Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 10; 8. Februar 2011

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) X sei $\mathcal{N}(-10, 9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [-11, -8]]$ (Z-Transformierte muss da stehen).

b) Sei X eine Ge(0.5)-Zufallsgrösse und Y eine exp(2)-Zufallsgrösse. Wie ist $E[X + Y]$?

c) Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse. Wie ist (allgemein als Funktion von μ, σ^2) $E[X^2] + E[X]$?

d) Geben Sie ein Beispiel von $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$ an, sodass $P[X+Y = 0] = 1$ und gleichzeitig $P[X-Y = 2] = 1$.

e) Welche Verteilung hat $Z := X/Y$, falls X, Y je standardnormal und unabhängig voneinander?

f) Unter $\mathcal{H}_0$ sei X eine U[0,2]-Zufallsgrösse, unter $\mathcal{H}_1$ sei X eine U[0.2,0.8]-Zufallsgrösse. Herr Schubert testet nun derart, dass wenn in einer Einerstichprobe ($n = 1$) $x_1 \in [0.2, 0.8]$, dann nimmt er $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$. Geben Sie das α und das β an.

WT

Aufgabe 2 [1 Punkt pro Teilaufgabe]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 2], \mathcal{B}([0, 2]), P)$, so dass für $0 \leq a \leq b \leq 2$ gilt $P[[a, b]] := (b - a)/2$. Sei $X(\omega) = 1/\omega^2$. *Berechnen* (nicht wie in Aufgabe 1 einfach Resultat hinschreiben) Sie

a) $P[X \geq 1]$,

b) $P[X \in [2, \infty)]$.

Aufgabe 3 [1+1+1+1 Punkte]

X sei U[0, 2]-verteilt und $Y := e^X$.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y.
b) Berechnen Sie die Dichtefunktion von Y.
c) Berechnen Sie $P[Y \leq 1], P[Y \in [1, 2]]$.
d) Berechnen Sie $P[Y^2 \in [9, 16]]$.

Aufgabe 4 [2+1 Punkte]

$(X_i)_{i=1}^{1000}$ sei eine Folge von iid $\mathcal{N}(10, 9)$-verteilten Zufallsgrössen.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des CLT die Wahrscheinlichkeit, dass $P[\sum_{i=1}^{1000} X_i \in [9990, 10300]]$.

b) Abgesehen von der Genauigkeit der Tabelle, ist das Resultat in a) exakt oder nicht? Bitte mit Begündung.

Statistik

Aufgabe 5 [1+2+3 Punkte]

Wegen der Prüfungssituation ist folgende Aufgabe mit unrealistisch wenigen Datenpunkten gestellt. Direktor Bolzen stellt in seiner Firma Stahlbolzen einer vorgegebenen Länge her. Modellieren Sie die Länge der Stahlbolzen mit einer Normalverteilung. Sie wollen ein paar Sachen untersuchen und nehmen zufällig 4 Exemplare heraus. Die Länge in Zentimetern sei 43.05, 43.02, 42.97, 43.01.
a) Berechnen Sie ein 95 % - Konfidenzintervall für die durchschnittliche Länge, wenn σ unbekannt ist und aus den Daten geschätzt werden muss.
b) Testen Sie bei unbekanntem σ auf dem 5 % - Niveau die beiden Hypothesen für den Mittelwert: $\mathcal{H}_0 : \mu = 43$ cm gegen $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 43$ cm. Wie sieht der Test aus? Wie wird mit obigen Daten entschieden?
c) Sie wollen jetzt auch noch die Variabilität testen. Testen Sie auf dem 5 % - Nivau, ob $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 \leq 0.001 \ \text{cm}^2$ gegen $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 > 0.001 \ \text{cm}^2$.

Aufgabe 6 [1+2+1+1+1 Punkte]

Eine Zufallsgrösse X ist unter $\mathcal{H}_0$ verteilt mit Dichtefunktion $K_0\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0, 2]$. Unter $\mathcal{H}_1$ ist die Verteilung derart, dass die Dichtefunktion von der Art $K_1 x$ auf dem Intervall $[0, 2]$ ist. Ausserhalb von $[0, 2]$ ist die Dichtefunktion in beiden Fällen 0.

a) Berechnen Sie K_0 und K_1.
b) Wie sieht der NP-Test mit $n = 1$ und $\alpha = 0.05$ aus?
c) Berechnen Sie auch das β.
d) Wenn x_1 danach gleich 0.7 ist, werden Sie $\mathcal{H}_0$ annehmen oder ablehnen?
e) Wie gross ist bei einem $x_1 = 0.7$ der P-Wert?

Aufgabe 7 [2+1 Punkte]

X sei Ge(p)-verteilt. Unter $\mathcal{H}_0$ gelt $p = 0.01$ und mit $\mathcal{H}_1$ gelte $p = 0.02$. Herr Müller testet mit einer Einerstichprobe ($n = 1$) derart, dass wenn $X \leq 60$, dann lehnt er $\mathcal{H}_0$ ab, sonst nimmt er $\mathcal{H}_0$ an. Geben Sie das α und das β an (je ein Punkt - dazu können Sie eine Summe unausgerechnet stehen lassen); wenn Sie die Summen noch explizit berechnen, gibt es noch einen Punkt total.