Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 07; 5. Februar 2008

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) In der Volksrepublik China gab es lange Zeit eine rigorose Ein-Kind-Politik. Bauern war es aber erlaubt, noch ein Kind zu haben, wenn das erstgeborene Kind ein Mädchen war. Führt diese Bauernausnahme dazu, dass es in China mehr Knaben als Mädchen gibt? Nehmen Sie an, Knaben und Mädchen sind gleichwahrscheinlich (50 %).

b) X sei $\mathcal{N}(4, 49)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [5, 9]]$.

c) X habe eine t_8-Verteilung. Wie gross ist $P[|X| \geq 2.896]$?

d) Sei X eine $\mathcal{N}(3, 4)$-Zufallsgrösse, Y eine Exp(3)-Zufallsgrösse und Z eine $U[3, 5]$-Zufallsgrösse. X, Y, Z seien jeweils unabhängig voneinander. Berechnen Sie $E[X + Y + Z]$.

e) Brauchen Sie für d) die Unabhängigkeit?

f) Berechnen Sie in der Situation von d) auch $V[X + Y + Z]$.

WT

Aufgabe 2 [3 Punkte]

Geben Sie die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse X an, welche *gleichzeitig* folgende Eigenschaften hat:

1. $f(x) \geq 0 \ \ \forall x > 0$.
2. Median von X sei 2
3. $E[|X|] < \infty$.
4. $P[X \leq 0] = 0$.

Sie dürfen dazu eine Zufallsgrösse selber erfinden und müssen nicht eine aus Kapitel 4 nehmen (können aber).

Aufgabe 3 [1+1+1+1+1 Punkte]

Die Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ an: $P[X = i] =: p_i$. Es gelte $p_0 = 2p_1; p_1 = p_2 = p_3 = p_4$. Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

b) $E[X]$

c) $V[X]$

d) $E[(1 + X^2)^{-1}]$

e) die Zahl a, sodass $E[(X - a)^2]$ minimal wird (sie dürfen dazu Resultate aus Vlsg od Ue benutzen)

Aufgabe 4 [2+3 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-Zufallsgrösse.

a) Beweisen Sie: $E[e^X] \geq 1$.

b) Beweisen Sie: $\lim_{\sigma \to \infty} E[e^X] = \infty$. Mit der richtigen Idee kann man das auf 2 Zeilen beweisen.

Statistik

Aufgabe 5 [3 Punkte]

Der Chef der Schweizer Notenbank will untersuchen, in welcher Form der Wechselkurs des Schweizerfrankens zum amerikanischen Dollar in den kommenden 10 Handelstagen schwankt: die prozentualen Änderungen von Tagesende zu Tagesende sind seiner Meinung nach unabhängige Realisationen einer Normalverteilung $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Im Direktorium sei die Normalverteilung und die Unabhängigkeit nicht weiter umstritten, jedoch vermuten einige Gelehrte eine Wertsteigerung des Frankens. Man misst nun 10 Handelstage und kommt durchschnittlich auf eine Steigerung im Kurs von 0.4 % pro Tag. Die Standardabweichung werde gemessen mit

$$\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 0.2$$

Testen Sie auf dem 5 %-Niveau, ob der Franken durchschnittlich gleich bleibt gegen die Alternativhypothese, dass es durchschnittlich eine Steigerung gibt.

Aufgabe 6 [3 Punkte]

Der Magier Mike Shewasser behauptet, dass er durch blosses In-die-Augen-Schauen Ihren Geburtstag nennen kann (das Jahr habe 365 Tage). Dies gelingt ihm jedoch nur in 90 % der Fälle, da hochfrequentige Qunatenstrahlen seine Gabe beeinträchtigen (diese verändern bekanntlich die Iris im Auge). Sie wollen ihn jetzt testen und machen dazu ein statistisches Experiment: 3 Personen werden ihm vorgeführt. Ihre Nullhypothese ist, dass seine Erfolgswahrscheinlichkeit 365^{-1} sein sollte, während Mike (Alternativ-Hypothese) 90% für sich reklamiert. Wenn er in mindestens 2 von 3 Fällen den Geburtstag korrekt vorhersagen kann, akzeptieren Sie, dass Mike Shewasser übernatürliche Fähigkeiten hat. Wie gross ist das α in diesem Test?

Aufgabe 7 [3 Punkte]

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine iid Folge aus $U[0, \theta]$. Zeigen Sie mit Hilfe von Resultaten aus Vorlesung oder Übungen, dass

$$\frac{n+1}{n} \max\{X_i | 1 \leq i \leq n\}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.