

Prüfungsfragen zur Vlsg WTS 05, 06

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

- a) X sei $\mathcal{N}(2, 25)$ -verteilt. Berechnen Sie $P[0 < X < 4]$.
- b) X habe eine $F_{4,6}$ -Verteilung. Finden Sie a , sodass $P[X \leq a] = 0.05$.
- c) Es gelte $P[0 \leq X \leq 0.1] = 1$. Gilt allgemein $E[\cos(X)] \geq \cos(E[X])$ oder $\cos(E[X]) \geq E[\cos(X)]$?
- d) Das verliebte Paar Seppli und Trudi verbringen einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen Sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche Sie für die eine Lampe mitnehmen sollten - diese eine Lampe muss dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 3 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis den beiden das Licht ausgeht? Setzen Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.
- e) [vgl d)] Das verliebte Paar Fritz und Vreni verbringen auch einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen Sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche Sie für die *zwei Lampen* mitnehmen sollten - diese beiden Lampen müssen dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 4 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis sie nur noch eine der Lampen brennen haben? Setzen Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.
- f) Eine Krankenkasse probiert ein sehr einfaches Modell aus: Sie modelliert, dass jedeR Versicherte jeden Tag mit Wahrscheinlichkeit $1/100$ krank wird. Die Krankengeschichte wird ignoriert; jeden Tag wird man mit dieser Wahrscheinlichkeit einfach krank. Wie lange dauert es im Durchschnitt im Modell, bis eine bestimmte Person krank wird?

WT

Aufgabe 2 [2+1 Punkte]

Die stetige Zufallsgrösse X nehme nur Werte auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ an. Die Dichtefunktion sei von der Art

$$f_X(x) = c_1 \sin(x) + c_2.$$

- a) Geben Sie eine mögliche Kombination von Zahlen (c_1, c_2) an, sodass $f_X(x)$ auch wirklich eine Dichtefunktion ist.
- b) Gibt es bei a) nur eine denkbare Lösung?

Aufgabe 3 [1+1+1+1+1 Punkte]

X habe Dichte $f(x) = Kx^{11}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie

- a) die Normierungskonstante K
- b) $E[X]$
- c) $E[1/X]$
- d) die Verteilungsfunktion von $Y := 1/X$
- e) die Dichte von $Y := 1/X$.

Aufgabe 4 [2 Punkte]

Sei X eine $U[0, 1]$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Dichtefunktion von X^3 .

Aufgabe 5 [2 Punkte - leicht schwieriger!]

X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx^{-2.5}$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ und sei 0 sonst. Ihr Nachbar kennt die Verteilung nicht und will anhand einer Stichprobe x_1, \dots, x_n mit dem arithmetischen Mittel den Erwartungswert schätzen. Danach - so hat er das in einem Statistik-Grundkurs gelernt - will er mit

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die Varianz schätzen. Kommentieren Sie sein Vorgehen und die Erfolgsaussichten in Anbetracht der Verteilung.

Statistik

Aufgabe 6 [2+1 Punkte]

Sie haben eine Stichprobe vom Umfang 4. Diese Stichprobe sei eine Realisation aus $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sie haben jetzt 3 Vorschläge für Schätzer für μ :

- a) $\hat{\mu}_1 := (1/4)(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$,
- b) $\hat{\mu}_2 := (1/4)(2X_1 + 2X_3)$ und
- c) $\hat{\mu}_3 := (1/2)(X_1^2 + X_2)$.

Untersuchen Sie zuerst, ob alle 3 Schätzer erwartungstreu sind und ordnen Sie danach die erwartungstreuen Schätzer nach Ihrer Güte, wenn Sie einen (erwartungstreuen) Schätzer als "Gut" bezeichnen, wenn seine Varianz klein ist.

Aufgabe 7 [8 Punkte]

Sei x_1, \dots, x_n eine Realisation aus einer $\text{Ge}(p)$ -Zufallsgrösse. Leider wissen Sie nicht, ob $\mathcal{H}_0: p = 0.1$ oder $\mathcal{H}_1: p = 0.2$ gilt. Testen Sie auf dem Niveau α . Sowohl n als auch α sind nur allgemein gegeben. Trotzdem können Sie die Teststatistik so weit wie möglich vereinfachen und deren Verteilung angeben. Das " γ " dürfen Sie nur angedeutet stehen lassen (NP-Lemma, diskret).

Aufgabe 8 [6 Punkte]

Im Devisenhandel einer Bank gelingt es einem Händler in einem Versuch von 5 Handelstagen, in genau 4 von 5 Fällen korrekt vorauszusagen, ob der Kurs des Dollars morgen höher oder tiefer liegt. Sein Boss glaubt nicht an Intuition und Vorhersage; für den Boss ist die Wahrscheinlichkeit 50 %, ob jemand den Kurs richtig voraussagt (\mathcal{H}_0). Wenn der Boss beim Resultat "4 aus 5" einseitig testet und bei der \mathcal{H}_0 -Hypothese bleibt, wie gross ist sein α maximal?

Aufgabe 9 [6 Punkte]

Eine Gruppe von männlichen Ratten erhielt stark proteinhaltiges Futter. Die Gewichtszunahmen in Gramm waren

148, 143, 144, 120, 141, 151, 163, 158, 149, 148.

Laut Lehrbuch ist bei normalem Futter mit einer Zunahme um 140 Gramm zu rechnen. Prüfen Sie die Hypothese \mathcal{H}_0 zum Niveau $\alpha = 5\%$, dass die Zunahme nicht grösser ist bei stark proteinhaltigem Futter als sonst gegen die Alternative \mathcal{H}_1 , dass stark proteinhaltiges Futter eine grössere Gewichtszunahme bewirkt. Gehen Sie davon aus, dass die Gewichtszunahme mit einer Normalverteilung modelliert werden kann. Die Varianz ist leider unbekannt.

Aufgabe 10 [6 Punkte]

Beim Bau eines Strassentunnels zur Unterfahrung einer Ortschaft muss gesprengt werden. Die Erschütterung der Häuser darf einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Man misst daher die Erschütterung y_i im Keller eines gefährdeten Hauses. Diese wird, bei konstanter Sprengung, im wesentlichen von der Distanz x_i zum Sprengort der i -ten Sprengung abhängen. Aus physikalischen Gründen kann angenommen werden, die Erschütterung y_i sei umgekehrt proportional zur quadrierten Distanz x_i^2 , also

$$y_i \approx \beta_0 x_i^{\beta_1}$$

mit $\beta_1 = -2$. Durch logarithmieren auf beiden Seiten erhalten wir eine lineare Abhängigkeit

$$\log(y_i) \approx \log(\beta_0) + \beta_1 \log(x_i).$$

Den logarithmierten Daten $x'_i := \log(x_i)$ und $y'_i := \log(y_i)$ können wir also ein Modell der Form

$$y'_i = \log(\beta_0) + \beta_1 x'_i + \varepsilon_i$$

zugrundelegen, die Theorie der linearen Regression anwenden und β_1 schätzen.

Wir nehmen an, es seien 11 Sprengungen durchgeführt worden, und aus den Datenpaaren (x'_i, y'_i) wurde

$$SSE = 0.14, \quad SS_{xx} = \sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2 = 0.41 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = -1.92$$

bereits berechnet. Wir wollen die physikalische Annahme prüfen, dass die Erschütterung umgekehrt proportional zur quadrierten Distanz ist. Testen Sie dazu die Nullhypothese $\mathcal{H}_0: \beta_1 = -2$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1: \beta_1 \neq -2$; $\alpha = 0.05$.