Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 12; 5. Februar 2013; 15 Punkte $= 4$

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) X sei $\mathcal{N}(5,9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [4,7]]$ (Z-Transformierte muss dastehen).

b) Sei X eine $\mathcal{N}(4,16)$-Zufallsgrösse. Geben Sie $E[X^2] + E[X]^2$ an.

c) Die Teststatistik X habe eine t_n-Verteilung. Dummerweise haben Sie jetzt aber das n vergessen. Der Wert von X sei im konkreten Fall 77.4. Sie wollen auf dem 5 %-Niveau einen Test machen. Werden Sie die Nullhypothese beibehalten oder ablehnen?

d) Die tatsächlich gemessenen 5 Werte eines Versuchs seien 3, 4, 5, 5.5, 6.3 mit arithmetischem Mittel der Stichprobe von 4.76. Danach werden die Zahlen in den Computer eingegeben und dabei wird genau eine dieser 5 Zahlen falsch eingegeben. Geben Sie an, wie sich das arithmetische Mittel der Stichprobe im schlimmsten Fall vom wahren Mittelwert der Stichprobe 4.76 entfernen kann.

e) Die tatsächlich gemessenen 5 Werte eines Versuchs seien 3, 4, 5, 5.5, 6.3. Danach werden die Zahlen in den Computer eingegeben und dabei wird genau eine dieser 5 Zahlen falsch eingegeben. Geben Sie an, wie sich der Median im schlimmsten Fall vom wahren Median der Stichprobe entfernen kann.

f) Welcher Anteil Atome ist nach einer Halbwertszeit zerfallen?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein einzelnes Isotop nach einer Halbwertszeit bereits zerfallen?

h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein einzelnes Isotop nach einer halben Halbwertszeit bereits zerfallen?

WT

Aufgabe 2 [1+1 Punkte]

Sei X eine χ_1^2-Zufallsgrösse.

a) Berechnen Sie $P[X \in [-1,3]]$.

b) Berechnen Sie $P[\ln(X) > 2]$.

Aufgabe 3 [1 Punkt pro Teilaufgabe]

X habe Dichte $K|x|$ auf dem Intervall $[-1,2]$ und sei 0 sonst.

a) Berechnen Sie das K.
b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.
c) Berechnen Sie $P[X \leq 1.5]$.
d) Berechnen Sie $E[X]$.
e) Berechnen Sie den Median von X.
f) Geben Sie die Dichte von $-X$ an.

Aufgabe 4 [1+1+2 Punkte]

Sie würfeln mit 2 perfekten Würfeln und addieren die Augenzahl (wie beim Monopoly). Angenommen, Sie würfeln total 200 mal mit den beiden Würfeln (also 400 Mal). Wie gross ist der Erwartungswert der gesamten Augenzahlen? Wie gross ist deren Varianz? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gesamte Augenzahl im Intervall $[1380, 1420]$ liegt (benutzen Sie hierzu den CLT)?

Statistik

Aufgabe 5 [2+1 Punkte]

Apfelproduzent Goldie behauptet, der Durchmesser von Äpfeln der Sorte "Gutto" sei im Durchschnitt mindestens 10 cm.

a) Sie haben jetzt 4 Äpfel herausgenommen; die Durchmesser sind 8.8, 9.7, 10.1, 10.3 cm. Testen Sie einseitig auf dem 5 %-Niveau, ob der Durchschnitt der Gesamtmenge mindestens 10 ist oder nicht.

b) Anhand einer anderen Stichprobe von $n = 12$ berechnet der Apfelproduzent ein arithmetisches Mittel von $\overline{x} = 8$ cm; die Standardabweichung wurde mit

$$\sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})^2} = 2.2$$

berechnet. Geben Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für den Durchmesser an.

Aufgabe 6 [2+2 Punkte]

Eine Münze wird 4 mal geworfen. Es wird behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" gleich $p = 0.4$ ist. Wir wollen dies jetzt testen. Dazu nehmen wir folgende Hypothesen: $\mathcal{H}_0 : p = 0.4$ gegen $\mathcal{H}_1 : p > 0.4$ (kleiner werde ausgeschlossen). Der Test sehe folgendermassen aus: Wenn mindestens 3 mal Kopf kommt, wird die Nullhypothese verworfen; sonst wird die Nullhypothese angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (das α; nehmen Sie dazu $p = 0.4$).

b) Sie haben den Test jetzt durchgeführt und es gab genau zweimal Kopf. Berechnen Sie den P-Wert dieses Ereignisses.

Aufgabe 7 [3 Punkte]

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine iid Folge aus $U[\theta, 10]$. Zeigen Sie mit Hilfe von Resultaten aus Vorlesung oder Übungen, dass

$$10 - \frac{n+1}{n}\big(10 - \min\{X_i | 1 \leq i \leq n\}\big)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.