Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 09; 2. Februar 2010

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) X sei $\mathcal{N}(8, 16)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [4, 9]]$.

b) X habe entweder eine Normalverteilung $\mathcal{N}(3, 4)$ oder eine Bin(4, 0.5)-Verteilung. Sie erhalten dann einen Datenpunkt x_1. Wenn Sie (egal zu welchem α) die beiden Hypothesen gegeneinander testen müssen, wie sieht der beste Test aus?

c) X sei $\mathcal{N}(3, 4)$ und Y sei Ge(0.5). Berechnen Sie $E[X + 2Y]$.

d) Spielt es in c) eine Rolle, ob X und Y unabhängig voneinander sind?

e) X sei $\mathcal{N}(3, 4)$ und Y sei Ge(0.5). X sei unabhängig von Y. Berechnen Sie $V[3X + 2Y]$.

WT

Aufgabe 2 [2+1 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(3, 9)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P[|X|^{-2} \leq 4], P[\log |X| < 0.8].$$

(Ignorieren Sie die Fälle, wo $X = 0$ ist. Dies kommt vor mit Wahrscheinlichkeit 0. Man kann Ω verkleinern, damit es keine Probleme gibt - Sie müssen das in dieser Prüfung nicht machen.)

Aufgabe 3 [1+1+1+1+1 Punkte]

X nehme nur Werte auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ an. Mit $p_i := P[X = i]$ gelte $p_0 = 0.3, p_1 = 0.2, p_2 = 0.2, p_3 = 0.2$

a) Berechnen Sie p_4.
b) Berechnen Sie $E[X]$.
c) Berechnen Sie $V[X]$.
d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und geben Sie diese komplett an; skizzieren Sie diese auch deutlich!
e) Berechnen Sie $P[X^3 \in [4, 20]]$.

Aufgabe 4 [1+2 Punkte]

Ein fairer Würfel wird 600 mal geworfen. X sei die Anzahl 1-er.

a) Benutzten Sie Ungleichung (5.1), um $P[|X - 100| \geq 10]$ abzuschätzen.

b) Benutzten Sie den CLT, um $P[|X - 100| \geq 10]$ approximativ zu berechnen.

Statistik

Aufgabe 5 [1+2+3 Punkte]

Wegen der Prüfungssituation ist folgende Aufgabe mit unrealistisch wenigen Datenpunkten gestellt. Professor Schnitzel mästet seine 4 Versuchskühe. Ziel ist es, möglichst schwere Kühe heranzuziehen. Er füttert sie während der ersten 20 Wochen mit 1000 Einheiten Futter pro Woche. Das Gewicht ist dann in kg 200, 197, 207, 203. Modellieren Sie das Gewicht der Kühe mit einer Normalverteilung.

a) Berechnen Sie ein 95 % - Konfidenzintervall für das durchschnittliche Gewicht, wenn Sie davon ausgehen dürfen, dass die Standardabweichung bekannt ist und zwar gleich $\sigma = 4$ kg.
b) Berechnen Sie ein 90 % - Konfidenzintervall für das durchschnittliche Gewicht, wenn σ unbekannt ist und aus den Daten geschätzt werden muss.
c) Testen Sie bei unbekanntem σ auf dem 5 % - Niveau die beiden Hypothesen für den Mittelwert: $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 202$ gegen $\mathcal{H}_1 : \mu > 202$. Wie sieht der Test aus? Wie wird mit obigen Daten entschieden?

Aufgabe 6 [1+2+1+1+1 Punkte]

Eine Zufallsgrösse X ist unter $\mathcal{H}_0$ verteilt mit Dichtefunktion $K_0 x^4$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Unter $\mathcal{H}_1$ ist die Verteilung derart, dass die Dichtefunktion von der Art $K_1 x^6$ auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

a) Berechnen Sie K_0 und K_1.
b) Wie sieht der NP-Test mit $n = 1$ und $\alpha = 0.05$ aus?
c) Berechnen Sie auch das β.
d) Wenn x_1 danach gleich 0.7 ist, werden Sie $\mathcal{H}_0$ annehmen oder ablehnen?
e) Wie gross ist bei einem $x_1 = 0.7$ der P-Wert?

Aufgabe 7 [2 Punkte]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $Ge(p)$-verteilt, wo $p \in (0, 1)$. Beweisen Sie:

$$\hat{\theta} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\theta := \frac{1}{p}$.