Länge $\frac{1}{2}\sin\alpha$ hat (die Nadel hat ja die Länge 1). Dies gilt — wie Sie sich überlegen können — auch wenn der Winkel α stumpf ist. Nun interpretieren wir die Situation mit einem geometrischen Modell.





Die möglichen Lagen der Nadel werden durch die Paare (α, y) gegeben, wobei $0 \leq \alpha < \pi$ und $0 \leq y \leq 1$ ist. Die Menge dieser Punkte bildet im α-y-Koordinatensystem ein Rechteck Ω mit Inhalt $1 \cdot \pi = \pi$. Die Nadel trifft die Gerade genau dann, wenn $y \leq \frac{1}{2}\sin\alpha$ ist. Die Menge aller Paare (α, y), welche dieser Bedingung genügen, wird durch die α-Achse und die Kurve $y = \frac{1}{2}\sin\alpha$ begrenzt. Das entsprechende Flächenstück E hat den Inhalt

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha = 1 .$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nun der Quotient der Inhalte von E und Ω, also wie behauptet gleich $\frac{1}{\pi}$.

3−15 Jeder der vier Artikel ist brauchbar (1) bzw. unbrauchbar (0). Der Ergebnisraum Ω besteht deshalb aus den $2^4 = 16$ Quadrupeln

$$(0\ 0\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 0\ 1),\ (0\ 0\ 1\ 0),\ \ldots,\ (1\ 1\ 1\ 0),\ (1\ 1\ 1\ 1)\ .$$

a) A besteht aus den 8 Quadrupeln die mit 0 beginnen, nämlich

$$(0\ 0\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 0\ 1),\ (0\ 0\ 1\ 0),\ (0\ 0\ 1\ 1),\ (0\ 1\ 0\ 0),\ (0\ 1\ 0\ 1),\ (0\ 1\ 1\ 0),\ (\ 0\ 1\ 1\ 1)\ .$$

b) $B = \{(0\ 1\ 1\ 1)\}$. Dieses Ereignis besteht nur aus einem Element, es handelt sich also um ein Elementarereignis.

c) C besteht aus allen Quadrupeln mit mindestens zwei Einsen, also

$$(0\ 0\ 1\ 1),\ (0\ 1\ 0\ 1),\ (0\ 1\ 1\ 0),\ (0\ 1\ 1\ 1),\ (1\ 0\ 0\ 1),$$
$$(1\ 0\ 1\ 0),\ (1\ 0\ 1\ 1),\ (1\ 1\ 0\ 0),\ (1\ 1\ 0\ 1),\ (1\ 1\ 1\ 0),\ (1\ 1\ 1\ 1).$$

d) $A \cap C = \{(0\ 0\ 1\ 1),\ (0\ 1\ 0\ 1),\ (0\ 1\ 1\ 0),\ (0\ 1\ 1\ 1)\}$. In Worten: “Der erste Artikel ist unbrauchbar, aber mindestens zwei sind brauchbar.” Dies kann auch anders formuliert werden, z.B.: “Der erste Artikel und höchstens noch ein weiterer sind unbrauchbar.”

3−16 a) $\Omega = \{$AA, ABA, ABB, BAA, BAB, BB$\}$.
b) $B = \{$ABB, BAB, BB$\}$.
c) $C = \{$ABA, ABB, BAA, BAB$\}$.
Dabei steht z.B. ABB für “Spielerin A gewinnt Satz 1, Spielerin B gewinnt Sätze 2 und 3”.

3−17 $\Omega = \{\bigcirc\bigcirc,\ \bigcirc\times,\ \bigcirc\square,\ \times\bigcirc,\ \times\times,\ \times\square,\ \square\bigcirc,\ \square\times,\ \square\square\}$.

a) Kind 1 gewinnt: $\{\bigcirc\times,\ \times\square,\ \square\bigcirc\}$.
b) Kind 2 gewinnt: $\{\times\bigcirc,\ \square\times,\ \bigcirc\square\}$.
c) Unentschieden: $\{\bigcirc\bigcirc,\ \times\times,\ \square\square\}$.

3−18 $\Omega = \{x \mid x > 0\}$. Es könnte auch eine willkürliche (genügend grosse) obere Grenze für x gewählt werden, vgl. Beispiel 3.2.3.D.
a) $A = (0, 60)$, b) $B = [61, 65]$, c) $C = (64, \infty)$. d) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$.

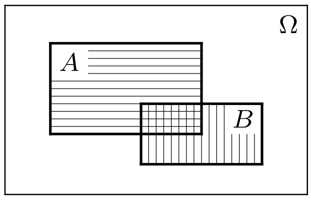
3−19 a) $\Omega = \{$KKK, KKM, KMK, KMM, MKK, MKM, MMK, MMM$\}$.
b) $E = \{$KKM, KMK, MKK$\}$, $F = \{$MKK, MKM, MMK, MMM$\}$. c) $E \cap F = \{$MKK$\}$: Das älteste Kind ist ein Mädchen, die beiden jüngeren sind Knaben. $\overline{E}$: In der Familie hat es nicht genau ein Mädchen. $\overline{E} \cap F = \{$MKM, MMK, MMM$\}$: Das älteste Kind ist ein Mädchen und hat noch mindestens eine Schwester.

3−20 a) 26 (es gibt 26 Kantone bzw. Halbkantone). b) $G = \{$GL, ZG, SG, GR, AG, TG, GE$\}$. c) $B = \{$ZH, LU, ZG, GR, AG, TI$\}$. d) $G \cap B = \{$ZG, GR, AG$\}$ ist die Menge aller Kennzeichen, auf denen sowohl der Buchstabe G als auch die Farbe blau vorkommt.

3−21 Der Ergebnisraum Ω besteht aus den 36 Paaren (m, n), wobei m und n die Zahlen von 1 bis 6 durchlaufen, vgl. Beispiel 3.1.3.B. a) $A = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$. b) $B = \{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)\}$. c) $C = \{(1,4),\ (4,1),\ (1,5),\ (5,1),\ (1,6),\ (6,1),\ (2,5),\ (5,2),\ (2,6),\ (6,2),\ (3,6),\ (6,3)\}$. d) $A \cap B = \{(3,3)\}$, $A \cap C = \varnothing$ (die Ereignisse A, C sind also unvereinbar), $B \cap C = \{(1,5),\ (5,1)\}$.

3−22 a) $\Omega = \{21, 22, 23, \ldots, 38, 39, 40\}$.
$A = \{21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$.
$B = \{23, 29, 31, 37\}$.
$C = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$.
$D = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}$.
b) $A \cap C \cap D = \{33, 39\}$. In Worten: Es wird eine durch 3 teilbare ungerade Zahl > 30 (und ≤ 40) gezogen.
c) $B \cap C = \varnothing$, denn eine Primzahl > 3 ist nicht durch drei teilbar.
d) Jede Primzahl > 2 ist ungerade.

3−23 Die Überlegung anhand von Venn-Diagrammen sei Ihnen überlassen. (Diese Formeln nennt man übrigens die “de Morgan-Regeln” [nach A. de Morgan, 1806-1871].) Für die Interpretation mit Ereignissen erfinden wir eine ganz konkrete Situation (was natürlich auf beliebig viele Arten geht): Ω sei die Menge aller Studierenden an der Universität Zürich. Das Zufallsexperiment sei die Auswahl einer Person. Mit A bezeichnen wir das Ereignis “der Vorname dieser Person beginnt mit A”, B sei das Ereignis “der Nachname beginnt mit B”. $A \cap B$ ist dann das Ereignis “der Vorname beginnt mit A *und* der Nachname beginnt mit B”. $\overline{A \cap B}$ ist das Gegenereignis. Dieses tritt offensichtlich genau dann ein, wenn entweder der Vorname *nicht* mit A ($\bar{A}$) *oder* der Nachname *nicht* mit B ($\bar{B}$) beginnt (oder beides), wenn also $\bar{A} \cup \bar{B}$ eintritt. Damit ist die erste Formel ($\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$) bewiesen. Die zweite geht analog.



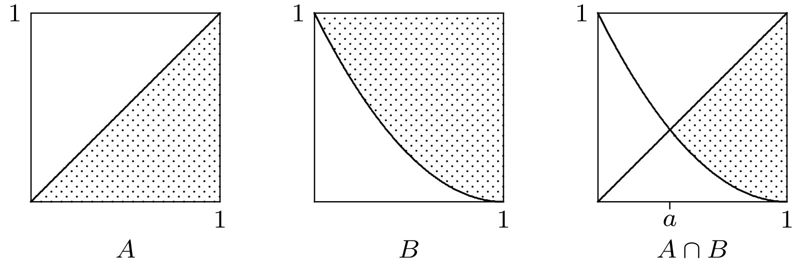
3−24 Pro memoria: Das Zeichen \ bezeichnet die "mengentheoretische Differenz" (siehe (26.2.d) im ersten Band): $X \setminus Y$ besteht aus allen Elementen von X, welche nicht in Y liegen.

a) $A \cup B$ besteht aus dem gesamten schraffierten Bereich, $A \cap B$ aus dem mit waag- und senkrechten Linien markierten Teil. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ist somit der aus den nur waagrecht bzw. nur senkrecht schraffierten "hakenförmigen" Teilen bestehende Bereich. Nun besteht aber der nur senkrecht schraffierte Haken

gerade aus jenen Punkten des Rechtecks Ω, welche zwar in B, nicht aber in A liegen, ist also gleich $\bar{A} \cap B$. Analog ist der andere Haken $= A \cap \bar{B}$. Daraus folgt die gesuchte Formel.

b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ist die Menge aller Studierenden, welche entweder eine altsprachliche Matur haben oder aber Biologie studieren, aber nicht beides. Dies ist dasselbe wie die Menge all jener, welche keine solche Matur haben und Biologie studieren ($\bar{A} \cap B$)) vereinigt mit der Menge aller, welche eine altsprachliche Matur haben und nicht Biologie studieren ($A \cap \bar{B}$). So ergibt sich die Formel nochmals.

3–25 a) Ω wird durch das Quadrat mit den Eckpunkten (0,0), (0,1), (1,0) und (1,1) dargestellt. b), c), d):



e) Der Flächeninhalt von B ist gegeben durch $1 - \int_0^1 (x-1)^2\,dx = 2/3$. Da Ω den Inhalt 1 hat, ist dies auch die gesuchte (geometrische) Wahrscheinlichkeit. f) Der Schnittpunkt ist gegeben durch die zwischen 0 und 1 liegende Lösung a der Gleichung $x = (x-1)^2$, d.h., der Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$, also $a = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = 0.3820$. Der Inhalt von $A \cap B$ und damit die Wahrscheinlichkeit von $A \cap B$ ist gleich

$$\int_a^1 \left(x - (x-1)^2\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} = 0.3484\,.$$

3–26 Mit A (bzw. B) bezeichnen wir das Ereignis “Die Prüfung in Alphalogie (bzw. Betametrie) wird bestanden”. Bekannt sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ sowie $P(A \cap B) = 0.6$. Gesucht ist $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Nun ist aber $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. (Dies lässt sich einem Venn-Diagramm entnehmen oder aber der folgenden direkten Überlegung: Die Personen, welche in Alphalogie *und* in Betametrie durchfallen, sind genau dieselben wie jene, welche nicht in wenigstens einem der beiden Gebiete bestehen, vgl. auch Aufgabe 3–23.)

Nach Regel 7 ist nun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.7 - 0.6 = 0.9\ ,$$

und es folgt (mit Regel 6)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1\ .$$

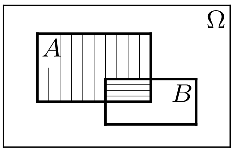
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit 0.1 (oder 10%).

3–27 Zunächst ist (Regel 6) $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0.6 = 0.4$. Nach Regel 7 ist $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$. Es folgt $P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F) - P(E) = 0.7 + 0.2 - 0.4 = 0.5$.

3–28 A ist eine Teilmenge von B. Wir “ergänzen” A zu B wie folgt: Die Menge $B \cap \bar{A}$ ist die Menge aller Elemente von B, welche nicht in A liegen. Somit ist $B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Ferner sind A und $B \cap \bar{A}$ unvereinbar (es ist ja $A \cap \bar{A} = \varnothing$). Aus Regel 4 folgt nun $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$. Nach Axiom 1 ist $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, somit muss $P(A) \leq P(B)$ sein.

3–29 a) $A \cap B$ bedeutet, dass sowohl A als auch B eintrifft. $A \cap \bar{B}$ besagt, dass A eintrifft, dass aber B nicht eintrifft.

b)



Waagrecht schraffiert: $A \cap B$.
Senkrecht schraffiert: $A \cap \bar{B}$.

c) Wie man dem obigen Diagramm entnehmen kann, ist $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$. (Anstelle der Betrachtung des Diagramms kann man sich auch überlegen, dass jedes Element von A entweder in B oder in $\bar{B}$ liegen muss, was auf dieselbe Beziehung führt.) Ferner ist $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \varnothing$. (Dies entnimmt man wieder dem Diagramm oder aber auch der Tatsache, dass schon $B \cap \bar{B} = \varnothing$ ist.)
Nach Axiom 3 ist dann

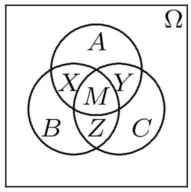
$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\big) = P(A)\,.$$

Beachten Sie, dass hier rein abstrakt argumentiert wurde, ohne Bezugnahme auf eine konkrete Art von Wahrscheinlichkeit (klassische oder geometrische Wahrscheinlichkeit etc.).
d) Wegen c) ist $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$ aber auch $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$. Somit ist die gesuchte Summe $= 1$.

3−30 Die gesuchte Formel lautet

(1) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\,.$

Wir interpretieren dazu Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalte (mit $P(\Omega) = 1$). Wir müssen den Inhalt von $A \cup B \cup C$ bestimmen. Wenn wir $P(A) + P(B) + P(C)$ bilden, dann werden die "Kreisbogendreiecke" X, Y und Z doppelt, das "Kreisbogendreieck" M sogar dreifach gezählt. Bilden wir nun $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$, so haben wir die doppelte Zählung von X, Y und Z kompensiert, denn es ist ja $A \cap B = X \cup M$ usw. Allerdings ist dabei das in $P(A) + P(B) + P(C)$ dreifach gerechnete Stück $M = A \cap B \cap C$ auch dreifach subtrahiert worden. Da es aber einmal mit berücksichtigt werden muss, addieren wir $P(A \cap B \cap C)$ wieder und finden schliesslich die gesuchte Formel (1).



Eine rechnerische Behandlung ergibt sich, indem wir zunächst $A \cup B \cup C$ in der Form $(A \cup B) \cup C)$ schreiben und die Regel 7 anwenden:

(2) $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = \underline{P(A \cup B)} + P(C) - \underline{P((A \cup B) \cap C)}\,.$

Wir wenden nun Regel 7 nochmals an, indem wir

(3) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

schreiben. Wie leicht einzusehen ist, ist $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Nochmalige Anwendung von Regel 7 liefert

(4) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\,.$

Ersetzt man nun in (2) die unterstrichenen Terme durch (3) bzw. (4) und ordnet etwas um, so kommt gerade die Formel (1) heraus.

3−31 Da Axiom 1* für alle Ereignisse gilt, folgt, dass auch $0 \leq P(\bar{E})$ ist. Nun ist aber $E \cap \bar{E} = \varnothing, E \cup \bar{E} = \Omega$, und die Axiome 2 und 3 liefern dann $1 = P(\Omega) = P(E) + P(\bar{E})$. Wegen $0 \leq P(\bar{E})$ muss $P(E) \leq 1$ sein.

3−32 a) Die Vorgaben bedeuten: $P(6) = 3, P(1)$, $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{2}P(6)$. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist 1 und man erhält $3P(1) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3P(1) + P(1) = 1$, woraus sich $10P(1) = 1$, also $P(1) = 0.1$ ergibt. Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.3

(Streng genommen müsste man $P(\{1\})$ usw. schreiben [vgl. den Anfang von (35.2)], wir bevorzugen die einfachere Form $P(1)$ etc.)

b) $P(\text{ungerade Zahl}) = P(1) + P(3) + P(5) = 0.4$.

c) Wir müssen alle Teilmengen von $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bestimmen, bei denen die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse (genauer: Elementarereignisse) gleich 0.3 ist. Ausprobieren ergibt die folgenden sieben Ereignisse:

$$\{6\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}\ .$$

3–33 a) Mit α_i bezeichnen wir den Winkel des Sektors Nummer i ($i = 1, 2, 3, 4$). Hier liegt eine geometrische Interpretation der Wahrscheinlichkeit vor; die Wahrscheinlichkeiten sind proportional zu den Winkeln (statt den Winkeln könnte man ebenso gut auch die Flächeninhalte betrachten). Die Vorgaben besagen: $\alpha_2 = 3\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\alpha_2 = 9\alpha_1$, $\alpha_4 = 3\alpha_3 = 27\alpha_1$. Die Summe der Winkel muss 360° betragen: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 40\alpha_1 = 360°$. Daraus erhalten wir $\alpha_1 = 9°$, $\alpha_2 = 27°, \alpha_3 = 81°$, $\alpha_1 = 243°$. (Natürlich können diese Winkel auch im Bogenmass angegeben werden: $\frac{1}{20}\pi$, $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{9}{20}\pi$, $\frac{27}{20}\pi$.)

b) Die Wahrscheinlichkeiten betragen

Sektor	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{27}{40}$

Es folgt $P(\text{gerade Zahl}) = P(2) + P(4) = 0.75$.

c) Analog: $P(\text{keine } 4) = 1 - P(4) = \frac{13}{40} = 0.325$.

3–34 a) Mit den Abkürzungen r = rot, b = blau, g = grün sowie dem Symbol $\vee$ für "oder" schreiben sich die Angaben wie folgt:

$$P(r \vee b) = P(r) + P(b) = P(g)\,, \tag{1}$$

$$P(b \vee g) = P(b) + P(g) = 2P(r)\,. \tag{2}$$

Durch Subtraktion ((1) − (2)) findet man $[P(r) + P(b)] - [P(b) + P(g)] = P(g) - 2P(r)$, woraus $3P(r) = 2P(g)$, also

$$P(r) = \frac{2}{3}P(g) \tag{3}$$

folgt. (1) liefert weiter $\frac{2}{3}P(g) + P(b) = P(g)$ oder

$$P(b) = \frac{1}{3}P(g)\,. \tag{4}$$

Wegen $P(r) + P(b) + P(g) = 1$ erhält man aus (3) und (4) schliesslich $P(r) = \frac{1}{3}$, $P(b) = \frac{1}{6}$, $P(g) = \frac{1}{2}$. Die zugehörigen Winkel betragen dann 120°, 60° und 180°.

b) $P(r \vee g) = P(r) + P(g) = \frac{5}{6}$.

3–35 Es gibt total $6^3 = 216$ mögliche Fälle. Wir bestimmen nun die Anzahl der günstigen Fälle.
a) Ungünstig sind die sechs Fälle $11x$ ($x = 1, \ldots, 6$), sowie 121 und 122. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = 208/216 = 0.9630$.
b) Hier geht es schneller, wenn wir die günstigen Fälle zählen. Es sind dies die 72 Fälle xyz mit $x = 5, 6$ sowie $y = 1, \ldots, 6$ und $z = 1, \ldots, 6$, die sechs Fälle $46z$ und der Fall 456. Somit ist $p = 79/216 = 0.3657$.
c) Hier gibt es nur 36 günstige Fälle, nämlich $6xy$ mit $x, y = 1, \ldots, 6$. Es ist $p = 36/216 = 1/6$.

3–36 Total gibt es $6^6 = 46656$ Möglichkeiten. Wir bestimmen die Anzahl der günstigen Fälle. Der 1. Würfel kann auf alle 6 Arten liegen, der 2. Würfel nur noch auf 5 Arten (alle Augenzahlen bis auf jene des 1. Würfels), der 3. Würfel auf 4 Arten (alle Augenzahlen bis auf jene des 1. und des 2. Würfels), etc. Dies führt auf $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $= 720/46656 = 5/324 = 0.0154$.

3–37 Zwischen 1000 und 9999 gibt es 9000 natürliche Zahlen (1000 und 9999 eingeschlossen), also gibt es 9000 mögliche Fälle. Wieviele Fälle sind günstig? Die erste Ziffer kann die Werte von 1 bis 9 annehmen: 9 Möglichkeiten. Die zweite Ziffer kann die Werte von 0 bis 9 annehmen, jedoch nicht den Wert der 1. Ziffer, dies ergibt 9 Möglichkeiten. Die 3. Ziffer kann wieder die Werte von 0 bis 9 annehmen, mit Ausnahme der Werte der 1. und der 2. Ziffer: 8 Möglichkeiten. Analog erhalten wir 7 Möglichkeiten für die letzte Ziffer. Insgesamt gibt es

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9000} = 0.504\,.$$

3–38 Zwischen A und B gibt es 9 mögliche Ausgänge, die alle gleich wahrscheinlich sind:

A:	1	1	1	6	6	6	8	8	8
B:	3	5	7	3	5	7	3	5	7

A gewinnt in 5 Fällen, also ist $P(A \text{ schlägt } B) = 5/9$.
Für B und C bzw. C und A sehen die Tabellen wie folgt aus:

B:	3	3	3	5	5	5	7	7	7
C:	2	4	9	2	4	9	2	4	9

C:	2	2	2	4	4	4	9	9	9
A:	1	6	8	1	6	8	1	6	8

Man erhält die Wahrscheinlichkeiten $P(B \text{ schlägt } C) = 5/9$, $P(C \text{ schlägt } A) = 5/9$.

Bemerkenswert ist, dass es keinen "besten" Würfel gibt. Auf lange Sicht ist zwar A besser als B, B ist besser als C, aber C ist besser als A.

3–39 Die Felder, von denen aus die Dame dem König K Schach bietet, sind mit Punkten markiert.

a)

8	K	•	•	•	•	•	•	•
7	•	•						
6	•		•					
5	•			•				
4	•				•			
3	•					•		
2	•						•	
1	•							•
	a	b	c	d	e	f	g	h

b)

8			•				•	
7			•			•		
6	•		•		•			
5		•	•	•				
4	•	•	K	•	•	•	•	•
3		•	•	•				
2	•		•		•			
1			•			•		
	a	b	c	d	e	f	g	h

Von den 63 Möglichkeiten sind im Fall a) 21, im Fall b) 25 günstig. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten betragen also a) $1/3$, b) $25/63 = 0.3968$.

3–40 Gemäss Beispiel 3.4.4.A gibt es $\binom{45}{6} = 8145060$ mögliche Fälle. Nun gibt es 6 Gewinnzahlen und eine Zusatzzahl. Günstig für einen Fünfer mit Zusatzzahl sind die Fälle, wo aus den 6 Gewinnzahlen 5 ausgewählt werden sowie die eine Zusatzzahl angekreuzt wird. Dies ergibt $\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1} = 6$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $6/8145060 = 0.0000007366$.

3–41 Da sechs Zahlen gezogen werden, ist das grösstmögliche $k = 40$. Somit ist $P(E_k) = 0$ für $41 \leq k \leq 45$.

Wir nehmen nun an, es sei $1 \leq k \leq 40$. Das Ereignis E_k tritt dann ein, wenn k gezogen wurde und wenn die übrigen fünf Zahlen aus dem Bereich $k+1, \ldots, 45$ stammen. Dieser enthält $45 - k$ Zahlen, daher ist $|E_k| = \binom{45-k}{5}$.

Mit $|\Omega| = \binom{45}{6}$ (vgl. Beispiel 3.4.4.A) folgt

$$P(E_k) = \frac{\binom{45-k}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{6 \cdot (45-k)(44-k)(43-k)(42-k)(41-k)}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}, \quad (k \leq 40)\,.$$

3–42 Gemäss (1.6) gibt es 3^{13} mögliche Fälle. Wir bestimmen die Anzahl der günstigen Fälle: Es gibt $\binom{13}{2} = 78$ Möglichkeiten, aus den 13 Spielen die zwei falsch getippten Spiele zu wählen. Für jede Wahl dieser zwei Spiele gibt es $2 \cdot 2$ Möglichkeiten, die Tipps falsch zu wählen. (Wäre beispielsweise $(1,1)$ richtig, so wären $(x,x), (x,2), (2,x)$ und $(2,2)$ die Möglichkeiten für falsche Tipps.) Die Anzahl der günstigsten Fälle ist also $78 \cdot 4 = 312$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $312/3^{13} = 0.0001957$.

3–43 a) Für jeden Würfel gibt es 3, total also $3^3 = 27$ Möglichkeiten. Die Anzahl der günstigen Fälle entspricht den möglichen Anordnungen der drei Farben, ist also $= 3! = 6$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{6}{27} = 0.2222$.

b) Bei vier Würfeln gibt es $3^4 = 81$ Möglichkeiten. Hier ist es einfacher, die ungünstigen Fälle zu zählen. Dazu gibt es zwei Fälle:

Fall A: Es liegt nur eine Farbe oben: Hier gibt es offensichtlich 3 Möglichkeiten ($rrrr$ etc.).

Fall B: Es liegen nur zwei Farben oben. Dann gibt es zwei "Unterfälle":

B_1: Drei Würfel haben die eine, ein Würfel die zweite Farbe: Der einzelne Würfel kann innerhalb der vier Würfel an vier Stellen stehen, und er kann jede der drei Farben haben. Für die Farbe der drei andern bleiben dann noch je zwei Möglichkeiten übrig. Total haben wir $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten.

B_2: Es gibt zwei Würfel mit je zwei Farben. Die eine Farbe kann an $\binom{4}{2} = 6$ Stellen stehen, die Stellen mit der andern Farbe sind dann gegeben. Da es von beiden Farben je zwei Würfel hat, gibt es hier nur drei Möglichkeiten für die Farbzusammenstellung, nämlich rb, rg, bg. Total gibt es $6 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten.

Die Gesamtzahl der ungünstigen Fälle finden wir durch Addition der Werte aus A, B_1 und B_2, sie beträgt 45. Damit gibt es $81 - 45 = 36$ günstige Fälle: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{36}{81} = 0.4444$.

3−44 Die Anzahl der Möglichkeiten, 6 Zwiebeln in eine Reihe zu setzen, beträgt $6! = 720$. Wieviele davon sind günstig? Wenn wir nur auf die Reihenfolge der 3 Farben achten, dann gibt es zunächst $3! = 6$ Möglichkeiten. Eine davon ist beispielsweise die Reihenfolge $ggvvww$. Da wir aber die einzelnen Zwiebeln unterscheiden, müssen wir genauer schreiben

$$g_1 g_2 v_1 v_2 w_1 w_2 \ .$$

Man sieht nun, dass man die beiden Zwiebeln derselben Farbe noch vertauschen kann (Beispiel: $g_2 g_1 v_1 v_2 w_1 w_2$). Somit gibt es für jede der 6 Farbreihenfolgen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten, total also $6 \cdot 8 = 48$ günstige Fälle. Es folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p : p = \frac{6 \cdot 8}{6!} = \frac{1}{15} = 0.0667$.

3−45 Die Überlegungen sind dieselben wie beim Zahlenlotto (Beispiel 3.4.4.A). Zunächst gibt es $\binom{12}{3} = 220$ Möglichkeiten, 3 Farbstifte aus 12 auszuwählen.

a) Um genau einen roten zu erhalten, hat man $8 = \binom{8}{1}$ Möglichkeiten für die Wahl des roten und $\binom{4}{2}$ für die Wahl der beiden blauen. Dies führt auf die gesuchte Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \cdot 6}{220} = \frac{12}{55} = 0.2182 \ .$$

b) Hier ist es am besten, mit dem Gegenereignis zu arbeiten. "Kein blauer Stift" bedeutet, dass alle drei ausgewählten Stifte rot sind. Dazu müssen aus den acht roten drei ausgewählt werden, was auf $\binom{8}{3} = 56$ Arten geht. Für mindestens einen blauen gibt es also $220 - 56 = 164$ Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich $\frac{164}{220} = 0.7455$.

3−46 Es gibt $\binom{15}{6}$ Möglichkeiten, die 6 Schweizerinnen auf die 15 Startplätze zu verteilen. Günstig für das betrachtete Ereignis sind genau die Fälle, wo für diese die Startnummern 1 bis 4 sowie zwei weitere zwischen 5 und 15 ausgelost wurden. Dafür gibt es $\binom{11}{2}$ Möglichkeiten und wir finden für unsere Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{11}{2}}{\binom{15}{6}} = \frac{\frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{91} = 0.0110 \ .$$

3−47 Mögliche Fälle: Es gibt 8! Anordnungen von 8 Äpfeln. Günstige Fälle: Die faulen Äpfel können auf den Plätzen 1 bis 3, 2 bis 4, ..., 6 bis 8 stehen (6 Möglichkeiten). Innerhalb jeder dieser Möglichkeiten können die drei faulen beliebig angeordnet werden (3! Möglichkeiten), ebenso die fünf guten (5! Möglichkeiten). Die Anzahl der günstigen Fälle ist also $= 6 \cdot 3! \cdot 5!$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{6 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{3}{28} = 0.1071 \ .$$

3−48 Damit drei Strecken ein Dreieck bilden können, muss die Summe der Längen der beiden kürzesten Seiten grösser sein als die Länge der längsten Seite. Zunächst gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten der Auswahl, die man einfach anschreiben und kontrollieren könnte. Die Lösung geht noch etwas rascher, wenn man beachtet, dass die Seite der Länge 1 sicher nie zu einem Dreieck gehört. Es bleiben also die Zahlen 3, 5, 7, 9 übrig und somit $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten, nämlich (3,5,7), (3,5,9), (3,7,9) und (5,7,9). Bis auf die zweite liefern alle ein Dreieck, so dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{3}{10} = 0.3$ ist.

3−49 Betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$. Das Gegenereignis zu E “beide sind am selben Wochentag geboren” ist $\overline{E}$ “beide sind an verschiedenen Wochentagen geboren worden”. Für die beiden Personen gibt es total 7^2 mögliche Wochentagskombinationen. Davon sind für $\overline{E}$ $7 \cdot 6 = 42$ günstig, denn für die erste Person stehen alle sieben Wochentage zur Verfügung, für die zweite aber nur noch sechs (da die Wochentage verschieden sein sollen). Für $n = 2$ folgt also $P(\overline{E}) = 42/49 = 6/7$, woraus sich $P(E) = 1/7 = 0.1429$ ergibt. Analog geht es für $n = 3$: Es gibt 7^3 mögliche Fälle, davon sind $7 \cdot 6 \cdot 5$ für das Gegenereignis $\overline{E}$ günstig. Man erhält so $P(E) = 1 - 7 \cdot 6 \cdot 5/7^3 = 0.3878$. Nun sollte es klar sein, dass für die Wahrscheinlichkeit p_k des Ereignisses “k Personen sind an verschiedenen Wochentagen geboren worden” gilt:

$$p_k = 1 - \frac{\overbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cdots}^{k \text{ Faktoren}}}{7^k} = 1 - \frac{7!}{(7-k)! \cdot 7^k}$$

Die zahlenmässige Ausrechnung liefert

Anzahl Personen	2	3	4	5	6	7
Wahrscheinlichkeit	0.1429	0.3878	0.6501	0.8501	0.9572	0.9939

(Für $n \geq 8$ ist es natürlich sicher, dass mindestens zwei Personen am selben Wochentag Geburtstag haben.)

Eine kleine Ergänzung: Dieselbe Rechnung lässt sich auch statt für die Wochentage für die 365 Tage des Jahres (Schaltjahre einmal ausgenommen) durchführen. Die Frage lautet dann: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen an unserm Fest am gleichen Tag Geburtstag haben? Die Überlegung geht genau gleich (mit 365 statt 7); nur die Rechenarbeit wird grösser. Unter anderem ergibt sich dann: Für 22 Personen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei denselben Geburtstag haben = 0.476, für 23 Personen aber schon = 0.507, also grösser als 50%. Bei 47 Personen ist sie = 0.954 und von 57 Personen an ist sie grösser als 99%. Und als letztes Beispiel: Für 100 Personen beträgt sie 0.99999969.

3−50 a) Wir tabellieren die möglichen Fälle und markieren die günstigen (alle haben den falschen Mantel) mit einem $*$.

$n = 2$:

Mantel Nr.	1	2	
Person Nr.	1	2	
	2	1	$*$

$p_2 = 1/2$.

$n = 3$:

Mantel Nr.	1	2	3	
Person Nr.	1	2	3	
	1	3	2	
	2	1	3	
	2	3	1	$*$
	3	1	2	$*$
	3	2	1	

$p_3 = 1/3$.

$n = 4$: Hier gibt es $4! = 24$ mögliche Fälle. Wir brauchen nicht alle aufzuschreiben. Jene, die mit “1” beginnen, können wir sicher weglassen. Es bleiben:

2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3 $*$
2 1 4 3 $*$	3 1 4 2 $*$	4 1 3 2
2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
2 3 4 1 $*$	3 2 4 1	4 2 3 1
2 4 1 3 $*$	3 4 1 2 $*$	4 3 1 2 $*$
2 4 3 1	3 4 2 1 $*$	4 3 2 1 $*$

Da 9 günstige Fälle verbleiben, ist $p_4 = 9/24 = 3/8$.

Natürlich gibt es systematischere Überlegungen, die über das blosse Auflisten hinausgehen. Als allgemeines Resultat, das ohne Beweis angegeben sei, findet man

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} .$$

Die rechte Seite ist der Anfang der Reihe für e^{-1}, vgl. (19.8.a) im ersten Band. Für grosse n ist daher $a_n \approx e^{-1} = 0.3679$.

b) Die erste Person hat 12 Mäntel zur Wahl, die zweite 11 usw. Dies ergibt total $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ mögliche Fälle. Davon ist nur ein einziger günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich 0.00008418.

3−51 Die vorläufig unbekannte Zahl der Würfe sei n. Bei n Würfen ist die Zahl der möglichen Ausgänge $= 2^n$. Das Ereignis E “es erscheint nie Kopf” hat dann die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$.

a) Gesucht ist das grösste n so, dass $1/2^n \geq 0.1$, d.h. $2^n \leq 10$ ist. Hier sieht man direkt, das dies für $n = 3$ der Fall ist ($2^3 = 8$, $2^4 = 16$). Man darf also höchstens dreimal werfen.

b) Dies geht wie a), nur ist 0.1 durch 10^{-10} zu ersetzen, es muss also $2^n \leq 10^{10}$ sein. Hier ist Ausprobieren wenig empfehlenswert, besser ist es, den Logarithmus, etwa den Zehner-Logarithmus Log, zu verwenden:

$$2^n \leq 10^{10} \Longrightarrow \operatorname{Log} 2^n \leq \operatorname{Log} 10^{10} \Longrightarrow n \operatorname{Log} 2 \leq 10 \operatorname{Log} 10 = 10 \,.$$

Wegen $\operatorname{Log} 2 = 0.30103$ finden wir $n \leq 10/\operatorname{Log} 2 = 33.2193$. Man darf also höchstens 33-mal werfen.

3−52 Die Teilintervalle bilden eine geometrische Folge mit Anfangsglied 1 und Quotient $q = \frac{2}{3}$. Die Summe der zugehörigen geometrischen Reihe ist gemäss (19.4.a) des ersten Bandes gleich $1/(1-q) = 3$. Dies ist gerade die angegebene Stablänge. Da sich unsere Mücke zufällig auf der Leiste niederlässt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dies im ersten schwarzen Stück (mit Länge 1 m) tut, gleich $\frac{1}{3}$. Das zweite schwarze Stück hat die Länge $\frac{4}{9}$, die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist gleich $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}$. So weiterfahrend sieht man, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{1}{3} \cdot \Big(1 + (\frac{4}{9}) + (\frac{4}{9})^2 + (\frac{4}{9})^3 + \ldots\Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$

ist. Dabei wurde erneut die Summenformel für die geometrische Reihe (diesmal mit $q = \frac{4}{9}$) benützt.

3−53 a) $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$. b) Durch einen kleinen Trick (vgl. Aufgabe 19−4, a) im ersten Band) lässt sich die Teilsumme s_n der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ leicht berechnen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} \,.$$

Es folgt $\lim_{n \to \infty} s_n = 1$. Damit konvergiert die Reihe und hat die Summe 1.

c) Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von $\leq n$ Franken ist gleich

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(vgl. b)).

3−54 Der Übersichtlichkeit halber stellen wir die Daten in Tabellenform dar: Die Zahlen in fetter Schrift sind von der Aufgabenstellung her gegeben, jene in kursiver Schrift findet man dann durch eine einfache Rechnung.

$I \cap G$	$N \cap G$	G
$I \cap K$	$N \cap K$	K
I	N	Ω

250	*100*	*350*
50	**100**	*150*
300	*200*	**500**

Nun liest man sofort ab: a) $P(I) = \frac{300}{500} = 0.6$, b) $P(G) = \frac{350}{500} = 0.7$, c) $P(K) = \frac{150}{500} = 0.3$, d) $P(I \cap G) = \frac{250}{500} = 0.5$, e) $P(G|I) = \frac{P(G \cap I)}{P(I)} = \frac{250}{300} = 0.8333$, f) $P(I|G) = \frac{P(I \cap G)}{P(G)} = \frac{250}{350} = 0.7143$.

3−55 In 30 der 36 möglichen Fälle sind die beiden Augenzahlen verschieden. Das Ereignis A "die beiden Augenzahlen sind verschieden" hat also die Wahrscheinlichkeit 5/6.

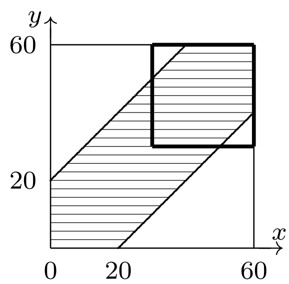
a) Es sei B das Ereignis "mindestens eine Sechs". $A \cap B$ bedeutet dann "genau eine Sechs" und besteht aus 10 Ergebnissen. Es folgt $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10/36}{5/6} = \frac{1}{3} = 0.3333$.

b) Es sei C das Ereignis "beide Würfel zeigen eine 5". Dann ist $A \cap C = \varnothing$, und es ist $P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = 0$.

c) Es sei D das Ereignis "der erste Würfel zeigt eine 4". $A \cap D$ besteht dann aus 5 Ergebnissen. Wir finden $P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{5/36}{5/6} = \frac{1}{6} = 0.1667$.

d) Es sei E das Ereignis "die Summe der Augenzahlen ist 6". Dann ist $A \cap E = \{(1,5), (2,4), (4,2), (5,1)\}$. Es folgt $P(E|A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{4/36}{5/6} = \frac{2}{15} = 0.1333$.

3−56 Das Ereignis E "die beiden treffen sich" wird wie im Beispiel 3.1.3.F durch die schraffierte Fläche dargestellt und hat die Wahrscheinlichkeit $2000/3600 = 5/9$. Das Ereignis F "beide kommen nach 12 Uhr 30" wird durch die Punkte im Innern des dick umrandeten Quadrats beschrieben und hat offensichtlich die Wahrscheinlichkeit 1/4. Das Ereignis $E \cap F$ schliesslich ist der Teil der schraffierten Fläche, der zugleich im Quadrat liegt. Dieser besteht aus der Fläche des Quadrats (mit Inhalt 900) abzüglich der beiden kleinen Dreiecke mit Kathetenlänge 10, die zusammen den Inhalt 100 haben.



Es folgt $P(E \cap F) = \frac{900-100}{3600} = \frac{2}{9}$, und die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist gleich

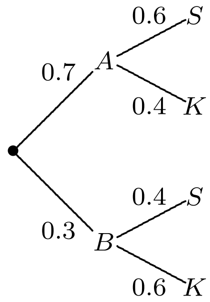
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{2/9}{1/4} = \frac{8}{9} = 0.8889\ .$$

3−57 Die möglichen Zustände des Strassennetzes lassen sich in der Form OXXX etc. darstellen; OXXX beispielsweise steht für "Baustelle 1 passierbar, die übrigen Baustellen geschlossen". Es gibt im ganzen $2^4 = 16$ Kombinationsmöglichkeiten, d.h. $|\Omega| = 16$. Das Ereignis E tritt in den 8 Fällen ein, wo an der ersten Stelle O steht. Betrachten des Plans ergibt schliesslich, dass man von Aadorf nach Zettstadt kommt, falls eine der 11 Möglichkeiten

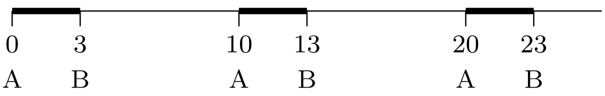
OOOO, OOOX, OOXO, OXOO, OOXX, OXOX, OXXO, XOOO, XOOX, XOXO, XOXX.

eintritt. Diese Ergebnisse bilden das Ereignis F. Es folgt

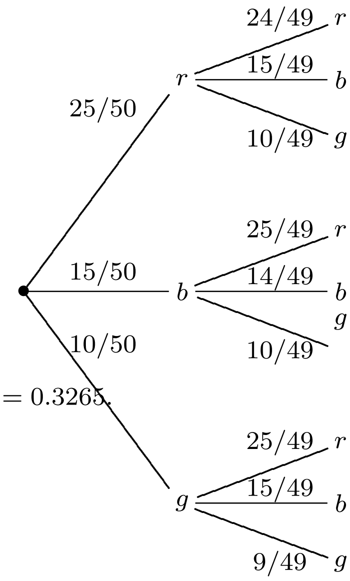
$$P(E) = 8/16 = \frac{1}{2},\ P(F) = \frac{11}{16} = 0.6875,\ P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{7/16}{8/16} = \frac{7}{8} = 0.875\ .$$



3−58 Wenn ich im dick markierten Teil des Zeitplans eintreffe, besteige ich das Tram B, sonst das Tram A.



Wenn A (bzw. B) das Ereignis "ich erwische Tram A (bzw. Tram B)" bezeichnet, dann ist also $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.3$. Ist ferner S das Ereignis "ich finde einen Sitzplatz", so sind die *bedingten* Wahrscheinlichkeiten $P(S|A) = 0.6$, $P(S|B) = 0.4$ bekannt. Aus dem Baumdiagramm (K bedeutet "kein Sitzplatz") liest man nun ab: a) $P(S) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.54$. b) $P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.54} = \frac{7}{9} = 0.7778$.



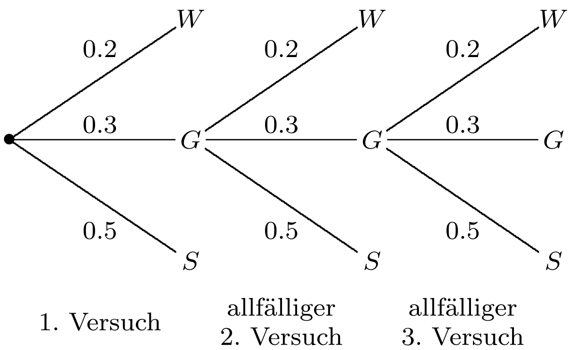
3−59 Wir kürzen die Farben mit r, g, b ab. Am Anfang sind 25 der 50 Gummibärchen rot. Wenn mein Kollege ein rotes zieht, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im zweiten Zug auch ein solches zu erwischen, natürlich noch $= 24/49$ (die Bärchen werden ja nicht zurückgelegt). So erklärt sich die Beschriftung der beiden obersten "Äste". Die andern gehen analog.

a) $P(\{rr, bb, gg\}) = \dfrac{25}{50} \cdot \dfrac{24}{49} + \dfrac{15}{50} \cdot \dfrac{14}{49} + \dfrac{10}{50} \cdot \dfrac{9}{49} = 0.3673.$

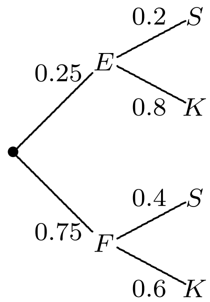
b) $P(\{rg, bg, gr, gb\}) = \dfrac{25}{50} \cdot \dfrac{10}{49} + \dfrac{15}{50} \cdot \dfrac{10}{49} + \dfrac{10}{50} \cdot \dfrac{25}{49} + \dfrac{10}{50} \cdot \dfrac{15}{49} = 0.3265.$

c) $P(\{rr, rb, rg, br, gr\}) = \dfrac{25}{50} + \dfrac{15}{50} \cdot \dfrac{25}{49} + \dfrac{10}{50} \cdot \dfrac{25}{49} = 0.7551.$

3−60 Mit den offensichtlichen Bezeichnungen für die Farben erhalten wir das folgende Baumdiagramm (die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $4/20 = 0.2$, $6/20 = 0.3$ und $10/20 = 0.5$ sind klar):



Die Wahrscheinlichkeit, nach den Spielregeln eine weisse Kugel zu ziehen, beträgt $p = 0.2 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.278$.

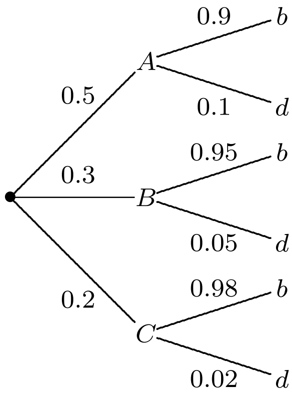


3−61 Mit den Abkürzungen E = Einheimischer, F = Fremder, S = Sennenkäpplitäger, K = kein Sennenkäppli und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten erhalten wir das nebenstehende Baumdiagramm. Man entnimmt ihm die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit:

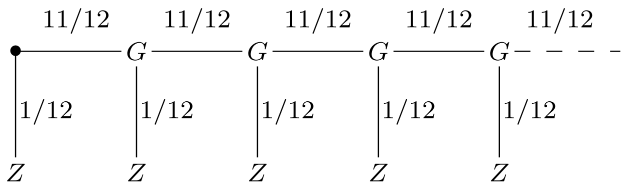
$$P(E|S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.25 \cdot 0.2}{0.25 \cdot 0.2 + 0.75 \cdot 0.4} = \frac{1}{7} = 0.1429\ .$$

3−62 Mit den Abkürzungen b = "brauchbar" und d = "defekt" erhalten wir das nebenstehende Baumdiagramm:
Es folgt a) $P(b) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.2 \cdot 0.98 = 0.931$ und

b) $P(A|d) = \dfrac{0.5 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.02} = 0.7246.$



3−63 Mit Z bezeichnen wir das Ereignis "Augensumme 10", mit G das Gegenereignis. Von den 36 möglichen Fällen sind 3 (nämlich (6,4), (5,5) und (4,6)) günstig für Z. Somit ist $P(Z) = 1/12$, $P(G) = 11/12$. Das unendliche Baumdiagramm sieht so aus:



Nun liest man ab: $p_1 = \frac{1}{12}$, $p_2 = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12}$, $p_3 = (\frac{11}{12})^2 \cdot \frac{1}{12}$ usw. Allgemein ist

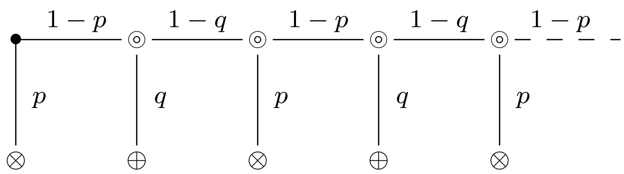
$$p_k = \left(\frac{11}{12}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{12} \; .$$

Zum Spass können wir noch die Summe all dieser Wahrscheinlichkeiten berechnen. Es handelt sich um eine unendliche Reihe, nämlich um die geometrische Reihe mit Anfangsglied $a = 1/12$ und Quotient $q = 11/12$. Ihre Summe beträgt

$$\frac{a}{1-q} = \frac{1/12}{1 - 11/12} = 1 \; ,$$

wie es sein muss.

3−64 Das Problem führt auf ein unendliches Baumdiagramm. In der Figur bedeutet $\otimes$, dass Max getroffen hat, $\oplus$, dass Moritz getroffen hat und $\circledcirc$ heisst "kein Treffer".



a) Die Wahrscheinlichkeit $p_\otimes$ dafür, dass Max zuerst trifft, errechnet sich nach dem Diagramm zu

$$p+(1-p)(1-q)\cdot p+(1-p)^2(1-q)^2\cdot p+\ldots = p\Big(1+[(1-p)(1-q)]+[(1-p)(1-q)]^2+\ldots\Big)$$

In der Klammer steht aber eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $(1-p)(1-q)$. Ihre Summe berechnet sich nach der bekannten Formel (19.4.a) aus dem ersten Band zu

$$p_\otimes = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}\ .$$

b) Mit $p=1/3$ ist

$$p_\otimes = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-q-\frac{1}{3}q} = \frac{1}{1+2q}\ .$$

Wenn beide dieselbe Chance haben sollen, dann muss $1/(1+2q)=1/2$ sein, und es folgt $q=1/2$.

3−65 In der Hälfte aller Fälle zeigt der rote Würfel eine ganze Zahl, somit ist $P(E)=1/2$. Für F gibt es sechs günstige Fälle, also ist $P(F)=1/6$. (Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist natürlich 36.) Ferner ist $E\cap F=\{(2,2),\,(4,4),\,(6,6)\}$. Es folgt $P(E\cap F)=1/12=P(E)\cdot P(F)$. Die beiden Ereignisse sind unabhängig. Auch anschaulich ist wohl klar, dass das Eintreffen eines "Paschs" (gleiche Augenzahlen) nichts damit zu tun hat, ob der eine Würfel eine gerade oder eine ungerade Augenzahl zeigt.

3−66 a) Hier ist $E=\{0,2,4,6,8\}$, $P(E)=0.5$ sowie $F=\{0,3,6,9\}$, $P(F)=0.4$ und $E\cap F=\{0,6\}$, $P(E\cap F)=0.2$. Somit ist $P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$ d.h., E und F sind unabhängig.

b) Hier ist $E=\{2,4,6,8\}$, $P(E)=4/9$ sowie $F=\{3,6,9\}$, $P(F)=3/9$ und $E\cap F=\{6\}$, $P(E\cap F)=1/9$. Somit ist $1/9=P(E\cap F)\neq P(E)\cdot P(F)=12/81$, d.h., E und F sind nicht unabhängig.

3−67 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|K)=P(A\cap K)/P(K)$. Total sind 45 Schüler(innen) vorhanden, $15+n$ davon sind Knaben, somit ist $P(K)=(15+n)/45$. Da es in der Klasse A 15 Knaben hat, ist $P(A\cap K)=15/45$. Es folgt

$$P(A|K)=\frac{P(A\cap K)}{P(K)}=\frac{15/45}{(15+n)/45}=\frac{15}{15+n}\ .$$

b) Man soll beim Wort "Maximum" nicht immer gleich ans Ableiten denken. Der obige Ausdruck wird offenbar umso grösser, je kleiner n ist und erreicht für $n=0$ den maximalen Wert 1. Dies ist klar: Wenn es in der Klasse B überhaupt keine Knaben hat, ist es sicher, dass ein als Knabe identifizierter Schüler in der Klasse A ist. Das Minimum wird für $n=20$ erreicht, wenn also die Klasse B nur aus Knaben besteht; auch dies sollte direkt einleuchten.

c) Es ist $P(A)=25/45$, $P(K)=(15+n)/45$ und $P(A\cap K)=15/45$. Unabhängigkeit von A und K bedeutet, dass $P(A\cap K)=P(A)\cdot P(K)$ sein muss. Es folgt

$$\frac{15}{45}=\frac{25}{45}\cdot\frac{15+n}{45}\Longrightarrow 15+n=27\Longrightarrow n=12\ .$$

Konkret bedeutet dies, dass das Verhältnis Knaben zu Mädchen in beiden Klassen dasselbe (nämlich 3 : 2) ist.

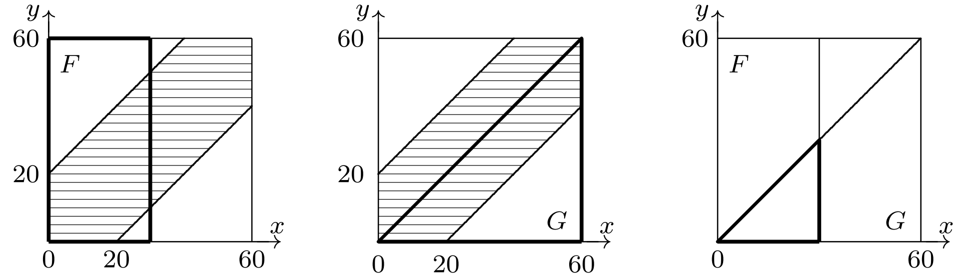
3−68 Wir arbeiten mit der geometrischen Wahrscheinlichkeit. E entspricht dem schraffierten Flächenstück, das gemäss Beispiel 3.1.3.F den Inhalt 2000 hat (das ganze Quadrat, also Ω, hat den Inhalt 3600). Das Ereignis F ist in der Figur links dick umrandet, G in der mittleren Figur. Man sieht sofort, dass F und G beide den Inhalt 1800 haben. Aus Symmetriegründen ist ferner klar, dass $E\cap F$ die Hälfte von E ist, also den Inhalt 1000 hat, dasselbe gilt für $E\cap G$. Schliesslich ist $F\cap G$ ein Dreieck, dessen Inhalt ein Achtel des Quadrats, also $=450$ ist (Figur rechts). Für die Wahrscheinlichkeiten gilt somit:

$$P(E)=\frac{5}{9},\ P(F)=\frac{1}{2},\ P(G)=\frac{1}{2},\ P(E\cap F)=\frac{5}{18},\ P(E\cap G)=\frac{5}{18},\ P(F\cap G)=\frac{1}{8}\ .$$

Damit ist

$$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F),\ P(E\cap G)=P(E)\cdot P(G),\ P(F\cap G)\neq P(F)\cdot P(G)\ .$$

Die Ereignisse E, F sowie E, G sind also unabhängig, nicht aber F, G.



3−69 a) Eine zufällig ausgewählte Person ist mit der Wahrscheinlichkeit $200/500 = 0.4$ ein Mann.
b) Die angesprochene "plausible Annahme" ist die, dass Geschlecht und Staatszugehörigkeit unabhängig sind. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person weiblich (W) ist und eine ausländische Staatsbürgerschaft besitzt (A) gleich $P(W \cap A) = P(W) \cdot P(A) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$.

3−70 Es ist unmittelbar klar, dass $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ ist. Das Ereignis $A \cap B$ bedeutet, dass der erste Würfel eine gerade, der zweite eine ungerade Augenzahl zeigt. Somit ist

$$A \cap B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}$$

und es gilt $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Weiter ist

$$A \cap C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4)\,(4,6), (6,2), (6,4)\,(6,6)\}\ ,$$

$$B \cap C = \{(1,1), (1,3)\,(1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1)\,(5,3), (5,5)\}\ .$$

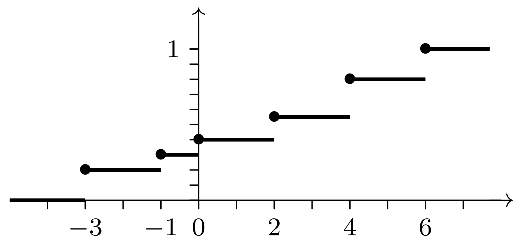
Es folgt $P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. Damit sind die Paare A, B, A, C und B, C jeweils unabhängig (es ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ usw.). Anderseits ist $A \cap B \cap C = \varnothing$, woraus $0 = P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$ folgt. Die Ereignisse A, B, C sind somit nicht unabhängig im Sinne von (3.5.9).

(12.4) Lösungen zu Kapitel 4

4−1 a) Das Zufallsexperiment besteht im Auswählen einer Schachtel mit Reissnägeln und im Zählen derselben. Somit ist Ω die Menge aller Reissnägelschachteln. (Was "aller" genau heissen soll, ist nicht ganz präzis festgelegt und hängt von den näheren Umständen ab. Denkbar wären z.B. alle in einer Papeterie zur Zeit an Lager liegenden oder alle von der Reissnagelherstellungsgesellschaft im letzten Jahr produzierten Schachteln usw.) Unter ω (Ergebnis) ist eine zufällig ausgewählte Schachtel zu verstehen, der Wert $X(\omega)$ der Zufallsgrösse X ist dann die Anzahl Reissnägel in dieser Schachtel.

b) Hier ist Ω im Prinzip die Menge "aller" (Diskussion wie oben) Wunderkerzen, ω ist eine zufällig ausgewählte Wunderkerze und $Y(\omega)$ ist deren Brenndauer, z.B. in Sekunden gemessen.

4–2 a) Die Wahrscheinlichkeiten müssen sich zu 1 ergänzen, also ist $a = 1 - (0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.15 + 0.25) = 0.2$.
b)



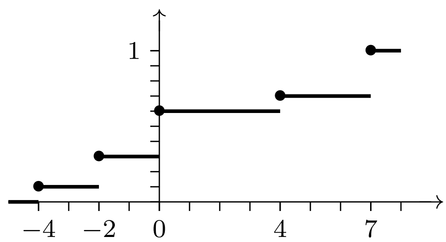
c) $P(0 < X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 4) = 0.15 + 0.25 = 0.4$. d) $P(\pi \leq X \leq 2\pi) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0.25 + 0.2 = 0.45$. (Die Zahl π taucht hier nur auf, um zu zeigen, dass in Ausdrücken wie $P(X \leq x)$ jeder Wert von x sinnvoll ist, auch wenn er nicht in der Tabelle der Verteilung erscheint.) e) Es ist $X^2 < 10$, wenn X die Werte -3, -1, 0, 2 annimmt. Es folgt $P(X^2 < 10) = 0.55$.

4–3 a) Wenn X z.B. den Wert -1 annimmt, dann nimmt $Z = X^2 - 1$ den Wert $(-1)^2 - 1 = 0$ an, und dies mit der Wahrscheinlichkeit 0.2. Analog berechnet man die übrigen Werte. Dabei stellt sich heraus, dass Z auch dort den Wert 0 annimmt, wo X den Wert 1 hatte. Da dies mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 zutrifft, nimmt Z schliesslich den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit $0.2 + 0.1 = 0.3$ an. Man erhält die folgende Tabelle:

z_i	-1	0	3	15
p_i	0.3	0.3	0.1	0.3

b) $P(3 \leq Z \leq 8) = P(Z = 3) = 0.1$.

4–4 a)

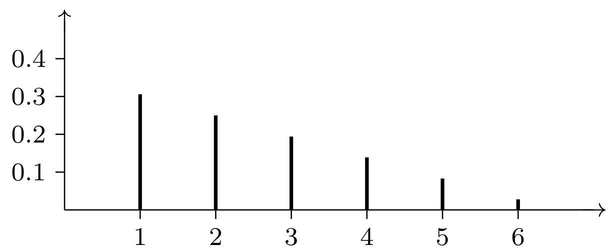


b) $P(X \geq 2) = P(X = 4) + P(X = 7) = 0.1 + 0.3 = 0.4$.
$P(|X| \geq 3) = P(X = -4) + P(X = 4) + P(X = 7) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5$.

4–5 a) Aufgrund der Spielregel kann man Fr. 1.– dadurch gewinnen, dass man (1,1) würfelt oder aber dass sich die beiden Augenzahlen um 1 unterscheiden. Hierzu gibt es zehn Fälle, wie man leicht nachzählt, nämlich (6,5), (5,6), (5,4), (4,5) usw. Somit gewinnt man in 11 Fällen Fr. 1.–, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist 11/36. Analog behandelt man die übrigen Gewinne. Man erhält die Tabelle

Gewinn x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

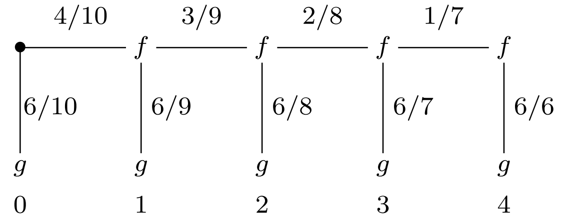
b)



c) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 27/36 = 0.75$.

4–6 a) Der Prozess kann durch einen Baum dargestellt werden. Mit Wahrscheinlichkeit 6/10 erwische ich schon am Anfang ein gutes Ei (g), mit der Wahrscheinlichkeit 4/10 ein faules (f). Da im letzteren Fall nur noch neun Eier da sind, ist die Wahrscheinlichkeit für g noch

6/9, für f noch 3/9, usw. Man erhält den folgenden Baum, wobei noch die Anzahl der behändigten faulen Eier, d.h., der Wert der Zufallsgrösse W eingetragen ist.

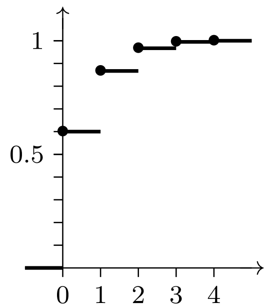


Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden wie gewohnt durch Multiplikation der (bedingten) Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste des Baumes ermittelt, z.B. ist $P(W=2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$. Dies führt auf die folgende Tabelle:

Wert x von W	0	1	2	3	4
$P(W=x)$	3/5	4/15	1/10	1/35	1/210

b) $P(W \leq 2) = P(W=0) + P(W=1) + P(W=2) = 29/30$.

c)



4–7 Wir stellen eine Tabelle analog zu jener am Anfang von (4.1.5) auf, in der wir die Elemente ω des Ergebnisraums mit ihren Wahrscheinlichkeiten sowie die Werte der Zufallsgrössen X, Y und $X+Y$ eintragen.

ω	KKK	KKZ	KZK	KZZ	ZKK	ZKZ	ZZK	ZZZ
$P(\omega)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
$X(\omega)$	2	2	1	1	1	1	0	0
$Y(\omega)$	2	1	1	0	2	1	1	0
$(X+Y)(\omega)$	4	3	2	1	3	2	1	0

Die Zufallsgrösse X nimmt also den Wert 2 in zwei Fällen an, es ist $P(X=2) = 2/8$, analog $P(X=1) = 4/8$, $P(X=0) = 2/8$. Dies führt auf folgende Tabellen:

a)

x	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

y	0	1	2
$P(Y=y)$	1/4	1/2	1/4

b)

z	0	1	2	3	4
$P(X+Y=z)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

c) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.75$, $P(X+Y \leq 2) = P(X+Y=0) + P(X+Y=1) + P(X+Y=2) = 0.625$.

4–8 a) Gemäss der gegebenen Spielregel ist das Spiel frühestens nach zwei und spätestens nach drei Würfen fertig. Listet man alle Möglichkeiten auf, so findet man $\Omega = \{KK, ZZ, KZZ, KZK, ZKK, ZKZ\}$. Durch einfaches Hinschreiben der Anzahl der Würfe erhält man in b)

ω	KK	ZZ	KZZ	KZK	ZKK	ZKZ
$X(\omega)$	2	2	3	3	3	3

c) Es ist zu beachten, dass die 6 Ergebnisse aus Ω *nicht* gleich wahrscheinlich sind (d.h., Ω ist kein Laplaceraum). Deshalb ist die Antwort $P(X=2)=1/3$, $P(X=3)=2/3$ falsch. Vielmehr haben KK und ZZ je die Wahrscheinlichkeit $1/4$, die andern vier Ergebnisse haben die Wahrscheinlichkeit $1/8$ (Sie können dies mit einem einfachen Baumdiagramm bestätigen). Deshalb sieht die Tabelle so aus:

x	2	3
$P(X=x)$	1/2	1/2

d) Hier ist das Spiel frühestens nach drei, spätestens nach fünf Würfen zu Ende (bei fünf Würfen kommt sicher die eine oder die andere Seite dreimal vor). Für drei Würfe gibt es 2 Möglichkeiten (KKK und ZZZ). Vier Würfe: Wenn drei Köpfe geworfen werden, dann ist der letzte Wurf sicher K. Es gibt $\binom{3}{2}=3$ Möglichkeiten, die restlichen zwei K auf die ersten drei Würfe zu verteilen. Ebenso, wenn dreimal Zahl fällt. Im Ganzen gibt es hier 6 Möglichkeiten. Fünf Würfe: Falls drei Köpfe fallen, so ist der letzte Wurf ein Kopf und analog zum Obigen gibt es $\binom{4}{2}=6$ Möglichkeiten; ebenso für dreimal Zahl. In diesem Fall gibt es daher 12 Möglichkeiten. Total also $2+6+12=20$ Möglichkeiten. Man kann dies auch durch systematisches Aufschreiben ermitteln.

4–9 a) Die Zahl c ist so zu wählen, dass die Bedingung $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$ erfüllt ist. Nun ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c}{3^k}=c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=c\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=c\cdot\frac{3}{2}$$

(Summenformel für die geometrische Reihe!), und es folgt $c=2/3$.
b) Wir benützen die Summenformel für eine abbrechende geometrische Reihe (vgl. (19.4.a) im ersten Band) und finden

$$P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}P(X=k)=c\cdot\frac{1-(\frac{1}{3})^{5+1}}{1-\frac{1}{3}}=\ldots=1-\frac{1}{3^6}=\frac{728}{729}=0.9986\ .$$

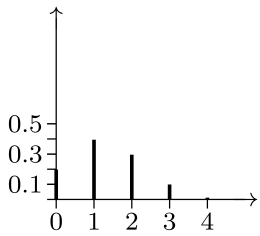
c) Es ist (unter Verwendung der geometrischen Reihe mit $q=1/9$)

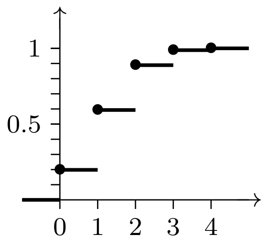
$$\begin{aligned}P(X \text{ ungerade}) &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^5+\ldots\right)=\frac{2}{3}\frac{1}{3}\left(1+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^4+\ldots\right)\\ &= \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\ldots=\frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

4–10 Direkte Berechnung ergibt die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0.1975	0.3951	0.2963	0.0988	0.0123

Stabdiagramm und Verteilungsfunktion sehen so aus:





4–11 Dies ist eine einfache Übung im Gebrauch der **noch anpassen Tabelle (51.1).** Für $p=0.6$ sind, wie dort angegeben, die Einträge im unteren und im rechten Rand der Tabelle zu benützen.
a) Es ist $P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.0007+0.0079+0.0413+0.1239=0.1738$.
b) Analog ist $P(X\ge 6)=0.3154$.
c) Ebenso: $P(2\le X\le 5)=0.6761$.

4–12 a) Binomialverteilung mit $n=10$, $p=0.1$. $P(X=0)=0.9^{10}=0.3487$.
b) Binomialverteilung mit $n=20$, $p=0.1$. $P(X\le 1)=0.9^{20}+20\cdot 0.9^{19}\cdot 0.1=0.3917$.

Das zweite Ereignis ist also etwas wahrscheinlicher.

4−13 a) $\binom{12}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{10} = 0.2961$. b) $\binom{30}{5}(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^{25} = 0.1921$.

4−14 Es sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Triebwerk ausfällt, ferner sei $q = 1 - p$. Bei einem viermotorigen Flugzeug ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 oder 4 Motoren ausfallen gleich $P(X = 3)+P(X = 4) = 4p^3q+p^4$. Bei einem dreimotorigen Flugzeug ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Motoren ausfallen gleich p^3. Nun ist $4p^3q+p^4-p^3 = p^3(4q+p-1) = p^3(4q+(1-q)-1) = 3p^3q$ und diese Zahl ist > 0 (wenigstens für den einzig interessanten Fall $0 < p < 1$). Dreimotorige Flugzeuge sind also sicherer.

4−15 Es sei X die Anzahl der rot gefüllten Pralinés in einer Zwölferschachtel. Dann ist X binomial verteilt mit $n = 12$, $p = 0.6$.

a) Durch — etwas langweiliges — Probieren erkennt man, dass $P(X = 7) = 0.2270$ die grösste unter allen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$, $k = 0, 1, \ldots , 12$ ist.

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in einer Schachtel höchstens drei weiss gefüllte Pralinés hat, ist gleich

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = 0.2253\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jede von fünf Schachteln diese Eigenschaft hat, ist gleich $P(X \geq 9)^5 = 0.00058$.

4−16 Wir haben eine Binomialverteilung mit $n = 3$ und unbekanntem p. Wir wissen aber, dass $P(X = 2) = \binom{3}{2}p^2(1-p) = 0.3$ ist. Dies führt auf die Gleichung 3. Grades $3p^3-3p^2+0.3 = 0$, die man numerisch löst. Um einen vernünftigen Startwert für das Näherungsverfahren (z.B. jenes von Newton) zu finden, kann man in der Tabelle **(51.1) anpassen** nachsehen. Für $n = 3$ und $p = 0.4$ ist $P(X = 2) = 0.2880$, für $p = 0.45$ ist $P(X = 2) = 0.3341$. Das gesuchte p liegt also zwischen 0.4 und 0.45; ein möglicher Startwert ist somit 0.4. Die Näherungslösung (auf 4 Stellen) berechnet sich dann zu 0.4126.
Der Hinweis auf den Bereich, in welchem die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegen soll, ist deshalb nötig, weil die obige Gleichung noch weitere Lösungen hat (wie z.B. eine grobe Skizze des Graphen zeigt). Diese Lösungen sind 0.8670 und −0.2796 (die erste wäre als Wahrscheinlichkeit durchaus noch möglich).

4−17 Wenn die Person keine speziellen Fähigkeiten hat, dann sagt sie bei jedem Wurf mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das richtige Ergebnis voraus. Die Zufallsgrösse X = “Anzahl richtige Vorhersagen” ist also binomial verteilt mit $n = 10$ und $p = q = \frac{1}{2}$. Gesucht ist

$$P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)\ .$$

Die Formel für die Binomialverteilung vereinfacht sich im Fall $p = q = \frac{1}{2}$, es ist nämlich

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\ .$$

Somit ist

$$P(X \geq 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot 176 = 0.1719\ .$$

Um $\binom{10}{7}$ (usw.) zu berechnen, ist es zweckmässig, die Beziehung $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ (usw.) zu benützen.
Moral: In fast einem Fünftel aller Fälle wird jede beliebige Person ein gleich gutes oder gar besseres Ergebnis erzielen. Ob Sie unserem Psychokinetiker unter diesen Umständen wirklich besondere Fähigkeiten zutrauen wollen, ist Ihre Sache.

4−18 Wir betrachten zuerst die vier Fragen mit je drei möglichen Antworten. Die Zufallsgrösse Y = “Anzahl der (bei willkürlichem Ankreuzen) richtig beantworteten Fragen unter diesen vier” ist binomial verteilt mit $p = 1/3$, $q = 2/3$ und $n = 4$. Die Wahrscheinlichkeiten sind:

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4

Nun kommt noch die letzte Frage hinzu, wo nur zwei Möglichkeiten offenstehen, jede mit der Wahrscheinlichkeit 1/2.
Mit X bezeichnen wir die Anzahl der insgesamt richtig beantworteten Fragen.
Man erhält total drei richtige Antworten auf zwei Arten:

i) Drei richtige aus den ersten vier Fragen, letzte Frage falsch. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $P(Y = 3) \cdot \frac{1}{2}$.

ii) Zwei richtige aus den ersten vier Fragen, letzte Frage richtig. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $P(Y = 2) \cdot \frac{1}{2}$.

Es folgt $P(X = 3) = \frac{1}{2}[P(Y = 2) + P(Y = 3)] = \frac{1}{2}(6p^2q^2 + 4p^3q)$.

Analog behandelt man vier richtige Antworten und findet, dass $P(X = 4) = \frac{1}{2}[P(Y = 3) + P(Y = 4)] = \frac{1}{2}(4p^3q + p^4)$ ist.

Fünf richtige gibt es nur, wenn sowohl die ersten vier (Wahrscheinlichkeit p^4) als auch die letzte Frage (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) richtig sind:
$P(X = 5) = \frac{1}{2}p^4$.
Addiert man alles, findet man

$$P(X \geq 3) = 3p^2q^2 + 4p^3q + p^4 = \frac{7}{27} = 0.2593 \ .$$

4−19 Es liegt eine Binomialverteilung mit $n = 20$, $p = q = \frac{1}{2}$ vor. Gesucht ist $P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)$. Mit der in der Lösung von Aufgabe 4−17 erwähnten Vereinfachung für $p = \frac{1}{2}$ ist

$$P(9 \leq X \leq 11) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \left(\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} (167960 + 184756 + 167960) = 0.4966 \ .$$

(Willy ist also diesmal recht fair mit Ihnen!)

4−20 Es sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger bei einer Inbetriebsetzung im roten Sektor stehenbleibt. Die Zufallsgrösse $X =$ “Anzahl der Schluss-Stellungen im roten Sektor” ist dann binomial verteilt mit $n = 10$ und dem unbekannten p, das so zu wählen ist, dass $P(X = 1) = 10p(1 - p)^9$ maximal ist. Wir suchen also die Extrema von $f(p) = 10p(1 - p)^9$, mit $0 \leq p \leq 1$. Es ist $f'(p) = 10(1 - p)^9 - 90p(1 - p)^8 = 10(1 - p)^8(1 - 10p)$. Somit ist $f'(p) = 0$ für $p = 1$ oder $p = 0.1$. Dabei liefert $p = 1$ sicher kein Maximum, denn dann ist $P(X = 1) = 0$. Weiter ist $f''(p) = -80(1 - p)^7(1 - 10p) - 100(1 - p)^8$ und es folgt, dass $f''(0.1) = -100 \cdot 0.9^8 < 0$ ist. Für $p = 0.1$ haben wir daher ein relatives Maximum. Die Randpunkte $p = 0$, $p = 1$ liefern $P(X = 0) = P(X = 1) = 0$. Deshalb wird für $p = 0.1$ das absolute Maximum angenommen. Der Öffnungswinkel des roten Sektors ist also 36° und die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $P(X = 1) = 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9^9 = 0.3874$.

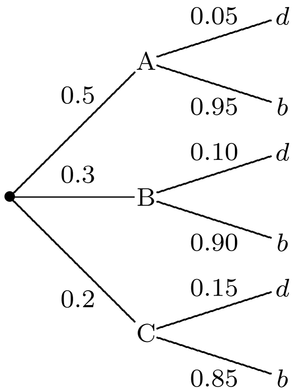
4−21 Es sei X die Anzahl der faulen Eier pro Zwölferpackung. Diese Zufallsgrösse ist binomial verteilt mit $n = 12$. Gemäss diesem Ansatz ist p die Wahrscheinlichkeit für “faul”, q jene für “gut”, d.h., q entspricht der Wahrscheinlichkeit P%. Die Bedingung des Produzenten trifft ein, falls $X \leq 1$ ist.

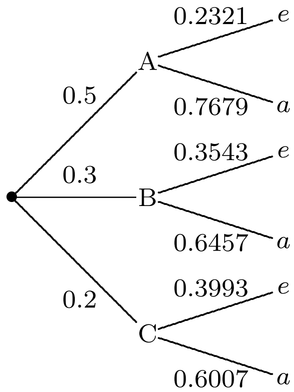
a) Hier ist $p = 0.1$, $q = 0.9$ und $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = q^{12} + 12pq^{11} = 0.6590$.

b) Hier ist p so zu bestimmen, dass $P(X \leq 1) = q^{12} + 12pq^{11} = 0.95$ ist. Ersetzen wir q^{12} durch $(1-p)^{12}$ und q^{11} durch $(1-p)^{11}$, so erhalten wir eine etwas komplizierte Gleichung für p. Es ist besser, $q = 1-p$ zu berechnen. Die Gleichung lautet dann $q^{12} + 12(1-q)q^{11} = 0.95$ oder, vereinfacht, $12q^{11} - 11q^{12} = 0.95$ zu lösen. Mit dem Newtonschen Verfahren (21.2) oder einem gut ausgerüsteten Taschenrechner findet man $q = 0.9695$. Die Bedingung trifft also erst dann mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit ein, wenn $P = 96.95\%$ oder grösser ist.

4−22 a) Wir berechnen zuerst die Wahrscheinlichkeit p_0 dafür, dass ein zufällig aus der gesamten Produktion herausgegriffener Artikel defekt ist. Im Baumdiagramm unten links bedeutet d “defekt” und b “brauchbar”. Wir finden $p_0 = 0.5 \cdot 0.005 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.15 = 0.085$. Diese Artikel werden unabhängig voneinander in Sechserpackungen abgefüllt. Die Anzahl der defekten in einer solchen Packung ist binomial verteilt mit $p = p_0 = 0.085$, $q = 0.915$. Es folgt $P(X = 1) = \binom{6}{1}0.085 \cdot 0.915^5 = 0.3271$.

b) Jeder Hersteller packt seine Artikel separat ab. Die Wahrscheinlichkeit p_{A} dafür, dass in einer Sechserpackung von A genau ein defekter Artikel ist, beträgt $p_{\mathrm{A}} = \binom{6}{1} 0.05 \cdot 0.95^5 = 0.2321$. Analog ist $p_{\mathrm{B}} = 0.3543$, $p_{\mathrm{C}} = 0.3993$. Diese Packungen werden nun gemischt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter allen diesen eine mit genau einem defekten Artikel gewählt wird, beträgt, wie man dem Baumdiagramm unten rechts (e bedeutet "genau ein defektes Stück", a steht für alle andern Fälle) entnimmt, $0.5{\cdot}0.2321{+}0.3{\cdot}0.3543{+}0.2{\cdot}0.3993 = 0.3022$.



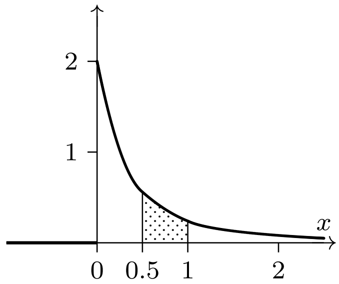


4−23 a) Die Funktion $f(x)$ ist stückweise stetig (Sprung im Nullpunkt) und es ist $f(x) \geq 0$ für alle x. Die dritte Bedingung, der eine Dichtefunktion gehorchen muss, nämlich $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, wird durch geeignete Wahl von c erfüllt. Um das uneigentliche Integral zu berechnen, zerlegen wir es in zwei Teilintegrale, als Trennungspunkt drängt sich $x = 0$ auf: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$. Das erste Integral ist offensichtlich gleich Null; das zweite berechnet sich so:

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s c(1+x)^{-3}\,dx = \lim_{s\to\infty} \left(c \frac{-(1+x)^{-2}}{2} \bigg|_0^s \right) = -\frac{c}{2} \lim_{s\to\infty} (1+s)^{-2} + \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\ ,$$

denn der letzte Grenzwert ist $= 0$. Da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ sein soll, muss $c = 2$ sein.

b)



c) $P(0.5 \leq X \leq 1) = \displaystyle\int_{0.5}^{1} 2(1+x)^{-3}\,dx = -(1+x)^{-2}\bigg|_{0.5}^{1} = \ldots = 7/36 = 0.1944$.

4−24 a) Die Funktion f ist stückweise stetig (mit einem Sprung an der Stelle $x = 1$) und es ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit sind die ersten zwei Bedingungen, die von einer Dichtefunktion verlangt werden, erfüllt. Damit auch die dritte gilt, müssen wir a so wählen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ist. Wir zerlegen dieses Integral in zwei Teile

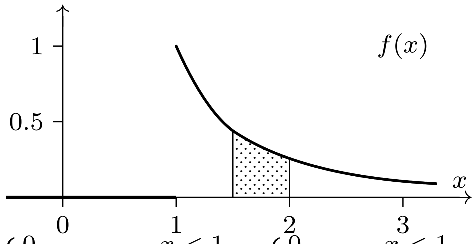
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx\ ,$$

wovon der erste offensichtlich $= 0$ ist, denn $f(x) = 0$ für $x < 1$. Für den zweiten erhalten wir

$$\int_1^{\infty} ax^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t ax^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-ax^{-1} \right) \bigg|_1^t = \underbrace{\lim_{t\to\infty} (-at^{-1})}_{=0} + a = a\ .$$

Es folgt, dass $a = 1$ zu wählen ist; für $x \geq 1$ ist die Dichtefunktion also gegeben durch $f(x) = x^{-2}$.

b)



c) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \int_1^x t^{-2}\,dt & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}.$

d) $p = P(1.5 \leq X \leq 2) = \int_{1.5}^{2} x^{-2}\,dx = \left(-x^{-1}\right)\Big|_{1.5}^{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1.5} = \frac{1}{6}.$

Variante: $p = F(2) - F(1.5) = 1/6$ (mit $F(x)$ wie in c)).

4−25 Es muss jedenfalls

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (1 + cx)\,dx = \left(x + c\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 4 + 8c = 1$$

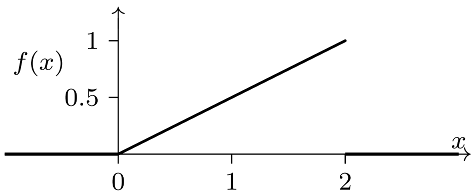
sein. Es folgt $c = -3/8$ und $f(x) = 1 - 3x/8$. Diese Funktion nimmt aber im Intervall [0,4] auch negative Werte an, so dass $f(x)$ keine Dichtefunktion sein kann.

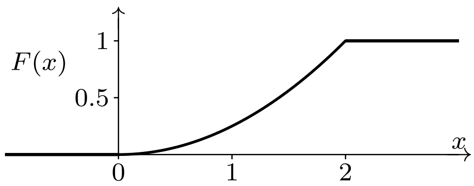
4−26 a) $f(x)$ besteht aus drei stetigen Teilen und ist daher stückweise stetig (übrigens ist f im Nullpunkt stetig, nicht aber an der Stelle 2.) Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ kann ohne Rechnung durch eine geometrische Betrachtung ermittelt werden: Ausser im Intervall [0,2] ist $f(x) = 0$ und in diesem Intervall ist die Fläche unter dem Graphen ein Dreieck mit Grundlinie 2 und Höhe 1, also mit Inhalt 1.

b) Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(Der Flächeninhalt unter der Kurve $f(x)$ ist 1 für $x = 2$ und bleibt ungeändert, wenn x weiter nach rechts wandert. Deshalb steht in der letzten Zeile der obigen Formel die Zahl 1.)





c) Es ist $P(X \geq y) = 1 - P(X \leq y) = 1 - F(y) = 1 - y^2/4$. Diese Zahl muss $= 0.05$ sein, woraus $y = 2\sqrt{0.95} = 1.94936$ folgt.

d) Der Median $\tilde{x}$ ist durch $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$ definiert (vgl. (31.4.c)). Nun folgt aus $P(X \leq \tilde{x}) = \tilde{x}^2/4 = 0.5$, dass $\tilde{x} = 2\sqrt{0.5} = \sqrt{2} = 1.4142$ ist.

4−27 a) Es ist (mit der Substitution $u = \pi x$, $du = \pi dx$)

$$\int \frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\pi}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos(\pi x)\ .$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1\ .$$

b) Es ist $F(x) = 0$ ausserhalb von $[0,\,1]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi x)$ für $0 \leq x \leq 1$. Somit ist

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos \pi x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

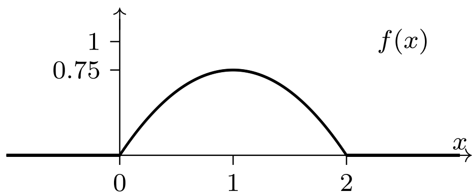
c) Für z muss gelten $0.2 = P(X < z) = P(X \le z) = F(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos \pi z$. Löst man die Gleichung auf, so folgt $\cos(\pi z) = 0.6$ und $z = 0.2952$.

4−28 a) Da die Funktion $a(2x - x^2)$ für $x = 0$ und $x = 2$ den Wert 0 annimmt, ist $f(x)$ überall stetig (in diesen beiden Punkten ist f allerdings nicht differenzierbar, was hier aber irrelevant ist). Ferner ist $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass zwei der drei an eine Dichtefunktion gestellten Bedingungen bereits erfüllt sind. Nun muss noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = a\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}a = 1$$

sein, woraus $a = 3/4$ folgt.

b)



4−29 Die Funktion f ist stückweise stetig, und für alle x ist $f(x) \ge 0$. Wir zeigen, dass auch die 3. Bedingung für eine Dichtefunktion erfüllt werden kann. Wir benötigen dazu eine Stammfunktion $F(x)$ von $xe^{-x/2}$. Partielle Integration ergibt $F(x) = -2e^{-x/2}(x+2)$. Nun berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^{\infty} xe^{-x/2}\,dx = c\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x/2}\,dx$$
$$= c\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-x/2}(x+2)\right)\Big|_0^t = c\lim_{t\to\infty}\left((-2e^{-t/2}(t+2)) + 4\right) = 4c\;.$$

Dabei wurde benützt, dass mit $t \to \infty$ nicht nur $e^{-t/2}$, sondern auch $te^{-t/2}$ gegen 0 strebt (vgl. den Schluss von Beispiel 5.8.A in Kapitel 5). Damit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ wird, müssen wir $c = 1/4$ wählen. Weiter ist (vgl. oben)

$$P(X \ge 6) = \frac{1}{4}\int_6^{\infty} xe^{-x/2}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-x/2}(x+2)\right)\Big|_6^t = \frac{1}{4}2e^{-3}(6+2) = 0.1991\;.$$

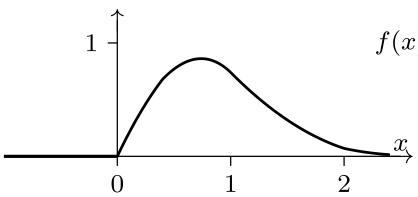
noch anpassen Hinweis: In diesem Beispiel handelt es sich um die Dichtefunktion der "χ^2-Verteilung mit Freiheitsgrad $\nu = 4$", die Sie in (47.2) kennen lernen werden. Der Tabelle (51.5) können Sie übrigens entnehmen, dass $P(X \ge 5.989) = 0.2$ ist. Nun ist 6 geringfügig grösser als 5.989; entsprechend ist $P(X \ge 6)$ etwas kleiner als 0.2.

4−30 a) Da die Funktion $2x\exp(-x^2)$ für $x = 0$ den Wert 0 annimmt, ist $f(x)$ überall stetig (im Nullpunkt ist f allerdings nicht differenzierbar, was hier aber irrelevant ist). Ferner ist $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass zwei der drei an eine Dichtefunktion gestellten Bedingungen bereits erfüllt sind. Nun ist noch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ zu untersuchen. Mit der Substitution $u = -x^2$ berechnet man $\int 2x\exp(-x^2)\,dx = -\exp(-x^2)$ und findet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}(-\exp(-t^2) - (-\exp(0)) = 1\;.$$

Damit ist f in der Tat eine Dichtefunktion.

b) Um das Maximum zu bestimmen, setzen wir die Ableitung $f'(x) = 2\exp(-x^2) - 4x^2\exp(-x^2) = 0$ und finden $x = \sqrt{2}/2$.



c) Es ist

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - \left(-\exp(-x^2)\Big|_0^1 \right) = e^{-1} = 0.3679\,.$$

c) Es muss

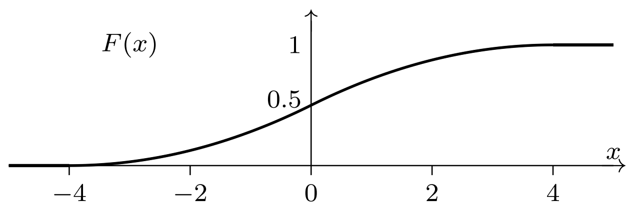
$$P(X \leq z) = \int_0^z 2x\exp(-x^2)\,dx = -\exp(-x^2)\Big|_0^z = -\exp(-z^2) + 1 = 0.5$$

sein. Es folgt $z^2 = -\ln 0.5$ also $z = \sqrt{-\ln 0.5}$ $(= \sqrt{\ln 2}) = 0.8325$. Diese Zahl z ist der Median der Verteilung.

4−31 a) Geometrische Überlegung: Das Dreieck hat die Grundlinie 8. Damit sein Flächeninhalt 1 beträgt, muss die Höhe $h = \frac{1}{4}$ sein.

b) Die Formel für $f(x)$ erhält man, indem man die Gleichungen der Geraden durch die Punkte $(-4, 0)$ und $(0, \frac{1}{4})$ bzw. $(0, \frac{1}{4})$ und $(4, 0)$ bestimmt. Die Verteilungsfunktion wird durch Integration dieser "stückweise linearen" Funktion erhalten:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \frac{1}{16}x + \frac{1}{4} & -4 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{16}x + \frac{1}{4} & 0 \leq 4 < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & -4 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$



c) Nach der obigen Formel ist $P(X \leq 1) = F(1) = 0.71875$.

(12.5) Lösungen zu Kapitel 5

5−1 a)

y_i	-3	-1	3	7	9
p_i	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

z_i	1	4	9	16
p_i	0.3	0.1	0.3	0.3

Beachten Sie, dass sowohl $X = -1$ als auch $X = 1$ auf den Wert $Z = 1$ führen. Deshalb ist $P(Z = 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$.

b) $E(Y) = -0.3 - 0.1 + 0.6 + 2.1 + 2.7 = 5$.
$E(Z) = 0.3 + 0.4 + 2.7 + 4.8 = 8.2$.
$V(Y) = 0.1 \cdot (-3-5)^2 + 0.1 \cdot (-1-5)^2 + 0.2 \cdot (3-5)^2 + 0.3 \cdot (7-5)^2 + 0.3 \cdot (9-5)^2 = 16.8$.
$V(Z) = 0.3 \cdot (1-8.2)^2 + 0.1 \cdot (4-8.2)^2 + 0.3 \cdot (9-8.2)^2 + 0.3 \cdot (16-8.2)^2 = 35.76$.

c) Es ist $E(X^2) = E(Z) = 8.2$. Weiter ist $E(X) = -0.2 - 0.1 + 0.2 + 0.9 + 1.2 = 2$. Es folgt $E(X^2) - E(X)^2 = 8.2 - 4 = 4.2$.
Anderseits ist $V(X) = 0.1 \cdot (-2-2)^2 + 0.1 \cdot (-1-2)^2 + 0.2 \cdot (1-2)^2 + 0.3 \cdot (3-2)^2 + 0.3 \cdot (4-2)^2 = 4.2$. Diese Übereinstimmung bestätigt die angesprochene Formel.

5−2 a) Die Gewinne 1 bis 5 haben alle die Wahrscheinlichkeit 1/6, die Gewinne 7 bis 12 die Wahrscheinlichkeit 1/36. Die Tabelle für die Zufallsgrösse X = "Gewinn" sieht so aus:

x	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Es folgt

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + \frac{1}{36}(7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 4.0833\,.$$

Dies ist der zu erwartende Gewinn.

b) Da die Eins die Wahrscheinlichkeit 2/9, die Sechs die Wahrscheinlichkeit 1/9 hat, verändert sich die obige Tabelle wie folgt (wer will, kann diese Wahrscheinlichkeiten auch mit einem Baumdiagramm bestimmen):

x	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	2/9	1/6	1/6	1/6	1/6	2/81	1/54	1/54	1/54	1/54	1/81

Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$\frac{2}{9}1 + \frac{1}{6}(2+3+4+5) + \frac{2}{81}7 + \frac{1}{54}(8+9+10+11) + \frac{1}{81}12 = 3.5802\ .$$

5–3 a) Die Überlegungen ähneln jenen beim Zahlenlotto (Beispiel 3.4.4.A). Es gibt total $\binom{20}{4}$ Möglichkeiten, die 4 Fragen aus den 20 Gebieten auszuwählen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass (beispielsweise) genau drei der Fragen aus den gelernten Gebieten stammen? Es gibt $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, drei Fragen aus den 10 gelernten Gebieten zu wählen und $\binom{10}{1} = 10$ Möglichkeiten für die vierte, aus den nicht gelernten Gebieten stammende Frage. Damit haben wir $P(G = 3)$ bestimmt:

$$P(G=3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{80}{323}\ .$$

Analog finden wir

$$P(G=0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{14}{323}, \quad P(G=1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{3}}{\binom{20}{4}} = \frac{80}{323}\ ,$$
$$P(G=2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{135}{323}, \quad P(G=4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{10}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{14}{323}\ ,$$

in Tabellenform dargestellt

x	0	1	2	3	4
$P(G = x)$	14/323	80/323	135/323	80/323	14/323

bzw. mit Dezimalbrüchen

x	0	1	2	3	4
$P(G = x)$	0.0433	0.2477	0.4180	0.2477	0.0433

b) $E(G) = 0 + 80/323 + 270/323 + 240/323 + 56/323 + 56/323 = 2$. Da unsere Person genau die Hälfte der Gebiete gelernt hat, verwundert es kaum, dass sie genau die Hälfte der vier Fragen als vorbereitet erwarten darf.

5–4 Ich spiele maximal viermal. Den Ablauf kann ich mir mit einem Baumdiagramm verdeutlichen:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dash, "3/4"] \arrow[d, dash, "1/4"] & K \arrow[r, dash, "3/4"] \arrow[d, dash, "1/4"] & K \arrow[r, dash, "3/4"] \arrow[d, dash, "1/4"] & K \arrow[r, dash, "3/4"] \arrow[d, dash, "1/4"] & K \arrow[d, dash, "1/4"] \\
G & G & G & G & G
\end{tikzcd}$$

Dabei bedeutet G "Gewinn" und K "kein Gewinn". Da der Reingewinn X bei einem Spiel Fr. 2.50 beträgt, erhalte ich die folgende Tabelle (Verluste werden als negative Gewinne aufgefasst):

x	2.50	0	−2.50	−5.00	−10.00
$P(X = x)$	1/4	3/16	9/64	27/256	81/256

Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$E(X) = \frac{1}{4}2.5 - \frac{9}{64}2.5 - \frac{27}{256}5 - \frac{81}{256}10 = -3.42\ .$$

Ich muss also einen Verlust von ca. Fr. 3.40 erwarten (und werde mich hüten, hier mitzuspielen).

5–5 H steht für "halbieren", V für "verdoppeln". Mit p bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit für V. Das Ergebnis HH mit dem Schlusskapital von Fr. 2.– hat die Wahrscheinlichkeit $(1-p)^2$. Die Ergebnisse HV und VH haben beide die Wahrscheinlichkeit $p(1-p)$ und liefern ein Schlusskapital von Fr. 8.–. Schliesslich ergibt VV ein Schlusskapital von Fr. 32.– und hat die Wahrscheinlichkeit p^2. Gefordert ist, dass der Erwartungswert = 8 ist. Dies führt auf die quadratische Gleichung $2(1-p)^2 + 16p(1-p) + 32p^2 = 8$. Sie hat die Lösungen $1/3$ und -1, wovon nur die erste in Frage kommt. Der gesuchte Winkel beträgt daher $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

5–6 Es gibt Würfelchen mit 0, 1, 2 und 3 roten Seitenflächen. Wir bestimmen zuerst die jeweilige Anzahl.
Jede der 8 Ecken liefert ein Würfelchen mit *drei* roten Flächen.
Jede der 12 Kanten liefert $n-2$ Würfelchen mit *zwei* roten Flächen, total $12(n-2)$.
Jede der 6 Seitenflächen liefert $(n-2)^2$ Würfelchen mit *einer* roten Fläche, total $6(n-2)^2$.
Im Innern des Würfels gibt es $(n-2)^3$ Würfelchen *ohne* rote Flächen.
Die Summe dieser Anzahlen beträgt n^3, wie es sein muss. Für die Wahrscheinlichkeiten erhalten wir folgende Tabelle:

Anzahl rote Flächen	0	1	2	3
zugehörige Wahrscheinlichkeit	$\frac{(n-2)^3}{n^3}$	$\frac{6(n-2)^2}{n^3}$	$\frac{12(n-2)}{n^3}$	$\frac{8}{n^3}$

Es folgt

$$E(X_n) = \frac{1}{n^3}\Big(6(n-2)^2 + 24(n-2) + 24\Big) = \ldots = \frac{6}{n}\,.$$

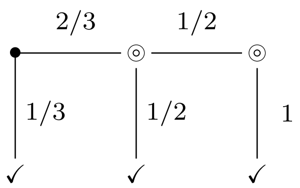
5–7 Wir müssen die Fälle unterscheiden, wo der Konditor $i = 0, 1, 2, 3, 4$ Torten pro Tag herstellt. Die Zufallsgrösse X_i bezeichne den jeweiligen Gewinn. Wir betrachten als Beispiel X_2 näher, d.h., den Fall, wo 2 Torten produziert wurden. Verkauft er keine, ist sein Gewinn -16 Fr. (d.h. ein Verlust), verkauft er eine, gewinnt Fr. 4.–, verkauft er beide, gewinnt er Fr. 24.–. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er beide verkauft, ist gleich $0.40 + 0.20 + 0.10 = 0.70$, da die Fälle, wo 3 oder 4 Torten verlangt werden, miteinbezogen werden müssen. Somit ist X_2 wie folgt verteilt:

Wert k von X_2	-16	4	24
$P(X_2 = k)$	0.05	0.25	0.70

Damit ist $E(X_2) = 0.05 \cdot (-16) + 0.25 \cdot 4 + 0.70 \cdot 24 = 17$. Analoge Rechnungen ergeben:
$E(X_0) = 0$,
$E(X_1) = 0.05 \cdot (-8) + 0.95 \cdot 12 = 11$,
$E(X_3) = 0.05 \cdot (-24) + 0.25 \cdot (-4) + 0.40 \cdot 16 + 0.30 \cdot 36 = 15$,
$E(X_4) = 0.05 \cdot (-32) + 0.25 \cdot (-12) + 0.40 \cdot 8 + 0.20 \cdot 28 + 0.10 \cdot 48 = 9$.
Fazit: Mit zwei Torten pro Tag fährt unser Konditor am besten.

5–8 Die Symbole ✓ bzw. ⊚ bedeuten "Schlüssel passt" bzw. "Schlüssel passt nicht".

a) In diesem Fall gibt es maximal 3 Versuche. Der zugehörige "Baum" sieht so aus:

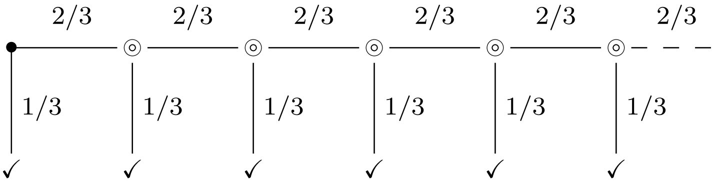


Man liest ab, dass unsere Person mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ im ersten, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ im zweiten und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ im dritten Versuch Erfolg hat. Die Zufallsgrösse X wird durch die folgende Tabelle beschrieben:

Anzahl k der Versuche	1	2	3
$P(X = k)$	1/3	1/3	1/3

Somit ist $E(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2$. Im Mittel klappt es beim 2. Versuch.

b) Hier nimmt die Zufallsgrösse X unendlich viele Werte an; die Wahrscheinlichkeiten können mit dem nachstehenden Baumdiagramm gefunden werden.



Wir erhalten die folgende Tabelle

Anzahl k der Versuche	1	2	3	4	...	k	...
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2$	$\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3$	...	$\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}$	...

Die Summe (hier in Form einer unendlichen Reihe) aller dieser Wahrscheinlichkeiten muss $= 1$ sein. Dies bestätigt man in der Tat mit der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + \ldots\Big) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1\,.$$

Daraus folgt, nebenbei bemerkt, dass das nicht unmögliche Ereignis "die Person erwischt nie den richtigen Schlüssel" die Wahrscheinlichkeit 0 hat. (Vgl. Beispiel 3.4.5.A für eine ähnliche Situation.) Für die Berechnung von $E(X)$ setzen wir $x = \frac{2}{3}$. Wir erhalten aus der Tabelle

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 \cdot 3 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3 \cdot 4 + \ldots \\ &= \frac{1}{3}(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = 3\,. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile tritt die Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ auf, die als Reihe (8) in (19.6) im ersten Band vorgekommen ist. Sie konvergiert für $-1 < x < 1$ und hat die Summe $1/(1-x)^2$, was oben benützt wurde.
Wer unsystematisch probiert, benötigt also im Mittel pro Nacht drei Versuche (eigentlich gar nicht so viel mehr als systematische Leute!).

Im Fall b) handelt es sich übrigens um eine geometrische Verteilung mit dem Parameter $p = \frac{1}{3}$ (vgl. 5.4.12.b)). Der hier direkt berechnete Erwartungswert bestätigt die dort ohne Beweis angegebene Formel.

5−9 Wie in Beispiel 3.4.5.A ist $P(X = k) = (\frac{1}{2})^k$. Es folgt

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \frac{1}{2} + 2(\frac{1}{2})^2 + 3(\frac{1}{2})^3 + 4(\frac{1}{2})^4 + \ldots$$

Wenn wir übersichtlichkeitshalber x statt $\frac{1}{2}$ schreiben, dann hat die Reihe die Form

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k\,.$$

Eine ähnliche, wenn auch nicht dieselbe, Reihe finden Sie als Reihe (8) in (19.6) im ersten Band:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots \quad \text{für } |x| < 1\,.$$

Durch Multiplikation mit x erhalten wir daraus die Reihe für $E(X)$:

$$E(X) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots) = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Setzen wir nun wieder $x = \frac{1}{2}$, so erhalten wir schliesslich $E(X) = 2$. Im Mittel wird man also beim zweiten Wurf zum ersten Mal Kopf erhalten.

5−10 Aus Aufgabe 3−53 folgt zunächst, dass $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$ ist, wie es sich gehört. Nun ist

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Diese Reihe ist, abgesehen vom Fehlen des ersten Summanden 1, was hier nichts zur Sache tut, gerade die harmonische Reihe (19.4.b) aus dem ersten Band, welche divergent ist. Somit existiert der Erwartungswert von X nicht.

5−11 a) $E(X)=np=10,\ V(X)=npq=8, \sigma=\sqrt{8}=2.8284$.
b) Aus $E(X)=np=80$ und $\sigma=\sqrt{npq}=8$, also $npq=64$ folgt $q=npq/np=64/80=0.8$, damit ist $p=0.2$ und $n=400$.

5−12 Der Erwartungswert ist durch $\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ definiert. Wir müssen $\int_0^{\infty} xf(x)\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_0^s xf(x)\,dx$ berechnen. Das Integral kann mit partieller Integration bestimmt werden:

$$\int 2x(1+x)^{-3}\,dx=-x(1+x)^{-2}-\int -(1+x)^{-2}\,dx=\frac{-x}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)}=-\frac{2x+1}{(1+x)^2}\ .$$

Setzt man die Grenzen 0 und s ein und lässt dann $s\to\infty$ streben, so erhält man 1; damit ist $E(X)=1$.

5−13 Nach Definition ist

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_1^{\infty} x\cdot x^{-2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\ln x\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}(\ln t-\ln 1)\ .$$

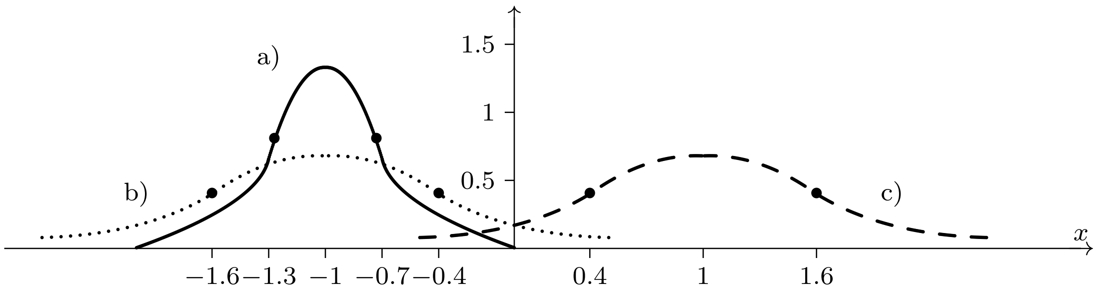
Da aber $\ln t\to\infty$ strebt (für $t\to\infty$), existiert dieser Grenzwert nicht, d.h., diese Zufallsgrösse hat keinen Erwartungswert.

5−14 Es ist

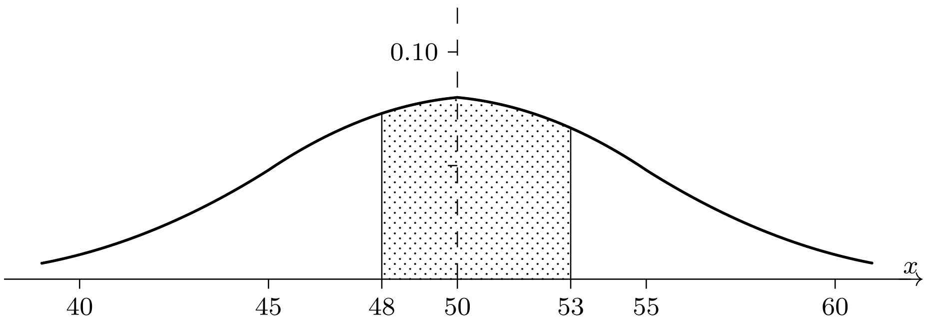
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{3}{4}\int_0^2 x(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)=1\ .$$

Dieses Ergebnis leuchtet aufgrund der Symmetrie der Dichtefunktion auch direkt ein.

5−15 Wichtige Funktionswerte sind:
a) $\varphi(\mu)=1.3298,\ \varphi(\mu\pm\sigma)=0.8066$. b) $\varphi(\mu)=0.6649,\ \varphi(\mu\pm\sigma)=0.4033$.
c) $\varphi(\mu)=0.6649,\ \varphi(\mu\pm\sigma)=0.4033$. Die Graphen sehen wie folgt aus:



5−16 a) Es ist $\varphi(\mu)=0.0798,\ \varphi(\mu\pm\sigma)=0.0484$.



b) $P(48\le X\le 53)=\Phi_{\mu,\sigma^2}(53)-\Phi_{\mu,\sigma^2}(48)=\Phi\Big(\frac{53-50}{5}\Big)-\Phi\Big(\frac{48-50}{5}\Big)=\Phi(0.6)-\Phi(-0.4)=0.7257-0.3446=0.3811$.

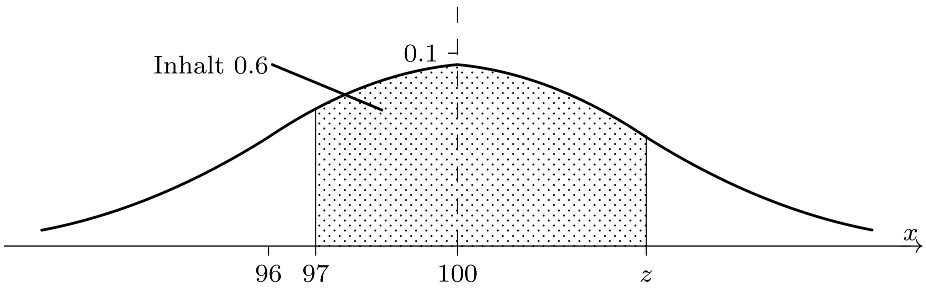
5−17 a) $P(X \geq 999) = 1 - P(X \leq 999) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(999) = 1 - \Phi\left(\frac{999-1000}{10}\right) = 1 - \Phi(-0.1) = 1 - 0.4602 = 0.5398$.

b) $P(1.3 \leq X \leq 1.4) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(1.4) - \Phi_{\mu,\sigma^2}(1.3) = \Phi\left(\frac{1.4-1}{0.4}\right) - \Phi\left(\frac{1.3-1}{0.4}\right) = \Phi(1) - \Phi(0.75) = 0.8413 - 0.7734 = 0.0679$. Dabei wurde für $\Phi(0.75)$ interpoliert: Der Wert liegt in der Mitte zwischen $\Phi(0.74)$ und $\Phi(0.76)$.

c) $P(|X| < 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(2) - \Phi_{\mu,\sigma^2}(-2) = \Phi\left(\frac{2-0.5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0.5}{4}\right) = \Phi(0.375) - \Phi(-0.625) = 0.6462 - 0.2660 = 0.3802$.
Hier wurde zweimal interpoliert. Der Wert 0.375 liegt "auf Dreiviertel der Strecke" zwischen 0.36 und 0.38. Somit ist $\Phi(0.375) \approx \Phi(0.36) + \frac{3}{4}(\Phi(0.38) - \Phi(0.36)) = 0.6406 + \frac{3}{4}(0.6480 - 0.6406) = 0.6462$. Analog ist $\Phi(-0.625) \approx \Phi(-0.4) + \frac{3}{4}(\Phi(-0.62) - \Phi(-0.64)) = 0.2660$. (Wenn man einfach rundet und $\Phi(0.38) - \Phi(-0.62)$ berechnet, kommt der Wert 0.3804 heraus.)

d) Hier ist $\mu = 50$ und $\sigma = \sqrt{4} = 2$. Es folgt $P(X > 52.5) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(52.5) = 1 - \Phi\left(\frac{52.5-50}{2}\right) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1057$ (mit einfacher Interpolation).

5−18 a)



b) Es muss gelten $0.6 = P(97 \leq X \leq z) = \Phi\left(\frac{z-100}{4}\right) - \Phi\left(\frac{97-100}{4}\right) = \Phi\left(\frac{z-100}{4}\right) - \Phi(-0.75) = \Phi\left(\frac{z-100}{4}\right) - 0.2266$, woraus $\Phi\left(\frac{z-100}{4}\right) = 0.6 + 0.2266 = 0.8266$ folgt. Der Tabelle entnimmt man, dass dann (angenähert) $\frac{z-100}{4} = 0.94$ ist, und man findet $z = 103.76$. (Ein genauerer Wert wäre 0.9408 anstelle von 0.94.)

5−19 a) $P(X \leq 2.15) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(2.15) = \Phi\left(\frac{2.15-2.1}{0.2}\right) = \Phi(0.25) = 0.5987$ (Interpolation). Somit sind ca. 60 Eier mit einem Gewicht von ≤ 2.15 g zu erwarten.

b) $P(1.9 \leq X \leq 2.3) = \Phi\left(\frac{2.3-2.1}{0.2}\right) - \Phi\left(\frac{1.9-2.1}{0.2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$, d.h., es sind ca. 68 Eier in diesem Gewichtsbereich zu erwarten.

5−20 Gegeben ist die Normalverteilung $N(80\,;100)$. Gesucht ist z mit $P(X > z) = 0.1$, bzw. $\Phi_{\mu,\sigma^2}(z) = P(X \leq z) = 0.9$. Standardisieren liefert

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(z) = \Phi\left(\frac{z-80}{10}\right) = 0.9, \quad \text{also} \quad \frac{z-80}{10} = 1.28,$$

woraus $z = 92.8$ folgt. Der Wert 1.28 wurde dabei der **Tabelle (51.3)** entnommen. Einen etwas genaueren Wert erhält man, wenn man beachtet, dass dies der kritische Wert für $\alpha = 0.2$ ist. (Da wir uns für einen "einseitigen" Wert bei 0.1 interessieren, müssen wir bei 0.2 nachschlagen, vgl. Beispiel 5.10.5.A.) Der Aufstellung von (5.10.5) oder von **(51.3)** entnimmt man dann $z_\alpha = 1.282$ anstelle von 1.28.

5−21 a) Die Zufallsgrösse X bezeichne die Körperlänge. Die bekannte durchschnittliche Körpergrösse entspricht dem Erwartungswert von X, somit ist $\mu = 170$. Ferner weiss man, dass $P(160 \leq X \leq 180) = 0.8$ ist. Es gilt also

$$0.8 = \Phi\left(\frac{180-170}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{160-170}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1\,,$$

denn aus Symmetriegründen ist stets $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. Es folgt $\Phi(10/\sigma) = 0.9$, also $10/\sigma = 1.2816$ (Interpolation). Damit ist $\sigma = 10/1.281 = 7.8$.

b) $P(175 \leq X \leq 185) = \ldots = \Phi(1.923) - \Phi(0.641) = 0.973 - 0.739 = 0.233$.

c) $P(X \le 180) = \Phi((180-170)/\sigma) = \Phi(10/\sigma) = 0.9$ (wegen a)).

5−22 Wir wissen, dass die Zufallsgrösse X = Kugeldurchmesser (in mm) normal verteilt ist; μ und σ sind noch unbekannt. Bekannt ist dagegen $P(X \le 8) = 0.15$, vom "Rest", also von 85%, bleiben 40% im gröberen Sieb zurück, somit ist $P(X \ge 11) = 0.85 \cdot 0.4 = 0.34$, oder $P(X \le 11) = 0.66$. Man erhält

$$\Phi\left(\frac{8-\mu}{\sigma}\right) = 0.15 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8-\mu}{\sigma} \approx -1.0365\ ,$$

$$\Phi\left(\frac{11-\mu}{\sigma}\right) = 0.66 \quad \Longrightarrow \quad \frac{11-\mu}{\sigma} \approx 0.4124\ .$$

Dabei wurde interpoliert. Die beiden so entstehenden Gleichungen

$$8-\mu = -1.0365\sigma \quad \text{und} \quad 11-\mu = 0.4142\sigma$$

lassen sich leicht auflösen; man erhält $\mu = 10.1$ (der Wert von σ interessiert hier nicht).

5−23 a) Bekannt ist $P(X \le 55) = 0.33$ und $P(X > 70) = 0.05$. Gesucht sind μ und σ.
Die erste Beziehung liefert $\Phi_{\mu,\sigma^2}(55) = \Phi\left(\frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0.33$, die zweite ergibt $1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(70) = 1 - \Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$ oder $\Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right) = 0.95$. Der Tabelle entnimmt man dann die Werte

$$(*) \qquad \frac{55-\mu}{\sigma} = -0.44, \quad \frac{70-\mu}{\sigma} = 1.645\ .$$

(Erläuterung zum 2. Wert: Es ist die Zahl u mit $\Phi(u) = 0.95$ gesucht. Die Tabelle liefert einen Wert etwas unterhalb von 1.65, der mit Interpolation noch verbessert werden könnte. Man kann aber auch die Tabelle der kritischen Werte gebrauchen, nach (5.10.5) bzw. **(51.3)** ist $P(X \ge u) = 0.05$ für $u = 1.645$.) Aus $(*)$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$55 - \mu = -0.44\sigma$$
$$70 - \mu = 1.645\sigma\ ,$$

dessen Lösung die gesuchten Werte liefert, nämlich $\mu = 58.17$, $\sigma = 7.19$.

b) $P(57 \le X \le 64) = \Phi\left(\frac{64-58.17}{7.19}\right) - \Phi\left(\frac{57-58.17}{7.19}\right) = \Phi(0.8108) - \Phi(-0.1627) = 0.7912 - 0.4353 = 0.3559$ (interpoliert).

c) Gesucht ist z mit $P(X > z) = 0.25$. Dies führt auf $1-\Phi\left(\frac{z-58.17}{7.19}\right) = 0.25$. Wir bestimmen also zunächst die Zahl w mit $\Phi(w) = 0.75$. Gemäss Tabelle ist $\Phi(0.68) = 0.7517$, $\Phi(0.66) = 0.7454$. Wir interpolieren: Die gesamte Differenz beträgt 0.0063, bis zum gesuchten Wert 0.7500 ist die Differenz gleich 0.0017. Da zwischen den Werten 0.68 und 0.66 eine Differenz von 0.02 besteht, ist $w = 0.68 - \frac{17}{63}0.02 = 0.6746$. Es folgt $z = 58.17 + 7.19w = 63.02$.

5−24 Das Grundprinzip ist, dass hier eine Binomialverteilung mit $n = 5$ vorliegt, bei der die Erfolgswahrscheinlichkeit p mit Hilfe der Normalverteilung zu bestimmen ist. Also los: Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine Person einen IQ hat, der > 130 ist, beträgt

$$p = 1 - P(X \le 130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-100}{15}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228\ .$$

Dabei ist die Zufallsgrösse X gleich dem IQ einer Person. Wenn nun die Zufallsgrösse Y die Anzahl Personen (unter fünf ausgewählten) mit einem IQ von über 130 bezeichnet, dann ist Y binomial verteilt mit $n = 5$, $p = 0.0228$. Es folgt

a) $P(Y = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.0028^2 \cdot 0.9772^3 = 0.00485$.

b) $P(Y \ge 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - 0.9772^5 - 5 \cdot 0.0228 \cdot 0.9772^4 = 0.00497$.

5−25 Auch hier haben wir eine Binomialverteilung, bei der zuerst die Erfolgswahrscheinlichkeit mit Hilfe einer Normalverteilung zu berechnen ist. Wenn X die Abweichung der Länge eines Nagels vom Sollmass (in mm) bezeichnet, dass ist $\mu = E(X) = 0$, $\sigma = \sqrt{V(X)} = 0.2$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nagel mehr als 0.3 mm zu lang ist, beträgt

$$P(X \ge 0.3) = 1 - P(X \le 0.3) = 1 - \Phi\left(\frac{0.3-0}{0.2}\right) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668\ .$$

Nun ist die Anzahl Y der Nägel (unter den 100 Nägeln in der Schachtel), welche mehr als

0.3 mm zu lang sind, binomial verteilt mit $n = 100$ und $p = 0.0668$. Es folgt

$$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) =$$

$$0.9332^{100} + 100 \cdot 0.9332^{99} \cdot 0.0668 + \binom{100}{2} \cdot 0.9332^{98} \cdot 0.0668^2 + \binom{100}{3} \cdot 0.9332^{97} \cdot 0.0668^3 = 0.0923\ .$$

Da n gross und p klein (allerdings etwas grösser als 0.05, **vgl. (39.5)) Vorsicht umstellung** ist, könnte man auch mit der Poisson-Verteilung mit $\mu = np = 100 \cdot 0.0668 = 6.68$ arbeiten. Man erhält so

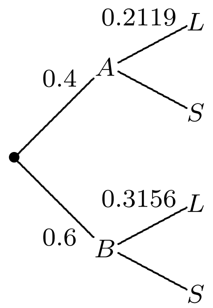
$$P(Y \leq 3) = e^{-6.68}\Big(1 + 6.68 + \frac{6.68^2}{2} + \frac{6.68^3}{3!}\Big) = 0.1000\ .$$

5−26 Die Zufallsgrösse X (bzw. Y) bezeichnet das Gewicht der Brote von A bzw. von B. Dabei ist X gemäss $\mathrm{N}(250\,;225)$, Y gemäss $\mathrm{N}(250\,;625)$ verteilt.

a) Wir berechnen

$$P(X > 265) = 1 - P(X \leq 265) = 1 - \Phi\Big(\frac{265-250}{15}\Big) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587\ ,$$

$$P(Y > 265) = 1 - P(Y \leq 265) = 1 - \Phi\Big(\frac{265-250}{25}\Big) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743\ .$$



Wegen der Unabhängigkeit der Einkäufe ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $0.1587 \cdot 0.2743 = 0.0435$.

b) Auf dieselbe Weise berechnen wir weiter $P(X \leq 238) = \Phi(-0.8) = 0.2119$ und $P(Y \leq 238) = \Phi(-0.48) = 0.3156$. Wir tragen diese Wahrscheinlichkeiten in ein Baumdiagramm ein. Dabei bezeichnet L (bzw. S) das Ereignis "Brot leichter (bzw. schwerer) als 238 g". Die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ dafür, dass ein zufällig gekauftes Brot leichter als 238 g ist, ist gemäss Diagramm $= 0.4 \cdot 0.2119 + 0.6 \cdot 0.3156 = 0.2741$.

c) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|L)$. Sie ist gleich $P(A \cap L)/P(L) = 0.4 \cdot 0.2119/0.2741 = 0.3092$.

5−27 Ein Vergleich mit der **Tabelle (51.3)** zeigt: $P(t) = P(X \leq t)$, $Q(t) = P(X \geq t)$, $R(t) = P(0 \leq X \leq t)$. Somit ist $P(0.2) = 0.5793$, $Q(0.2) = 0.4207$, $R(t) = 0.0793$.
Es gibt allerdings aus Symmetriegründen noch eine zweite Interpretation:
$P(t) = P(X \geq -t)$, $Q(t) = P(X \leq -t)$, $R(t) = P(-t \leq X \leq 0)$.

(12.7) Lösungen zu Kapitel 7

7−1 Die Zufallsgrösse X = "Anzahl der Köpfe" gehorcht der Binomialverteilung mit $n = 500$ und $p = 0.5$, die wir durch die Formel (3) von (7.2.1) annähern:

$$P(245 \le X \le 255) \approx \Phi\left(\frac{255 - 250 + 1/2}{\sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) - \Phi\left(\frac{245 - 250 - 1/2}{\sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) =$$
$$\Phi(0.49) - \Phi(-0.49) = 0.688 - 0.312 = 0.376\ .$$

7−2 Die Anzahl X der Ausschussteile folgt der Binomialverteilung mit $n = 1000$ und $p = 0.1$. Gesucht ist $P(X \le 100)$. Die Formel (3) von (7.2.1) liefert die Wahrscheinlichkeit $P(a \le X \le b)$. Hier ist aber $P(X \le b)$ gesucht. Man hilft sich, indem man $a = 0$ setzt:

$$P(X \le 100) = P(0 \le X \le 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - 100 + 1/2}{\sqrt{1000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 100 - 1/2}{\sqrt{1000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) =$$
$$\Phi(0.053) - \Phi(-10.49) = 0.521 - 0 = 0.521\ .$$

($\Phi(-10.49)$ ist praktisch = 0.) Der Wert $\Phi(0.053)$ wurde mit Interpolation gefunden.

7−3

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \le 110\right] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100}{\sqrt{100}} \le \frac{110 + 1/2 - 100}{\sqrt{100}}\right] \doteq P[\mathcal{N}(0,1) \le 1.05] = 0.8531409.$$

Mit R berechnet ist der exakte Wert 0.8528627. Ohne Diskretisierungskorrektur gäbe es 0.8413447.

7−6 Seien $(X_i)_{i=1}^{900}$ iid χ_3^2-Zufallsgrössen und Z standardnormal. Es gilt von Kapitel 6 $E[\chi_3^2] = 3$ und $V[\chi_3^2] = 6$.

$$P[\sum_{i=1}^{900} X_i > 2680] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - 2700}{30 \cdot \sqrt{6}} > \frac{2680 - 2700}{30 \cdot \sqrt{6}}\right] \doteq P[Z > -0.27217] \doteq 0.6103.$$

7−7 Es gilt $E[X_1] = 0$ und $V[X_1] = 7/5$ (siehe Kapitel 6). Mit Z standardnormalverteilt:

$$P[\sum_{i=1}^{121} X_i \le 8] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{121} X_i - 121 \cdot 0}{\sqrt{121 \cdot 7/5}} \le \frac{8 - 121 \cdot 0}{\sqrt{121 \cdot 7/5}}\right] = P[Z \le 0.6146576] = 0.7306096.$$

7−8 $a = 900/4 = 225$ und $b = 0.25$.

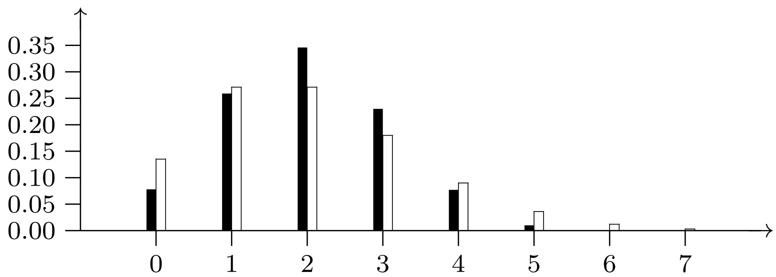
$$P\left(\sum_{i=1}^{900} X_i > 232\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - 225}{7.5} > 7/7.5\right) \doteq 1 - \Phi(14/15) \doteq 0.175.$$

7−11 Binomialverteilung (ausgefüllte Balken):

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.0778	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.0102

Poisson-Verteilung (hohle Balken):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$P(X = k)$	0.1353	0.2707	0.2707	0.1805	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	...



7−12 Die Zufallsgrösse X ist binomial verteilt mit $n = 200$, $p = 0.015$.

a) $E(X) = np = 3$. Es wird somit erwartet, dass 3 Personen Nebenwirkungen erleiden.

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.985^{200} + 200 \cdot 0.015 \cdot 0.985^{199} + \binom{200}{2} \cdot 0.015^2 \cdot 0.985^{198} = 0.4215$. (Es ist $\binom{200}{2} = 100 \cdot 199$.)

c) Da n gross und p klein ist, ist die Annäherung durch die Poisson-Verteilung mit $\lambda = np = 3$ möglich. Man erhält $P(X \leq 2) \approx e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3} = 0.4232$.

d) Es muss $P(X = 0) \geq 0.2$ sein. Die Anzahl n der Personen ist unbekannt.

Mit Binomialverteilung: $P(X = 0) = 0.985^n \geq 0.2$. Logarithmieren führt auf die äquivalente Ungleichung $\ln(0.985^n) \geq \ln 0.2$, und Anwendung einer der Logarithmusregeln ergibt schliesslich $n \ln 0.985 \geq \ln 0.2$, woraus (bei der Division durch die negative Zahl $\ln 0.985$ wird aus dem $\geq$ ein $\leq$)

$$n \leq \frac{\ln 0.2}{\ln 0.985} = 106.49$$

folgt. Somit dürfen höchstens 106 Personen in der Gruppe sein.

Mit Poisson-Verteilung: $P(X=0)=e^{-np}=e^{-0.015n}\geq 0.2$. Wir wenden wieder den Logarithmus an und erhalten $-0.015n \geq \ln 0.2$ oder

$$n \leq \frac{\ln 0.2}{-0.015} = 107.30 \,.$$

Mit dieser *Näherung* kommt man auf höchstens 107 Personen.

7−13 Wenn X die Anzahl der Ohrwackler ist, dann liegt für X eine Binomialverteilung mit $n = 100$, $p = 0.03$ vor, oder näherungsweise eine Poisson-Verteilung mit $\lambda = np = 3$.

a) Binomialverteilung: $P(X=0) = 0.97^{100} = 0.04755$ oder 4.76%.
Poisson-Verteilung: $P(X=0)=e^{-3} = 0.04979$ oder 4.98%.

b) Binomialverteilung: $P(X=2) = \binom{100}{2}\cdot 0.97^{98}\cdot 0.03^2 = 0.22515$ oder 22.52%.
Poisson-Verteilung: $P(X=2)=\frac{3^2}{2}e^{-3} = 0.22404$ oder 22.40%.

c) Binomialverteilung: $P(X=4) = \binom{100}{4}\cdot 0.97^{96}\cdot 0.03^4 = 0.17060$ oder 17.06%.
Poisson-Verteilung: $P(X=4)=\frac{3^4}{4!}e^{-3} = 0.16803$ oder 16.80%.

7−14 Die Anzahl X der auftretenden Nullen ist binomial verteilt mit $n = 50, p = 1/37$. Gesucht ist $P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$.
Binomialverteilung:

$$P(X\leq 2) = \Big(\frac{36}{37}\Big)^{50} + 50\Big(\frac{36}{37}\Big)^{49}\Big(\frac{1}{37}\Big) + \binom{50}{2}\Big(\frac{36}{37}\Big)^{48}\Big(\frac{1}{37}\Big)^2 = 0.8473 \,.$$

Poisson-Verteilung (mit $\lambda = np = 50/37$):

$$P(X\leq 2) = e^{-50/37} + \frac{50}{37}e^{-50/37} + \frac{50^2}{37^2\cdot 2}e^{-50/37} = 0.8451 \,.$$

7−15 Jede der 93 Karteninhaberinnen erscheint mit der Wahrscheinlichkeit 0.03 nicht. Die Anzahl X der nicht erscheinenden Leute ist deshalb binomial verteilt mit $n = 93$, $p = 0.03$. (Dabei müssen wir übrigens — wie immer bei der Binomialverteilung — die Annahme treffen, dass die einzelnen Personen unabhängig voneinander nicht erscheinen. Dies braucht in der Praxis natürlich nicht unbedingt zuzutreffen!) Es bekommen alle einen Sitzplatz, wenn $X \geq 3$ ist. Gesucht ist also $P(X\geq 3)$. Natürlich arbeiten wir hier mit dem Gegenereignis; es ist $P(X\geq 3) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$.
Binomialverteilung:

$$P(X\geq 3) = 1 - 0.97^{93} - 93\cdot 0.97^{92}\cdot 0.3 - \binom{93}{2}\cdot 0.97^{91}\cdot 0.03^2 = 0.5310 \,.$$

Poisson-Verteilung (mit $\lambda = np = 2.79$):

$$P(X\geq 3) = 1 - e^{-2.79} - 2.79e^{-2.79} - \frac{2.79^2}{2}e^{-2.79} = 0.5282 \,.$$

7−16 Hier geht es vor allem darum, die gegebenen Zahlen richtig zu interpretieren. Wir nehmen an, die Zufallsgrösse X =“Anzahl Anrufe pro Zeitintervall” folge einer Poisson-Verteilung. Gesucht ist dann $P(X=0) = e^{-\lambda}$. Da pro Stunde durchschnittlich 60 Anrufe eingehen, treffen in 30 Sekunden im Mittel 0.5, in 2 Minuten aber 2 Anrufe ein. Also folgt im Fall a) $\lambda = 0.5$, $P(X=0) = e^{-0.5} = 0.6065$, im Fall b) $\lambda = 2$, $P(X=0)=e^{-2} = 0.1353$.
Warum darf man eigentlich eine Poisson-Verteilung annehmen? Wir denken uns das Zeitintervall (30 Sekunden bzw. 2 Minuten) in n Teilintervalle unterteilt. Dabei sei n sehr gross und das Teilintervall daher entsprechend klein. Wir dürfen dann annehmen, dass in einem solchen Teilintervall höchstens ein Anruf eintrifft. Rechnen wir dies als “Erfolg”, so haben wir ein “Einzelexperiment” mit nur zwei möglichen Ausgängen:

- Ein Anruf trifft ein: Erfolg! Erfolgswahrscheinlichkeit p.
- Kein Anruf: Misserfolg!

Somit liegt eine Binomialverteilung mit grossem n und (offensichtlich) kleinem p vor. Wir dürfen diese durch die Poisson-Verteilung annähern; d.h., wir dürfen nicht nur, sondern wir müssen, denn n und p sind ja gar nicht bekannt, sondern nur der Erwartungswert λ. (Vgl. auch die Bemerkungen zu Beispiel 7.3.5.B.)
Genau gleich kann man z.B. die Froschaufgabe 7−17 interpretieren.

7−17 Die Zufallsgrösse X = “Anzahl gefangene Fliegen pro Stunde” ist Poisson-verteilt mit $\lambda = E(X) = 3$.
a) $P(X = 0) = e^{-3} = 0.0498$.
b) Wir betrachten das Gegenereignis. $P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{3^2}{2}e^{-3} - \frac{3^3}{6}e^{-3} = 1 - 13e^{-3} = 0.3528$.

7−18 Die Zufallsgrösse X = “Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit (10 Sekunden)” ist Poisson-verteilt mit $\lambda = E(X) = 5$.
a) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-5} = 0.9932$.
b) $P(X = 5) = \frac{5^5}{5!}e^{-5} = 0.1755$.

7−19 Es sei X die Zufallsgrösse “Anzahl Druckfehler pro Seite”. Dabei ist $\lambda = E(X) = \frac{1200}{500} = 2.4$; dies ist die mittlere Anzahl Druckfehler pro Seite. Wie in Beispiel 7.3.5.B dürfen wir annehmen, X folge einer Poisson-Verteilung.
a$_1$) $P(X = 0) = e^{-2.4} = 0.0907$. a$_2$) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-2.4} - 2.4e^{-2.4} = 0.6916$.
b) Gesucht ist λ mit $P(X = 0) = e^{-\lambda} = 0.5$. Logarithmieren liefert $-\lambda = \ln 0.5 = -0.6931$, also $\lambda = 0.6931$. Nun ist $\lambda = N/500$, wobei N die totale Anzahl der Druckfehler ist. Es folgt $N = 346.6$, bei 347 Druckfehlern ist $P(X = 0)$ gerade noch unter 50%.

7−20 Mit X bezeichnen wir die Zufallsgrösse “Anzahl Kirschensteine pro Wähenstück”. Sie ist Poisson-verteilt mit $\lambda = 1$.
a) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.981$ (Tabelle 6.1.4).
b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es auf einem Wähenstück mindestens einen Stein hat, beträgt $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.368 = 0.632$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies für vier unabhängig voneinander gekaufte Stücke zutrifft, ist gleich $0.632^4 = 0.156$.

7−21 Die Zufallsgrösse X = “Anzahl pro Tag verkaufter Sennenkäppli” kann als Poisson-verteilt mit $\lambda = 2$ angenommen werden. Gesucht ist $P(X \geq 6)$. Wir rechnen $P(X \leq 5)$ aus (oder benützen die Tabelle). Es ist

$$P(X \leq 5) = e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) = 0.9834\ .$$

Somit ist $P(X \geq 6) = 1 - 0.9834 = 0.0166$, also sehr klein. Man kann vermuten, dass ein besonderer Grund für den grossen Umsatz an Sennenkäppli existieren muss. Ob dies nun an der Fernsehsendung liegt, muss aber dahingestellt bleiben.

7−22 Wir können annehmen, dass die Zufallsgrösse X = “Anzahl Geburten pro Tag” einer Poisson-Verteilung mit $\lambda = 2$ folgt. Der Tabelle (6.1.4) entnimmt man durch Summieren die folgenden Zahlen:

$$P(X \leq 3) = 0.857,\ P(X \leq 4) = 0.947,\ P(X \leq 5) = 0.983\ .$$

Es ist also $P(X > 3) = 0.143$, $P(X > 4) = 0.053$. Wird bloss für drei Geburten budgetiert, so wird der Betrag mit einer Wahrscheinlichkeit von 14.3% *nicht* ausreichen, was nicht toleriert wird. Mit vier Geburten aber beträgt die entsprechende Wahrscheinlichkeit nur 5.3%, was akzeptabel ist. Es sind also 4000 Dukaten vorzusehen. (Würde man aber einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% fordern, so wären 4000 Dukaten — wenn auch ganz knapp — nicht genug, aber 5000 Dukaten würden reichen.)

7−23 Diese Aufgabe entspricht dem Beispiel 7.3.5.C. Die Zufallsgrösse X = “Anzahl Tropfen pro Platte” kann als Poisson-verteilt angenommen werden. Wir wissen, dass $P(X = 0) = e^{-\lambda} = 10/500 = 0.02$ ist. Logarithmieren liefert $\lambda = -\ln 0.02 = 3.9120$. Wenn N die Anzahl aller Tropfen ist, dann ist der Erwartungswert $\lambda = N/500$, und es ist $N = 500\lambda$; es folgt $N \approx 1956$.

7−24 Die Aufgabe führt auf die Gleichung $P(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 0.98$ oder $e^{-\lambda}(1 + \lambda) = 0.02$. Hierfür gibt es keine Lösungsformel. Ein Taschenrechner mit einem Programm zur Lösung von Gleichungen oder aber das gute alte Newton-Verfahren im ersten Band (21.2) ergeben die Lösung $\lambda = 5.83392$. (Dies ist die mittlere Rosinenzahl pro Brötchen.) Da 100 Brötchen herzustellen sind, braucht der Bäcker ca. 584 Rosinen.

(12.8) Lösungen zu Kapitel 8

8−1 a) Die Zufallsgrösse X bezeichnet das Gewicht eines Samenkorns. Der Erwartungswert

$E(X)$ wird durch das arithmetische Mittel $\bar{x}$ geschätzt, die (wahrscheinlichkeitstheoretische) Standardabweichung σ durch die (empirische) Standardabweichung s; und schliesslich der Standardfehler $\sigma_{\bar{x}}$ durch $s_{\bar{x}}$. Die Rechnung ergibt $\bar{x} = 244$, $s = 7.3786, s_{\bar{x}} = s/\sqrt{10} = 2.3333$.
b) Mit den oben erhaltenen Schätzwerten ist $P(X > 250)$ für die normal verteilte Zufallsgrösse X mit $\mu = 244$, $\sigma = 7.3786$ gesucht:

$$\begin{aligned} P(X > 250) &= 1 - P(X \leq 250) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(250) = 1 - \Phi\Big(\frac{250-244}{7.3786}\Big) \\ &= 1 - \Phi(0.8132) = 1 - 0.7919 = 0.2081 \ . \end{aligned}$$

Für den Wert $\Phi(0.8132)$ kann man einen passend ausgerüsteten Taschenrechner benützen oder aber interpolieren: Es ist $\Phi(0.80) = 0.7881$ und $\Phi(0.82) = 0.7939$. Es folgt

$$\Phi(0.813) = 0.7881 + \frac{0.013}{0.02} 0.0058 = 0.7919 \ .$$

8–2 a) $E(X) = \mu \approx \bar{x} = 142$, $\sigma \approx s = 4.7863$, $\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = 1.3817$.
b) Gesucht ist

$$\begin{aligned} P(X > 145) &= 1 - P(X \leq 145) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(145) = 1 - \Phi\Big(\frac{145-142}{4.7863}\Big) \\ &= 1 - \Phi(0.6268) = 1 - 0.7346 = 0.2654 \ . \end{aligned}$$

Der Wert kann mit Interpolation oder mit einem geeigneten Taschenrechner ermittelt werden. Somit sind etwa 26.5% aller zehnjährigen Knaben aus der Population grösser als 145 cm.

8–3 Hier handelt es sich um gruppierte Daten. Der Durchschnitt wird mit der Formel von (2.2.3.3.d), die Varianz mit jener von (2.2.3.7.d) bestimmt. Mit etwas Fleiss erhält man $\bar{x} = 23.7666$ als Schätzung für den Erwartungswert und $s^2 = 1.3345$ als Schätzung für die Varianz.

8–4 Mit 100 Blättern erhält man $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{100}} = 0.3$, woraus $s = 3$ folgt. Gesucht ist n mit $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.1$. Es folgt $\sqrt{n} = 30$, d.h. $n = 900$. Beachten Sie, dass der Mittelwert $\bar{x}$ gar nicht benötigt wurde.

8–5 a) In beiden Fällen ist $E(X) = E(\overline{X}) = \mu = 100$. Die Standardabweichung des Durchschnitts, also der Standardfehler, ist gegeben durch $\sigma/\sqrt{n} = 15/\sqrt{n}$. Im Falle $n = 25$ finden wir $\sigma_{\bar{x}} = 15/5 = 3$, im Falle $n = 400$ ist $\sigma_{\bar{x}} = 15/20 = 0.75$.
b) Gesucht ist $P(97 \leq X \leq 103)$ für die Normalverteilung mit $\mu = 100$, $\sigma = 15$. Es ist

$$\begin{aligned} P(97 \leq X \leq 103) &= \Phi\Big(\frac{103-100}{15}\Big) - \Phi\Big(\frac{97-100}{15}\Big) = \Phi(0.2) - \Phi(-0.2) \\ &= 0.5793 - 0.4207 = 0.1586 \ . \end{aligned}$$

c) Hier ist $\mu = 100$, aber statt $\sigma = 15$ ist nun der Standardfehler $\sigma_{\bar{x}} = 3$ zu verwenden. Es folgt

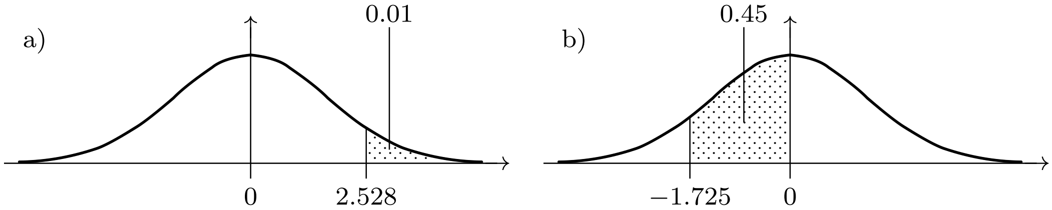
$$\begin{aligned} P(97 \leq \overline{X} \leq 103) &= \Phi\Big(\frac{103-100}{3}\Big) - \Phi\Big(\frac{97-100}{3}\Big) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 \end{aligned}$$

(einfaches Streuungsintervall).

8–6 Es ist $\nu = 20$.
a) Der kritische Wert $t_{\alpha,\nu}$ ist so festgelegt, dass $P(|T| \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha$ ist. Aus Symmetriegründen ist dann $P(T \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha/2$. Diese Wahrscheinlichkeit soll gleich 0.01 sein, also ist $\alpha = 0.02$ zu wählen. Es folgt $t = t_{0.02,20} = 2.528$.

b) Es ist $P(t \leq T \leq 0) = \frac{1}{2}P(|T| \leq t) = \frac{1}{2}(1 - P(|T| \geq t))$ und dieser Wert soll gleich 0.45 sein. Es folgt $P(|T| \geq t) = 0.1$, d.h. $t = -t_{0.1,20} = -1.725$. Beachten Sie dabei, dass

$t = -1.725$ (also negativ) gewählt werden muss, damit $P(t \leq T \leq 0)$ überhaupt Sinn macht.



8−7 a) Die Konstante c_2 ist so zu wählen, dass $f(x) = c_2(1+x^2)^{-1}$ eine Dichtefunktion wird. Dazu muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2}{1+x^2}\,dx = 1$$

sein. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ist in 5.8.B berechnet worden: Es hat den Wert π. Somit muss $c_2 = 1/\pi$ sein.

b) Die Zahl $t = t_{\alpha,1}$ hat die Eigenschaft, dass $P(|T| \geq t) = \alpha$ ist. Nun ist aber

$$\alpha = P(|T| \geq t) = 2P(T \geq t) = 2\int_{t}^{\infty} \frac{c_2}{1+x^2}\,dx \;.$$

Wir berechnen zunächst das uneigentliche Integral:

$$\int_{t}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}(\arctan x - \arctan t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t \;.$$

Setzen wir dies ein und beachten noch, dass $c_2 = 1/\pi$ ist, finden wir

$$\alpha = 2\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right) .$$

Es folgt weiter

$$\arctan t = \frac{\pi}{2}(1-\alpha) \text{ und } t = \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) .$$

Für $\alpha = 0.05$ wird $t = t_{0.05,1} = \tan(\frac{\pi}{2}\cdot 0.95) = 12.706205$ (Tabellenwert 12.706), und für $\alpha = 0.01$ erhalten wir $t = t_{0.01,1} = \tan(\frac{\pi}{2}\cdot 0.99) = 63.656741$ (Tabellenwert 63.657).

8−8 a) $\mu \approx \bar{x} = 32$, $\sigma \approx s = 4.761$.
b) Es ist $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{7} = 1.799$ und $\nu = 7 - 1 = 6$.
Mit $Q = 0.95$ ist ferner $\alpha = 1 - Q = 0.05$. Hier wird noch der Tabellenwert $t_\alpha = t_{0.05,6} = 2.447$ gebraucht. Einsetzen in die Formel

$$[\bar{x} - t_\alpha s_{\bar{x}}, \bar{x} + t_\alpha s_{\bar{x}}]$$

liefert als Ergebnis das Intervall $[27.598, 36.402]$.
c) Mit $Q = 0.9$ wird $\alpha = 0.1$ und $t_\alpha = 1.943$. Sonst bleibt alles gleich und man erhält das Intervall $[28.505, 35.495]$. Gegenüber b) ist die Vertrauenswahrscheinlichkeit und damit auch das Intervall kleiner geworden.

8−9 Ausrechnen liefert $\bar{x} = 50.14$ und $s_{\bar{x}} = 0.14$. Ferner ist $\nu = 8 - 1 = 7$.
a) Mit $Q = 0.9$ ist weiter $\alpha = 1 - Q = 0.1$. Schliesslich wird noch der Tabellenwert $t_\alpha = t_{0.1,7} = 1.895$ gebraucht. Einsetzen in die Formel

$$[\bar{x} - t_\alpha s_{\bar{x}}, \bar{x} + t_\alpha s_{\bar{x}}]$$

liefert als Ergebnis das Intervall $[49.87, 50.41]$.
b) Mit $Q = 0.999$ wird $\alpha = 0.001$ und $t_\alpha = 5.408$. Sonst bleibt alles gleich und man erhält das Intervall $[49.38, 50.90]$.

8−10 Hier sind die statistischen Masszahlen bereits gegeben, nämlich $\bar{x} = 51.2$ und $s^2 = 16$. Es ist dann $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n} = 4/\sqrt{100} = 0.4$. Der Tabelle entnimmt man den Wert $t_\alpha = t_{0.01,99} \approx t_{0.01,100} = 2.626$. Das Konfidenzintervall ist somit gleich dem Intervall $[50.15, 52.25]$.

8−11 Bekannt sind $\bar{x} = 141$ und $s = 6$.

a) Hier ist $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{30} = 1.0954$ und $t_\alpha = t_{0.05,29} = 2.045$. Damit erhalten wir das Intervall $[138.76, 143.24]$.

b) Hier ist $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{300} = 0.3464$ und $t_\alpha = t_{0.05,299} \approx 1.98$ (zwischen den Tabellenwerten für 100 und 1000 grob interpoliert). Damit erhalten wir das Intervall $[140.31, 141.69]$.

8−12 A ist falsch. Die Aussage zum Konfidenzintervall bezieht sich nicht auf das Gewicht der einzelnen Säcke, sondern auf den Erwartungswert des Gewichts, d.h., das "Durchschnittsgewicht aller denkbaren Säcke".
B ist richtig. Diese Aussage beschreibt anschaulich die Bedeutung des Konfidenzintervalls.
C ist falsch.
D ist (trivialerweise) richtig: 2002 ist die Mitte des Intervalls [1996,2008] und die Mitte des Vertrauensintervalls ist gemäss Formel gerade der Durchschnitt $\bar{x}$ der Stichprobe.

8−13 Die Länge des Konfidenzintervalls beträgt

$$2s_{\bar{x}}t_{\alpha,\nu} = 2\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha,\nu} \ .$$

Für $\alpha = 0.05$ und $n = 10$, also $\nu = 9$, ist $t_{\alpha,\nu} = 2.262$. Aus $2\frac{s}{\sqrt{10}}t_{\alpha,\nu} = 10$ lässt sich dann s bestimmen: $s = 5\sqrt{10}/2.262 = 6.99000 \approx 7$. Um nun n so zu festzulegen, dass das Intervall die Länge $2\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1} = 5$ hat, muss (wenn man die Abkürzung A_n verwendet)

$$A_n = \frac{\sqrt{n}}{t_{\alpha,n-1}} = \frac{2s}{5} = 2.8$$

sein. Dabei gilt es zu beachten, dass sich mit n auch $t_{\alpha,n-1}$ ändert. Hier muss man sich mit Probieren behelfen. Für $n = 31, \nu = 30$ ist $A_{31} = \sqrt{31}/2.042 = 2.726 < 2.8$, für $n = 36, \nu = 35$ aber ist $A_{36} = \sqrt{36}/2.030 = 2.956 > 2.8$. Das gesuchte n liegt also etwa in der Mitte zwischen 31 und 36.
Wer es noch genauer wissen will, versucht es mit Interpolation. Er oder sie findet dann $t_{0.05,31} = 2.040$, $t_{0.05,32} = 2.037$. Daraus ergibt sich $A_{32} = 2.77 < 2.8$ und $A_{33} = 2.82 > 2.8$. Mit $n = 32$ wird also das Vertrauensintervall etwas länger als 5 (nämlich, wenn man's ausrechnet $2 \cdot 7 \cdot 2.040/\sqrt{32} = 5.05$), mit $n = 33$ wird es etwas kürzer (nämlich $2 \cdot 7 \cdot 2.037/\sqrt{33} = 4.96$).

8−14 Nach Aufgabenstellung ist $n = 2994$, $k = 1562$. a) Mit $Q = 95\%$ ist $\alpha = 0.05$ und $z_\alpha = 1.96$ (siehe (5.10.5) oder (6.2.3)). Einsetzen in die Formel (3) von (8.4.2) ergibt das Intervall [0.5038, 0.5396]. Die Näherungsformel (4) liefert übrigens dasselbe Resultat. b) Mit $Q = 99\%$ ist nun $z_\alpha = 2.576$. Sowohl die Formel (3) als auch die Formel (4) liefert das Intervall [0.4982, 0.5452]. Wie zu erwarten war, ist das Intervall im Fall b) etwas grösser, da die geforderte Sicherheit höher ist.

8−15 Nach Aufgabenstellung ist $n = 1000$, $k = 30$. Mit $Q = 90\%$ ist $\alpha = 0.1$ und $z_\alpha = 1.645$ (siehe (5.10.5) oder (6.2.3)). Einsetzen in die Formel (3) von (8.4.2) ergibt das Intervall [0.022, 0.040]. Die Näherungsformel (4) liefert [0.021, 0.039].

(12.9) Lösungen zu Kapitel 9

9−1 Wenn die Nullhypothese zutrifft, d.h., wenn ≥ 3000 Lose vorhanden sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gezogenes Los eine Nummer ≤ 1600 hat, höchstens gleich $1600/3000 = 8/15$.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 5 Lose so beschaffen sind, ist

$$\leq \left(\frac{8}{15}\right)^5 = 0.043 \ ,$$

also $< 5\%$. Auf dem üblichen 5%-Niveau wird man deshalb H_0 ablehnen, d.h., man wird annehmen, dass weniger als 3000 Lose vorhanden seien.

PS. Eine Präzisierung: Es sei L die totale Zahl der Lose. Wenn das 1. Los eine Nummer ≤ 1600 hat, dann hat das zweite Los eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{1599}{L-1}$$

dafür, dass das wieder passiert (und ähnlich für die weiteren Lose). Wegen $L \geq 3000$ ist diese Zahl tatsächlich etwas kleiner als $1600/3000 = 8/15$. Da wir oben mit einer Wahrscheinlichkeit $\leq 8/15$ gearbeitet haben, spielt dies aber keine Rolle. (Die geänderte Wahrscheinlichkeit kommt im Grunde genommen daher, dass wir ein einmal gekauftes Los nicht mehr zurücklegen. Bei so vielen Losen spielt aber der Unterschied zum Fall des Zurücklegens praktisch keine Rolle.)

9−2 a) Wenn wir H_0 voraussetzen, d.h., wenn die Auswahl zufällig erfolgte, dann berechnen sich die relevanten Wahrscheinlichkeiten wie folgt:
Es gibt $\binom{9}{3} = 84$ Möglichkeiten, drei Personen aus 9 auszuwählen. Wenn H_0 zutrifft, dann sind alle diese Fälle gleich wahrscheinlich. In $\binom{4}{3} = 4$ Fällen sind alle drei ausgewählten Personen Schmuggler. In diesem Fall erwischt der Beamte drei Schmuggler aufs Mal nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4/84 = 1/21 = 0.0476 < 0.05$. Dies ist zwar möglich, aber wenig wahrscheinlich, so dass wir H_0 ablehnen (in Übereinstimmung mit dem üblichen Signifikanzniveau von 5%).

b) Unser Mann hat also Talent (oder Erfahrung). Wir können uns aber irren und H_0 fälschlicherweise ablehnen. Dies wäre ein Fehler 1. Art: Wir billigen dem Beamten Talent zu, obwohl er einfach Glück hatte.
Der Fehler 2. Art liegt vor, wenn wir behaupten, alles sei nur Zufall, obwohl der Beamte beförderungswürdig wäre.

9−3 Wenn p die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" ist, dann übersetzen sich Null- bzw. Alternativhypothese mit

$$H_0 : p = \tfrac{1}{2}, \quad H_1 : p \neq \tfrac{1}{2}\ .$$

Die Zufallsgrösse X = "Anzahl der Köpfe" ist binomial verteilt mit $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$. Das Ereignis, dass jedes Mal dieselbe Seite erscheint (d.h. fünfmal Kopf oder fünfmal Zahl) hat dann die Wahrscheinlichkeit $P(X = 5) + P(X = 0) = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = 0.0625$. (Zweiseitiger Test!) Diese Wahrscheinlichkeit ist $> 5\%$, d.h., H_0 darf nicht abgelehnt werden.

9−4 Die Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$ ist vorgegeben. Sie gehört zu einem einseitigen Test. Die Alternativhypothese ist $H_1 : p > \frac{1}{6}$. Wenn X die Anzahl der Sechsen bezeichnet, dann ist diese Zufallsgrösse unter der Voraussetzung H_0 binomial verteilt mit $n = 6$, $p \leq \frac{1}{6}$. Wir bestimmen für den Fall $p = \frac{1}{6}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei oder mehr Sechsen geworfen werden. Es ist

$$P(3 \leq X \leq 6) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6 = 0.0623\ .$$

a) Mit $\alpha = 0.05$ ist $P(3 \leq X \leq 6) > \alpha$. Wir können trotz der drei geworfenen Sechsen auf dem 5%-Niveau die Nullhypothese nicht zurückweisen.
b) Mit $\alpha = 0.1$ dagegen ist $P(3 \leq X \leq 6) < \alpha$. Es ist also unwahrscheinlich (vorausgesetzt, wir ziehen die Grenze zwischen wahrscheinlich und unwahrscheinlich bei 10%), dass bei zutreffendem H_0 drei (oder mehr) Sechsen geworfen werden. Wir lehnen H_0 ab und akzeptieren H_1 (verfälschter Würfel), wobei wir uns aber mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% irren können.
Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt (d.h., man nimmt an, der Würfel sei zugunsten der Sechs verfälscht), obwohl die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs tatsächlich $\leq \frac{1}{6}$ ist.
Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl in Tat und Wahrheit der Würfel zugunsten der Sechs verfälscht ist.

9−5 Wir nehmen an, die Nullhypothese "Mein Kollege kann nicht hellsehen" sei richtig. Dann gibt er seine Antworten völlig zufällig und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Recht hat, ist dann $= \frac{1}{2}$. Die Zufallsgrösse X = "Anzahl richtiger Antworten" ist somit binomial verteilt mit $n = 12$, $p = \frac{1}{2}$. Eine etwas langweilige Rechnung liefert die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(X = 12) = 0.00024\\
P(X = 1) &= P(X = 11) = 0.00293\\
P(X = 2) &= P(X = 10) = 0.01611\\
P(X = 3) &= P(X = 9) \ \ = 0.05371\\
P(X = 4) &= P(X = 8) \ \ = 0.12085\\
P(X = 5) &= P(X = 7) \ \ = 0.19336\\
P(X = 6) &= 0.22559.
\end{aligned}$$

Addition ergibt $P(X \geq 10) = 0.01928$, $P(X \geq 9) = 0.07299$, $P(X \geq 8) = 0.19384$.
a) $\alpha = 0.05$: Damit $P(X \geq k) < 0.05$ ist, muss $k \geq 10$ sein. Wir verlangen also mindestens 10 richtige Antworten.
b) $\alpha = 0.1$: Damit $P(X \geq k) < 0.1$ ist, muss $k \geq 9$ sein. Wir verlangen also mindestens 9 richtige Antworten.
Dies zeigt, dass die Grenze $\alpha = 5\%$ recht streng ist: Neun richtige Antworten von zwölf reichen noch nicht aus, um den Zweifler auf diesem Niveau von den Fähigkeiten des Kollegen zu überzeugen; wohl entgegen dem Gefühl.
Fehler 1. Art: Ich glaube an seine Fähigkeit, obwohl er sie nicht hat.
Fehler 2. Art: Ich glaube nicht an seine Fähigkeit, obwohl er sie hat.

9−6 Nach (8.2.5) ist $\overline{X}$ normal verteilt mit $\mu = E(X) = E(\overline{X}) = 50$ und der Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.5/10 = 0.05$ (denn $n = 100$). Weiter ist dann (vgl. (8.2.5)) die standardisierte Grösse

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

standard-normal verteilt. Der Tabelle der kritischen Werte in (5.10.5) bzw. in (6.2.3) entnimmt man, dass

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 50}{0.05}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

ist. Wenn nun μ tatsächlich $= 50$ ist, dann ist nur in 5% aller Fälle

$$\left|\frac{\overline{X} - 50}{0.05}\right| \geq 1.96 \ .$$

Trifft dies zu, so werden wir $H_0 : \mu = 50$ ablehnen. Die obige Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\overline{X} - 50}{0.05} \leq -1.96 \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{X} - 50}{0.05} \geq 1.96 \ .$$

Umgerechnet

$$\overline{X} \leq 49.9 \quad \text{oder} \quad \overline{X} \geq 50.1 \ .$$

Weicht also der Durchschnitt der Längen der 100 Nägel um 1 mm oder mehr vom Sollmass 50 mm ab, so wird man H_0 verwerfen, d.h. annehmen, die Einstellung der Maschine stimme nicht mehr.
PS. Dieser Test ähnelt dem t-Test, der in Teil 9.3 besprochen wird. Der Unterschied ist der, dass hier die Standardabweichung von X und von $\overline{X}$ bekannt ist. Beim t-Test werden diese Grössen geschätzt, weshalb dort nicht die Normalverteilung, sondern die so genannte t-Verteilung verwendet werden muss.

9−7 Die Zufallsgrösse X bezeichnet die Anzahl der Tüten mit Gutschein unter den 10 kontrollierten. Sie ist binomial verteilt mit $n = 10$ und $p = 0.1$ im Fall A, $p = 0.02$ im Fall B.
Wie angegeben ist
H_0 : Schachtel ist aus dem Sortiment A,
H_1 : Schachtel ist aus dem Sortiment B.

Wenn H_0 richtig ist, dann ist $P(X = 0) = 0.9^{10} = 0.348$.

Der Fehler 1. Art (H_0 richtig, aber abgelehnt), hat die Wahrscheinlichkeit 34.87%. Der Test ist also nicht gut. Die Kioskfrau müsste mehr Tüten testen.

Der Fehler 2. Art passiert, wenn H_0 falsch ist, aber beibehalten wird, also wenn in Tat und Wahrheit die Schachtel aus dem Sortiment B stammt, die Frau aber mindestens einen Gutschein gefunden hat (denn dann nimmt sie ja an, es handle sich um den Fall A). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies passiert, ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.98^{10} = 0.1829$, denn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung ist bei falschen H_0 (und demzufolge richtigem H_1) $= 0.02$. Der Fehler 2. Art hat eine Wahrscheinlichkeit von 18.29%.

In dieser Aufgabe können wir auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art berechnen und zwar deshalb, weil zu H_1 hier eine feste Wahrscheinlichkeit gehört (nämlich 0.02). Bei den Beispielen aus Teil 9.1 war dies nicht der Fall; die Alternativhypothese lautete $p \neq \frac{1}{2}$ oder $p < \frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit war also nicht eindeutig festgelegt. Dies trifft auch in allen Aufgaben von 9−1 bis 9−6 zu.

9−8 Es sei p die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs. Es gibt hier nur die Möglichkeiten $p = 0.3$ und $p = 0.1$. Der Versuch ist so angelegt, dass bei zwei oder weniger Sechsen die Hypothese "$p = 0.1$" angenommen wird. Da die Nullhypothese die zu verwerfende Aussage ist, setzen wir $H_0 : p = 0.3$, $H_1 : p = 0.1$.
Mit X bezeichnen wir die Anzahl der Sechsen beim Wurf. H_0 wird abgelehnt, wenn $X \leq 2$ ist. Ein Fehler erster Art liegt dann vor, wenn wir H_0 fälschlicherweise ablehnen, d.h., wenn es sich tatsächlich um den 30%-Würfel handelt, wir aber behaupten, dies treffe nicht zu, weil nämlich $X \leq 2$ ist. Nun können wir aber die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis berechnen, denn X ist binomial verteilt mit $n = 15$ und $p = 0.3$ (Letzteres weil H_0 zutrifft). Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art ist also

$$P(X \leq 2) = \binom{15}{0} 0.3^0 0.7^{15} + \binom{15}{1} 0.3^1 0.7^{14} \binom{15}{2} 0.3^2 0.7^{13} = 0.1268\ .$$

Einen Fehler 2. Art machen wir dann, wenn wir H_0 beibehalten, also annehmen, es handle sich um den 30%-Würfel, obwohl dies nicht wahr ist. Diese Situation tritt ein, wenn wir mit dem 10%-Würfel drei oder mehr Sechsen werfen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist (diesmal liegt eine Binomialverteilung mit $n = 15$, $p = 0.1$ vor)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(\binom{15}{0} 0.1^0 0.9^{15} + \binom{15}{1} 0.1^1 0.9^{14} \binom{15}{2} 0.1^2 0.9^{13}\right) \\ &= 1 - 0.8159 = 0.1841\ . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art konnte hier — wie in 9−7 — berechnet werden, weil sich die Alternativhypothese auf eine genau festgelegte Wahrscheinlichkeit ($p = 0.1$) bezog.

Wir nehmen zur Lösung der folgenden Aufgaben jeweils stillschweigend an, die zur Diskussion stehende Zufallsgrösse sei stetig und (wenigstens annähernd) normal verteilt, so dass die in 9.2.1.C genannten Voraussetzungen erfüllt sind (vgl. hierzu auch die Bemerkungen in (9.2.3)).

9−9 Die Zufallsgrösse X bezeichnet hier das Gewicht eines Puderzucker-Sackes; der Erwartungswert $\mu = E(X)$ beschreibt das mittlere Gewicht aller produzierten Säcke. Die Behauptung der Aufgabe besagt, dass $\mu = 500$ ist. Es geht hier nur um die Frage der Abweichung von diesem Wert und nicht darum, ob die Säcke zu schwer oder zu leicht sind. Deshalb testen wir zweiseitig. Die Hypothesen lauten somit $H_0 : \mu = 500$ (d.h. die Grösse μ_0 ist hier $= 500$) und $H_1 : \mu \neq 500$.

Die Stichprobe liefert die folgenden Werte: $n = 6, \bar{x} = 498.333, s_{\bar{x}} = 2.170$. Testgrösse $t = (\bar{x} - \mu_0)/s_{\bar{x}} = -0.767$. Kritischer Wert $t_\alpha = 2.571$. Wegen $|t| < t_\alpha$ kann H_0 nicht verworfen werden.

9−10 a) In diesem Beispiel ist μ der Erwartungswert der Zufallsgrösse $X =$ "Brenndauer einer Kerze", also die mittlere Brenndauer aller solcher Kerzen. Da wir die Behauptung $\mu \geq 15$ widerlegen möchten, testen wir einseitig mit $H_0 : \mu \geq 15, H_1 : \mu < 15$ (Variante ◀). Die Zahl μ_0 aus den allgemeinen Formeln ist hier $= 15$.

Wir berechnen $\bar{x} = 13$, $s = 2.2039$, $s_{\bar{x}} = 0.7792$, ferner ist $n = 8$, $\nu = 7$. Testgrösse $t = (\bar{x} - \mu_0)/s_{\bar{x}} = -2.567$. Kritischer Wert $t_{0.1,7} = 1.895$ (da einseitig getestet wird, ist mit $2\alpha = 0.1$ zu arbeiten). Wegen $t < -t_{2\alpha,\nu}$ können wir H_0 und damit die Behauptung des Herstellers auf dem 5%-Niveau ablehnen.

b) Diese Ablehnung kann nicht mit absoluter Sicherheit erfolgen. Vielmehr könnten die erhaltenen Zahlen auch auftreten, wenn die mittlere Brenndauer ≥ 15 Minuten wäre, dies aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 5%.

9−11 Es sei X die Zufallsgrösse "Länge der Schrauben aus dieser Produktion". Die Hypothese "die Maschine ist richtig eingestellt", besagt, dass $\mu = E(X) = 50$ ist. Da eine falsche Justierung sowohl zu lange als auch zu kurze Schrauben liefern könnte, testen wir zweiseitig mit
$H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu \neq 50$, d.h., hier ist $\mu_0 = 50$.

Die Rechnung ergibt $n = 12$, $\bar{x} = 50.5$, $s = 0.8301$, $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{12} = 0.2396$. Damit folgt $t = (\bar{x} - \mu_0)/s_{\bar{x}} = 2.087$.

a) $\alpha = 5\%$, $\nu = 11$, $t_{\alpha,\nu} = 2.201$. Wegen $|t| < 2.201$ können wir H_0 nicht ablehnen.
b) $\alpha = 10\%$, $\nu = 11$, $t_{\alpha,\nu} = 1.796$. Wegen $|t| > 1.796$ können wir H_0 ablehnen.

Das gewählte Signifikanzniveau α hat natürlich einen Einfluss auf Verwerfung oder Annahme der Nullhypothese. In b) lehnen wir H_0 ab, können uns dabei aber mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% irren. Wenn uns diese Wahrscheinlichkeit zu gross ist und wir mehr Sicherheit haben wollen, etwa mit $\alpha = 5\%$, dann dürfen wir H_0 nicht ablehnen.

9−12 Die Zufallsgrösse X bezeichnet hier das Gewicht der Marzipanrollen, μ ist der Erwartungswert von X.

a) Die angegebene Hypothese ist unsere Nullhypothese. Also: $H_0 : \mu = 80$, $H_1 : \mu \neq 80$. Mit $\mu_0 = 80$, $\bar{x} = 79$ und $s_{\bar{x}} = 2.6/\sqrt{25} = 0.52$ ist die Testgrösse $t = (\bar{x} - \mu_0)/s_{\bar{x}} = -1/0.52 = -1.923$.

Das Signifikanzniveau α ist nicht vorgeschrieben, wir wählen $\alpha = 5\%$. Mit $\nu = 24$ erhalten wir $t_{\alpha,\nu} = 2.064$. Wegen $|t| < t_{\alpha,\nu}$ können wir H_0 auf dem 5%-Niveau nicht ablehnen (auf dem 10%-Niveau könnten wir dies tun).

b) Die Fragestellung führt auf einen einseitigen Test. Von den beiden Möglichkeiten wählen wir $H_0 : \mu \geq 80$, $H_1 : \mu < 80$ (Variante ◀), denn wenn wir H_0 zurückweisen können, haben wir unsere Frage beantwortet. Die Testgrösse t ist dieselbe wie in a), wir müssen sie aber mit $t_{2\alpha,\nu} = t_{0.1,24} = 1.711$ vergleichen. Wegen $t < -1.711$ können wir hier H_0 ablehnen und H_1 akzeptieren. (Bei der Variante ▶ $H_0 : \mu \leq 80$, $H_1 : \mu > 80$ lässt sich H_0 nicht ablehnen, was wegen $\bar{x} < 80$ von vornherein klar ist. Vgl. Bemerkung 2 in (9.2.4).)

c) Mit $n = 100$ ändert sich $s_{\bar{x}}$. Wir erhalten $s_{\bar{x}} = 2.6/\sqrt{100} = 0.26$, und somit ist $t = -3.846$. Nun lässt sich auch im Fall a) — und erst recht im Fall b) — die Nullhypothese verwerfen, wie ein Blick auf Tabelle (6.2.6) zeigt.

9−13 Da von jeder Person zwei Testdaten erhoben wurden, geht es hier um einen Test für zwei verbundene (gepaarte) Stichproben. Wir bilden zunächst die Differenzen X = "Wert vormittags minus Wert nachmittags" und erhalten die Zahlen −4, −3, −3, 0, −4, 1, −2, −3, 0.

Wir wenden den t-Test mit den Hypothesen $H_0 : \mu = 0$, $H_1 : \mu \neq 0$ an. Wir testen zweiseitig, denn es wird nach einem Unterschied zwischen vormittäglicher und nachmittäglicher Leistung gefragt, und nicht etwa danach, ob die nachmittägliche Leistung besser sei.

Wir berechnen $\bar{x} = -2$, $s = 1.8708$, $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{9} = 0.6236$. Damit wird $t = (\bar{x} - 0)/s_{\bar{x}} = -3.207$.

a) $\alpha = 5\%$, $\nu = 8$, $t_{\alpha,\nu} = 2.306$. Wegen $|t| > t_{\alpha,\nu}$ lehnen wir H_0 auf diesem Niveau ab.

b) $\alpha = 1\%$, $\nu = 8$, $t_{\alpha,\nu} = 3.355$. Wegen $|t| < t_{\alpha,\nu}$ können wir hier H_0 nicht ablehnen.

9−14 Auch hier liegen verbundene Stichproben vor. Zunächst bilden wir die Differenzen "vorher" minus "nachher":

$$2.0,\ 1.0,\ 4.4,\ 0,\ 1.5,\ -1.0,\ 0.5.$$

Die Zufallsgrösse X beschreibt diese Differenzen, $\mu = E(X)$ ist die durchschnittliche Abnahme (positiv gerechnet) aller Personen, die sich dieser Diät unterziehen. Da wir einen Gewichtsverlust nachweisen wollen, testen wir einseitig mit $H_0 : \mu \leq 0$, $H_1 : \mu > 0$ (Variante ▶). Mit $n = 7$, $\bar{x} = 1.2, s_{\bar{x}} = 0.6506$ erhalten wir $t = \bar{x}/s_{\bar{x}} = 1.844$. Für $\nu = 6$, $\alpha = 0.05$ beträgt der kritische Wert gemäss Tabelle $t_{2\alpha,\nu} = 1.943$. Die Entscheidungsregel erlaubt uns nicht, H_0 zu verwerfen.

9−15 Die zugrunde liegende Zufallsgrösse X beschreibt das Gewicht einer Packung Mehl. Die Stichprobe vom Umfang $n = 50$ ergab die Masszahlen $\bar{x} = 990$, $s = 30$. Da wir uns für eine Veränderung des mittleren Abfüllgewichts interessieren (und nicht etwa dafür, ob es kleiner geworden ist), testen wir zweiseitig mit $H_0 : \mu = 1000$, $H_1 : \mu \neq 1000$. Mit $s_{\bar{x}} = 30/\sqrt{50} = 4.243$ erhalten wir $t = (990 - 1000)/4.243 = -2.357$. Die kritische Grösse ist für $\alpha = 5\%$, $\nu = 49$ gleich 2.010 (hier wurde interpoliert, da $\nu = 49$ in der Tabelle nicht vorkommt. Ebensogut hätten wir aber mit $\nu = 50$ arbeiten können). Jedenfalls ist $|t| > t_{\alpha,\nu}$ und wir können H_0 ablehnen. Wir dürfen (im Rahmen der Irrtumswahrscheinlichkeit) behaupten, dass sich das mittlere Abfüllgewicht verändert hat.

9−16 Hier interessiert uns die Zufallsgrösse X = "Gewicht von Neugeborenen". Gegeben sind die Daten $n = 40$, $\bar{x} = 3300$ und $s = 500$. Daraus berechnen wir $s_{\bar{x}} = 500/\sqrt{40} = 79.057$.

Wir möchten nachweisen, dass $\mu > 3200$ (bzw. > 3150) ist und testen daher einseitig mit der Variante ▶, d.h. mit $H_0 : \mu \leq 3200$, $H_1 : \mu > 3200$ (bzw. analog mit 3150 statt 3200). Mit $\alpha = 5\%$ und $\nu = 39$ ist $t_{2\alpha,\nu} = 1.685$ (interpoliert, was nicht unbedingt nötig wäre).

a) Hier wird $t = (3300 - 3200)/79.057 = 1.265$. Diese Zahl ist $< t_{2\alpha,\nu}$, wir können H_0 nicht ablehnen.

b) Hier wird $t = (3300 - 3150)/79.057 = 1.897$. Diese Zahl ist $> t_{2\alpha,\nu}$, wir können H_0 ablehnen.

c) Wir müssen n so bestimmen, dass

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} > t_{2\alpha,\nu}$$

ist. Hier ist $(\bar{x} - \mu_0)/s = (3300 - 3200)/500 = 0.2$ fest; es ist also $t = 0.2\sqrt{n}$. Beachten Sie, dass auch $t_{2\alpha,\nu}$ von n abhängt. Wir müssen also den gesuchten Wert von n durch Ausprobieren finden. Nun ist, wie man der Tabelle (6.2.6) für $\alpha = 0.1$ entnimmt, der kleinstmögliche Wert von $t_{2\alpha,\nu} = 1.645$. Somit ist sicher $t = 0.2\sqrt{n} > 1.645$ und daraus folgt zunächst $n > 68$. Nun ist für $n = 69$ die Zahl $t = 0.2\sqrt{69} = 1.649$, während $t_{2\alpha,\nu} \approx 1.667$ ist. Somit ist $n = 69$ zu klein. Für $n = 70$ aber ist $t = 0.2\sqrt{70} = 1.673 > t_{2\alpha,\nu} = 1.667$. Deshalb lautet die Antwort: $n = 70$.

Wir nehmen zur Lösung der folgenden Aufgaben jeweils stillschweigend an, die zur Diskussion stehende Zufallsgrösse sei stetig und (wenigstens annähernd) normal verteilt, so dass die in 9.3.1.C genannten Voraussetzungen erfüllt sind (vgl. hierzu auch die Bemerkungen in (9.2.3)).

9−17 a) Diese Behauptung ist mit dem t-Test für zwei unabhängige Stichproben nachzuprüfen. Wenn wir den Erwartungswert der ersten Grundgesamtheit mit μ_1, jenen der zweiten mit μ_2 bezeichnen, dann haben wir die Hypothesen $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2,\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Zur Bestimmung der Testgrösse berechnen wir gemäss (9.3.1) die Durchschnitte $\bar{x} = 28, \bar{y} = 25$ sowie die Grössen $S_{xx} = 18,\ S_{yy} = 16$. (Wenn Ihr Taschenrechner die Standardabweichung s liefert, dann beachten Sie die in (9.3.2) angegebene Formel $S_{xx} = (m - 1)s^2$.) Schliesslich ist $m = 6,\ n = 8$.
Die Formel von (9.3.1) führt auf die Testgrösse $t = 3.300$.
Der Tabelle (6.2.6) entnimmt man mit $\alpha = 5\%,\ \nu = 6 + 8 - 2 = 12$ den Wert $t_{\alpha,\nu} = 2.179$. Wegen $|t| > t_{\alpha,\nu}$ lehnen wir H_0 ab.
b) Diese Behauptung ist mit dem t-Test für eine einzelne Stichprobe nachzuprüfen. Die Hypothesen lauten: $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = 27,\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq 27$.
Man berechnet $\bar{x} = 28,\ s = 1.8974,\ s_{\bar{x}} = 0.7746$ und findet $t = (\bar{x} - \mu_0)/s_{\bar{x}} = 1.291$. Mit $\alpha = 5\%,\ \nu = 5$ ist $t_{\alpha,\nu} = 2.571$. Wir können H_0 nicht ablehnen.

9−18 Wir verwenden den t-Test für zwei unabhängige Stichproben. (Obwohl beide Stichproben denselben Umfang haben, handelt es sich *nicht* um gepaarte Stichproben.) Mit μ_1 bezeichnen wir den Erwartungswert der Zufallsgrösse "Gewichtsabnahme bei Diät A", mit μ_2 die analoge Zahl im Fall von B.
a) Da wir nachweisen wollen, dass die eine Diät besser als die andere ist (und nicht, dass die beiden nur verschiedene Resultate bringen), testen wir einseitig. In diesem Fall wählen wir H_0 so, dass uns die allfällige Ablehnung zusagen würde, also (Variante ►) $\mathrm{H}_0 : \mu_1 \leq \mu_2,\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$. ($\mathrm{H}_1$ besagt also, die mittlere Gewichtsabnahme im Fall A sei grösser als im Fall B.)

b) Wir berechnen $\bar{x} = 2,\ S_{xx} = 5.5,\ \bar{y} = 0.9,\ S_{yy} = 4.72$. Weiter ist $m = n = 6$. Wir finden gemäss der Formel von (9.3.1) $t = 1.885$. Da wir einseitig testen, vergleichen wir diesen Wert mit $t_{2\alpha,\nu} = t_{0.1,10} = 1.812$. Wegen $t > t_{2\alpha,\nu}$ lehnen wir H_0 ab und akzeptieren H_1: Im Rahmen der Irrtumswahrscheinlichkeit bringt Diät A eine grössere Abnahme als Diät B.

9−19 a) Es wird nach einem Unterschied in Bezug auf die Brenndauern gefragt und nicht danach, ob die eine Marke länger brenne als die andere. Wir testen deshalb zweiseitig.

b) $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2,\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Dabei ist μ_1 (bzw. μ_2) der Erwartungswert der Zufallsgrösse "Brenndauer von Aaah!" (bzw. von "Oooh!").

c) Für "Aaah!" ist $\bar{x} = 60,\ s = 5.8310 = \sqrt{34},\ S_{xx} = 238$. Für "Oooh!" ist $\bar{y} = 65,\ s = 5.8310$ und somit $S_{yy} = (n - 1)s^2 = 11.34 = 374$. Wir erhalten gemäss (9.3.1) $t = -1.879$. Mit $\alpha = 5\%,\ \nu = m + n - 2 = 18$ ist $t_{\alpha,\nu} = 2.101$. Wegen $|t| < t_{\alpha,\nu}$ können wir H_0 nicht ablehnen.

9−20 Wir wenden den t-Test für zwei unabhängige Stichproben in einer einseitigen Form an. Mit μ_X bezeichnen wir den Erwartungswert der Zufallsgrösse X = "Ertrag bei Düngung mit neuem Mittel", mit μ_Y den analogen Wert für die Zufallsgrösse Y = "Ertrag bei konventioneller Düngung". Da wir gerne zeigen möchten, dass $\mu_X > \mu_Y$ ist, wählen wir die Hypothesen gemäss Variante ►. $\mathrm{H}_0 : \mu_X \leq \mu_Y,\ \mathrm{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$.

Wir bestimmen nun die Zahlen für die Berechnung der Testgrösse t gemäss (9.3.1):

$$\text{Zufallsgrösse } X\text{: } m = 13,\ \bar{x} = 540,\ s = 35 \Longrightarrow S_{xx} = 12 \cdot 35^2 = 14'700.$$
$$\text{Zufallsgrösse } Y\text{: } n = 11,\ \bar{y} = 505,\ s = 40 \Longrightarrow S_{yy} = 10 \cdot 40^2 = 16'000.$$

Es folgt $t = 2.287$, ferner ist $\nu = 13 + 11 - 2 = 22$.

a) $\alpha = 1\%,\ t_{2\alpha} = 2.508$: H_0 wird nicht verworfen.
b) $\alpha = 5\%,\ t_{2\alpha} = 1.717$: H_0 wird verworfen.

9−21 Wir wenden den t-Test für zwei unabhängige Stichproben in einer einseitigen Form an. Mit μ_A bezeichnen wir den Erwartungswert der Zufallsgrösse X = "Fettgehalt (pro Liter) der Milch aus A", mit μ_B den analogen Wert für die Zufallsgrösse Y, welche die Milch aus B betrifft. Da wir gerne zeigen möchten, dass $\mu_A < \mu_B$ ist, wählen wir die Hypothesen wie folgt: $H_0 : \mu_A \geq \mu_B$, $H_1 : \mu_A < \mu_B$ (Variante ◀). Wir bestimmen nun die Zahlen für die Berechnung der Testgrösse t gemäss (9.3.1). Beachten Sie, dass hier nicht die Standardabweichungen s, sondern die Varianzen s^2 gegeben sind.

Zufallsgrösse X: $m = 18,\ \bar{x} = 36,\ s^2 = 16 \Longrightarrow S_{xx} = (m-1)s^2 = 17 \cdot 16 = 272.$
Zufallsgrösse Y: $n = 10,\ \bar{y} = 39,\ s^2 = 9 \Longrightarrow S_{yy} = (n-1)s^2 = 9 \cdot 9 = 81.$

Es folgt $t = -2.064$, ferner ist $\nu = 18 + 10 - 2 = 26$.

Es ist $\alpha = 5\%,\ t_{2\alpha} = 1.706$. Wegen $t < -t_{2\alpha}$ wird H_0 verworfen, d.h., die Milch aus A hat signifikant geringeren Fettgehalt.

9−22 Die Behauptung, der Würfel sei ausgewogen, führt auf die Nullhypothese H_0 : Es liegt eine Gleichverteilung vor. Unter dieser Voraussetzung sind alle erwarteten Häufigkeiten $t_i =$ 3333.3
($i = 1, \ldots, 6$). Die theoretischen Häufigkeiten sind der Tabelle zu entnehmen. Eine direkte Rechnung ergibt $\chi^2 = 270.96$. Ein Blick auf die Tabelle (6.2.4) zeigt, dass (mit $\nu = 5$) H_0 auf jedem Niveau abgelehnt werden kann. Unser Würfel ist (oder war) sicher nicht ausgewogen. (Vgl. auch Beispiel 9.4.3.A.)

9−23 Die Nullhypothese lautet H_0 : Die Zufallsgrösse X = "Anzahl Geburten pro Quartal" folgt einer diskreten Gleichverteilung.
Fall a): Die erwarteten (t_i) und beobachteten (x_i) Häufigkeiten sind

	1	2	3	4
t_i	50	50	50	50
x_i	62	44	54	40

Es folgt $\chi^2 = 5.92$.
Fall b): Hier lauten die Zahlen wie folgt:

	1	2	3	4
t_i	75	75	75	75
x_i	93	66	81	60

Es folgt $\chi^2 = 8.88$.
In beiden Fällen ist $\nu = 3,\ \alpha = 0.05$, somit $\chi^2_\alpha = 7.815$.
Im Fall a) können wir H_0 nicht ablehnen, wohl aber im Fall b).

9−24 Die Stichprobe hat den Umfang 250. Als H_0 nehmen wir an, die vier Klassen seien im Verhältnis 1:4:4:16 verteilt. So erhalten wir die erwarteten Häufigkeiten 10, 40, 40 und 160. Damit und mit den beobachteten Häufigkeiten aus der Aufgabenstellung berechnen wir $\chi^2 = 8.75$. Es liegen vier Klassen vor, also ist $\nu = 3$. Im Fall a) ($\alpha = 0.05$) ist der kritische Wert = 7.815, wir können H_0 ablehnen. Arbeiten wir aber mit einer kleineren Irrtumswahrscheinlichkeit, wie etwa im Fall b) mit $\alpha = 0.01$, wo der kritische Wert = 11.345 ist, so können wir H_0 nicht ablehnen.

9−25 a) Die Zufallsgrösse X ist binomial verteilt, mit $n = 3$ und $p = 0.2$. (Das Einzelexperiment "packe Ei aus und melde 'Erfolg', wenn es weiss ist", wird dreimal wiederholt.) Wir erhalten folgende Verteilung

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0.5120	0.3840	0.0960	0.0080

b) Die Nullhypothese lautet:
H_0 : Die Anzahl der weissen Eier folgt einer Binomialverteilung mit $n = 3,\ p = 0.2$.
Wir prüfen H_0 mit dem χ^2-Test nach. Wir haben vier Klassen, d.h., es ist $k = 4,\ \nu = k-1 = 3$. Die beobachteten Häufigkeiten x_i sind 500, 400, 90, 10. Die erwarteten Häufigkeiten finden wir, indem wir die obigen Wahrscheinlichkeiten mit 1000 multiplizieren: 512, 384, 96, 8.

Damit berechnet man $\chi^2 = 1.823$. Ein Vergleich mit dem kritischen Wert ($\alpha = 0.05,\ \nu = 3$) $\chi^2_\alpha = 7.815$ zeigt, dass man H_0 nicht ablehnen kann.

9−26 Die Nullhypothese H_0 lautet: Es liegt eine Poisson-Verteilung mit $\mu = 0.2$ vor. Die erwarteten Häufigkeiten sind deshalb: 819, 164, 17 (Wahrscheinlichkeiten aus Tabelle (6.1.4) mal 1000). Da drei Klassen vorliegen, ist $\nu = 2$. Es folgt (unter Verwendung der beobachteten Häufigkeiten aus der Aufgabenstellung) $\chi^2 = 0.8478 < \chi^2_{0.05} = 5.991$. H_0 kann nicht verworfen werden, d.h., die Resultate bestätigen die Theorie.
Beachten Sie, dass der Parameter hier gegeben und nicht geschätzt ist. Dies hat einen Einfluss auf die Bestimmung des Freiheitsgrads.

9−27 Fall (A). Aufgrund der angegebenen Nullhypothese berechnen wir zuerst die Wahrscheinlichkeiten

i	0	1	2	3	4
$P(X = i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Die erwarteten Häufigkeiten erhalten wir durch Multiplikation dieser Wahrscheinlichkeiten mit 320. Wir geben gleich noch die beobachteten Häufigkeiten x_i an.

i	0	1	2	3	4
t_i	20	80	120	80	20
x_i	42	110	111	48	9

Wir führen einen χ^2-Test durch. Die Anzahl k der Klassen ist 5, es folgt $\nu = 4$. Für die Testgrösse erhalten wir $\chi^2 = 54.975$. Diese Zahl ist grösser als jeder der in (6.2.4) angeführten kritischen Werte, wir lehnen H_0 ab.

Fall (B). Die Nullhypothese besagt hier bloss, dass eine Binomialverteilung mit $n = 4$ vorliegt, über den Wert von p wird a priori keine Aussage gemacht. Wir schätzen deshalb dieses p: Die Anzahl der Mädchen beträgt $42 \cdot 0 + 110 \cdot 1 + 111 \cdot 2 + 48 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 512$. Da total $4 \cdot 320 = 1280$ Kinder da sind, ist $p = 512/1280 = 0.4$. Für X erhalten wir jetzt die nachstehenden Wahrscheinlichkeiten:

i	0	1	2	3	4
$p(X = i)$	0.1296	0.3456	0.3456	0.1536	0.0256

Dies führt auf folgende Verteilung:

i	0	1	2	3	4
t_i	41.472	110.592	110.592	49.152	8.192
x_i	42	110	111	48	9

Wir berechnen $\chi^2 = 0.118$. Da hier ein Parameter, nämlich p, geschätzt wurde, ist $\nu = 5 - 1 - 1 = 3$. Es folgt $\chi^2_\alpha = 7.815$. Wir können H_0 nicht ablehnen.

9−28 H_0 : Es liegt eine Binomialverteilung vor. Es sind gemäss Tabelle total 53680 Familien untersucht worden, die zusammen 429440 Kinder haben. Davon sind 221023 Knaben. Wir schätzen p durch $221023/429440 = 0.5147$. Ferner ist $\alpha = 0.05$, $\nu = 9 - 1 - 1 = 7$ (ein geschätzter Parameter), $\chi^2_\alpha = 14.07$
Die gemäss Binomialverteilung (mit $n = 8$, $p = 0.5147$) berechneten theoretischen Häufigkeiten sind $t_0 = 165$, $t_1 = 1402$, $t_2 = 5203$, $t_3 = 11035$, $t_4 = 14628$, $t_5 = 12410$, $t_6 = 6580$, $t_7 = 1994$, $t_8 = 264$. Wir erhalten $\chi^2 = 92$. Konklusion: H_0 wird verworfen.

9−29 Die Nullhypothese besagt, dass eine Poisson-Verteilung vorliegt. Der Parameter λ ist nicht gegeben, sondern muss geschätzt werden. Den Daten entnimmt man zunächst, dass in den 260 Tagen $89 \cdot 0 + 97 \cdot 1 + 43 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 286$ Unfälle passiert sind. Die durchschnittliche Anzahl Unfälle pro Tag beträgt somit $286/260 = 1.1$ und das ist unser Schätzwert für λ. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten der Poisson-Verteilung mit $\lambda = 1.1$ nach der üblichen Formel und multiplizieren sie mit 260, um die erwarteten Häufigkeiten zu bekommen. Dies führt auf folgende Tabelle:

i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
x_i	89	97	43	24	5	1	1	0
t_i	86.546	95.201	52.361	19.199	5.280	1.162	0.213	0.038

Damit die theoretischen Häufigkeiten gross genug sind (vgl. 9.4.1.E.1), legen wir die Klassen 4, 5, 6 und ≥ 7 zusammen. Die neue Klasse hat eine beobachtete Häufigkeit von 7, eine erwartete von 6.693. Es bleiben 5 Klassen, damit wird $\nu = 5 - 1 - 1 = 3$. Die Berechnung von χ^2 ergibt 2.992. Wir können H_0 nicht zurückweisen. Die Daten widersprechen der Annahme, es handle sich um eine Poisson-Verteilung, nicht.

9−30 Die Nullhypothese "$H_0 : X$ ist Poisson-verteilt" wird mit einem χ^2-Test geprüft. Der Parameter λ der Poisson-Verteilung ist nicht vorgegeben; er wird durch die mittlere Anzahl $\bar{x}$ der Anrufe pro Minute geschätzt. Es ist

$$\bar{x} = \frac{29 \cdot 0 + 42 \cdot 1 + 42 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 22 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{29 + 42 + 42 + 40 + 22 + 4 + 1} = \frac{360}{180} = 2\,.$$

Die Wahrscheinlichkeiten bestimmen sich mit der Formel für die Poisson-Verteilung (s.a. Tabelle (6.1.4). Darunter schreiben wir die erwarteten Häufigkeiten t_i, die sich durch Multiplikation mit 180 ergeben, sowie die beobachteten Häufigkeiten x_i.

i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$P(X = i)$	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.017
t_i	24.30	48.78	48.78	32.40	16.20	6.48	3.06
x_i	29	42	42	40	22	4	1

Damit alle theoretischen Häufigkeiten ≥ 5 sind, legen wir die beiden letzten Klassen zusammen mit den neuen Werten $t_5 = 9.54$, $x_5 = 5$.
Damit haben wir 6 Klassen; da ein Parameter geschätzt wurde, ist $\nu = 6 - 1 - 1 = 4$.
Die Formel für die Testgrösse liefert $\chi^2 = 8.814$.

a) Hier ist $\chi^2_{\alpha,\nu} = 9.488$. H_0 kann nicht abgelehnt werden.

b) Hier ist $\chi^2_{\alpha,\nu} = 7.779$. H_0 kann abgelehnt werden.

9−31 Es sei X die zugrunde liegende Zufallsgrösse. Die Nullhypothese besagt, X sei normal verteilt. Die beiden Parameter μ und σ der Normalverteilung sind nicht bekannt. Wir müssen sie also durch $\bar{x}$ und s schätzen. Da gruppierte Daten vorliegen, verwenden wir die Formeln aus (2.2.3.3.d) bzw. aus (2.2.3.7.d) (mit den Klassenmitten 26, 28, ..., 36) und erhalten $\bar{x} = 32$, $s = 2.9218$. Somit arbeiten wir mit der Normalverteilung $N(32; 2.9218^2)$.
Es ist dann $P(X \leq 25) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(25) = \Phi((25-32)/2.9218) = \Phi(-2.3958) = 0.00829$. (Diese Wahrscheinlichkeit ist nicht mit der Tabelle (6.2.3) ermittelt worden, sondern mit einem Taschenrechner.)
Analog ist $P(X \leq 27) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(27) = \Phi((27-32)/2.9218) = \Phi(-1.7113) = 0.04352$. Folglich ist $P(25 < X \leq 27) = 0.04352 - 0.00829 = 0.03523$.
Entsprechend berechnen wir die weiteren Wahrscheinlichkeiten $P(27 < X \leq 29)$ usw. Um die erwarteten Häufigkeiten zu erhalten, multiplizieren wir diese Wahrscheinlichkeiten mit dem Umfang $n = 150$ der Stichprobe und erhalten folgende Tabelle:

Klassen	≤ 25	$(25, 27]$	$(27, 29]$	$(29, 31]$	$(31, 33]$	$(33, 35]$	$(35, 37]$	> 37
erw. Häufigkeit	1.24	5.29	16.31	32.07	40.18	32.07	16.31	6.53

Damit alle erwarteten Häufigkeiten ≥ 5 sind, legen wir noch die beiden ersten Klassen zusammen. Damit haben wir

Klassen	≤ 27	$(27, 29]$	$(29, 31]$	$(31, 33]$	$(33, 35]$	$(35, 37]$	> 37
erw. Häufigkeit	6.53	16.31	32.07	40.18	32.07	16.31	6.53
beob. Häufigkeit	12	12	27	36	39	24	0

Die Testgrösse χ^2 wird nun wie üblich berechnet: Es ist $\chi^2 = 18.61$. Da sieben Klassen und zwei geschätzte Parameter vorliegen, ist der Freiheitsgrad $\nu = 7 - 1 - 2 = 4$. Mit $\alpha = 0.05$ (kritischer Wert 11.070) und sogar mit $\alpha = 0.01$ (kritischer Wert 15.086) können wir die Nullhypothese ablehnen.

9−32 Es geht hier um eine Vierfeldertafel mit der Nullhypothese: Die Merkmale in den Zeilen (Erfolg/Misserfolg in Physik) und in den Spalten (Erfolg/Misserfolg in Mathematik) sind unabhängig. Die allgemeine Formel aus (9.4.5) ergibt

$$\chi^2 = \frac{(108 \cdot 23 - 45 \cdot 24)^2 \cdot 200}{132 \cdot 68 \cdot 153 \cdot 47} = 6.108.$$

Bei einer Vierfeldertafel ist $\nu = 1$. Der kritische Wert für $\alpha = 0.05$ beträgt 3.841. Wir lehnen H_0 ab: Im Rahmen der Irrtumswahrscheinlichkeit können wir sagen, dass die Prüfungserfolge in Physik bzw. Mathematik nicht unabhängig sind.

9−33 Die gegebenen Zahlen lassen sich in einer Vierfeldertafel darstellen

	für A	für B	total
unter 20	80	180	260
über 20	67	93	160
total	147	273	420

a) Wenn die bevorzugten Sender von der Altersgruppe unabhängig sind, dann erhalten wir mit der in (9.4.5) angestellten Überlegung die folgenden Zahlen

	für A	für B	total
unter 20	91	169	260
über 20	56	104	160
total	147	273	420

b) Wir verwenden den χ^2-Test für eine Vierfeldertafel. Die Nullhypothese besagt, dass die Merkmale in den Zeilen und jene in den Spalten unabhängig sind. Damit sind die Zahlen in der zweiten Tabelle die erwarteten, jene in der ersten die beobachteten Häufigkeiten. Man erhält

$$\chi^2 = \frac{(80-91)^2}{91} + \frac{(180-169)^2}{169} + \frac{(67-56)^2}{56} + \frac{(93-104)^2}{104} = 5.370\,.$$

Der Freiheitsgrad ist $\nu = 1$. Mit $\alpha = 5\%$ ist $\chi^2_\alpha = 3.841$, wir lehnen H_0 ab. Mit $\alpha = 1\%$ ist $\chi^2_\alpha = 6.635$, wir können H_0 nicht ablehnen. Natürlich hätten wir die Testgrösse auch mit der allgemeinen Formel aus (9.4.5) berechnen können.

9−34 Zuerst sind die Prozentzahlen in absolute Häufigkeiten umzurechnen. Es ergeben sich Vierfeldertafeln.

a)

	A	B	total
bestanden	120	70	190
nicht bestanden	30	30	60
total	150	100	250

b)

	A	B	total
bestanden	180	105	285
nicht bestanden	45	45	90
total	225	150	375

Die Nullhypothese ist H_0: Prüfungserfolg und Lehrbuch sind voneinander unabhängig.
Man könnte jetzt gemäss (9.4.5) die erwarteten Häufigkeiten ausrechnen; stattdessen verwenden wir hier zur Abwechslung die "direkte" allgemeine Formel für χ^2. Im Fall a) erhalten wir $\chi^2 = 3.289$, im Fall b) $\chi^2 = 4.934$. Wegen $\chi^2_\alpha = 3.841$ lehnen wir im Fall b) die Nullhypothese ab, nicht aber im Fall a).

9−35 Nach Definition der χ^2-Verteilung mit Freiheitsgrad $\nu = 1$ (9.4.2) ist $F(x) = P(\boldsymbol{\chi}^2 \leq x) = P(X^2 \leq x)$, wobei die Zufallsgrösse X einer Standard-Normalverteilung folgt. Für $x < 0$ ist $F(x) = 0$. Für $x \geq 0$ gilt $F(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Um die Dichtefunktion $f(x)$ der χ^2-Verteilung mit $\nu = 1$ zu finden, verwenden wir die Beziehung $f(x) = F'(x)$. Wir leiten mit der Kettenregel ab (die innere Ableitung ist $1/(2\sqrt{x})$) und benützen noch, dass $\Phi' = \varphi$, die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung, ist. Dann erhalten wir

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Phi'(-\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(-\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x})\,,$$

wobei am Schluss die Symmetrie von φ, nämlich $\varphi(-\sqrt{x}) = \varphi(\sqrt{x})$ benützt wurde. Einsetzen der Definition von φ (5.10.2) ergibt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}e^{-x/2}\ .$$

Dies ist genau die Formel von (9.4.2) für den Fall $\nu = 1$. Man erkennt auch, dass die dortige Konstante $C_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ ist.