Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 08; 3. Februar 2009

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

<u>Aufgabe 1</u> [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) X sei $\mathcal{N}(-4, 81)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [-5, 9]]$.

b) X habe eine t_6-Verteilung. Wie gross ist $P[|X| \geq 1.44]$?

c) Gilt die Formel $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ bei Unabhängigkeit von X und Y?

d) Gilt die Formel $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ bei Unkorreliertkeit von X und Y?

e) Konstruieren Sie eine konkrete Situation, in der $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **nicht** gilt.

WT

<u>Aufgabe 2</u> [3 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(2, 4)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P[-1.5 \leq X^2 \leq 5], P[-1.5 < X^2 \leq 5], P[-1.5 \leq X^2 < 5], P[-1.5 < X^2 < 5].$$

Vorsicht: welche Werte kann X annehmen, welche X^2?

<u>Aufgabe 3</u> [1+1+1+1+1 Punkte]

Die Zufallsgrösse X habe eine Dichtefunktion der Form $f(x) = Kx^9$ auf dem Intervall $(0, 2)$ mit K einer Normierungskonstanten und sei sonst gleich 0.

Berechnen Sie

a) K

b) $E[X]$

c) $V[X]$

d) $E[X^{-2}]$

e) Spielt es in Teilaufgaben a)-d) eine Rolle, ob X Werte auf dem offenen oder abgeschlossenen Intervall von 0 bis 2 annimmt?

Aufgabe 4 [2 Punkte]

$X_1, \ldots, X_{100}$ seien iid t_5-verteilte Zufallsgrössen. Benutzen Sie den CLT, um abzuschätzen, wie gross

$$P[\sum_{i=1}^{100} X_i > 5]$$

ist. Sie dürfen dazu unbewiesene Resultate aus dem Skript benutzen.

Statistik

Aufgabe 5 [1+2+3 Punkte]

Wegen der Prüfungssituation ist folgende Aufgabe mit unrealistisch wenigen Datenpunkten gestellt. Frau Magister Genmaier will eine neue Pflanzenart züchten. Dabei versucht sie, das Wachstum innert der ersten 10 Wochen zu steigern. Mit den bisherigen Sorten waren die Pflanzen jeweils im Durchschnitt nach 10 Wochen 1 Meter lang. Frau Magister Genmaier hat jetzt 3 Planzenexemplare, welche nach 10 Wochen die folgenden Längen aufweisen: 95.7 cm, 105.3 cm, 99.7 cm. Sie modelliert das Wachstum mit Hilfe einer Normalverteilung.

a) Berechnen Sie ein 95 % - Konfidenzintervall für die durchschnittliche Länge, wenn Sie davon ausgehen dürfen, dass die Standardabweichung bekannt ist und zwar gleich $\sigma = 4.2$ cm.

b) Berechnen Sie ein 90 % - Konfidenzintervall für die durchschnittliche Länge, wenn σ unbekannt ist und aus den Daten geschätzt werden muss.

c) Testen Sie bei unbekanntem σ auf dem 5 % - Niveau die beiden Hypothesen für den Mittelwert: $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 100$ gegen $\mathcal{H}_1 : \mu > 100$. Wie sieht der Test aus? Wie wird mit obigen Daten entschieden?

Aufgabe 6 [3 Punkte]

Testen Sie mit Hilfe des NP-Lemmas die beiden Hypothesen auf dem 5 %-Niveau: unter $\mathcal{H}_0$ habe X eine Dichtefunktion der Art $f_0(x) = K_1 x^5$ auf dem Intervall $[0, 3]$ und sei 0 sonst. Unter $\mathcal{H}_1$ habe X eine Dichtefunktion der Art $f_1(x) = K_2 x^7$ auf dem Intervall $[0, 3]$ und sei 0 sonst. Für diese Prüfungssituation sei $n = 1$. Wie sieht der Test aus? Wir wollen die Herleitung nach NP sauber sehen, auch wenn das Resultat offensichtlich ist.

Aufgabe 7 [4 Punkte]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $U[0, \theta]$-verteilt. Ist

$$\hat{\theta} := \min\{X_1, \ldots, X_n\} + \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ - mit Rechnung bitte?