Mengenlehre:

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge M. Dann gibt es folgende Grundoperationen:

Definition. Die *Vereinigung* von A und B: $A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$. Wobei das „oder“ nicht ausschliessend gemeint ist.
Die *Schnittmenge* von A und B: $A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.

Definition. Man nennt zwei Teilmengen A und B von M *disjunkt* oder *elementfremd*, falls $A \cap B = \emptyset$ (leere Menge).

Notation. Für Teilmengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von M werden folgende Notationen eingeführt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

Einige Gesetze zu diesen Grundoperationen:

Satz. *Für Teilmengen A,B und C von M gelten folgende Distributivgesetze:*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Satz (De Morgan). *Für Teilmengen A und B von M gilt:*

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Verallgemeinerungen: Für Teilmengen $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ von M gilt:

(i) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (A_i \cap B_j)$,

(ii) $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \cup (\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcap_{i,j=1}^{\infty} (A_i \cup B_j)$,

(iii) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$,

(iv) $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Definition. Für die Mengen M_1, M_2,..., M_n bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ das *Kartesische Produkt*, welches folgendermassen definiert ist:

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Gilt zudem $M_1 = M_2 = \cdots = M_n =: M$, so bezeichnet man das Kartesische Produkt dieser Mengen mit M^n.

Infinitesimalrechnung:

Wir definieren zuerst wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Notation. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gibt es folgende Bezeichnungen:

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das *offene Intervall* zwischen a und b,

(ii) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall* zwischen a und b,

(iii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ und $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ sind die *halboffenen Intervalle* zwischen a und b.

Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ nennt man *offen*, falls U als Vereinigung von beliebig vielen offenen Intervallen geschrieben werden kann. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ nennt man *abgeschlossen*, falls A^c offen ist.

Bemerkung. $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind sowohl abgeschlossene als auch offene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Eine wichtige Funktion in dieser Vorlesung wird die Exponentialfunktion sein. Wir werden diese über die Exponentialreihe einführen und einige Eigenschaften dazu angeben (die Beweise dazu sollten in der Infinitesimalrechnung behandelt werden).

Notation. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Elemente eines Körpers (z.B. $\mathbb{R}$). Dann bezeichnet $\sum_{i=1}^{n} a_i$ die Summe dieser Elemente.
Ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen, dann nennt man $a_1 + a_2 + \cdots$ eine Reihe und bezeichnet sie durch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
(Mathematisch präziser: Man definiert eine neue Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch: $S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$. Die Reihe ist dann der Grenzwert dieser Folge: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i := \lim_{n \to \infty} S_n$.)

Definition. Wir definieren die *Exponentialfunktion* über die folgende Potenzreihe:

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Satz. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e \approx 2.71828\ldots$ *(Eulersche Zahl) und* $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.