Prüfungsfragen zur Vlsg WTS HS 14; 3. Februar 2015

Ein-Minuten-Aufgaben ohne Beweis; Antwort darf falls sinnvoll kurz "Ja" oder "Nein" sein

Aufgabe 1 [je 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) X sei $\mathcal{N}(-2, 25)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [-4, 1]]$ (Z-Transformierte muss dastehen).

b) Z sei die Zufallsgrösse, welche die Anzahl Augen beim Wurf von 2 fairen, unabhängigen Würfeln angibt. Geben Sie präzise einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dazu an (mehrere mögliche Lösungen).

c) Geben sie 2 Mengen A und B sowie Wahrscheinlichkeiten an, bei denen $P[A|B] \neq P[B|A]$.

d) X sei $U[0, 1]$-verteilt. Wie ist die Dichte von $(X - 3)/2$?

e) X sei eine nicht-negative, stetige Zufallsgrösse. Die Dichte sei $K|\sin(x)|e^{-x}, x \geq 0$ mit einer Normierungskonstanten K. Ist der Erwartungswert endlich?

f) Ein/e Modellierer/in stellt in einem komplexen System fest, dass die Wartezeit zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen auf den natürlichen Zahlen gedächtnislos ist. Welche Verteilung sollte er zur Modellierung der Wartezeit wählen?

WT

Aufgabe 2 [2 Punkte]

Sei X eine exp(2)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie

$$P[e^{X^2} \geq 3]$$

Aufgabe 3 [1 Punkt pro Teilaufgabe]

X sei die Anzahl Augen beim Wurf eines fairen Würfels.

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X^2 an und machen Sie dazu eine Skizze.
b) Berechnen Sie $E[X^2]$.
c) Berechnen Sie $V[X]$.
d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $-X^2 + 5$ an.
e) Berechnen Sie $E[-X^2 + 5]$.

Aufgabe 4 [3 Punkte]

Berechnen Sie mit Hilfe des CLT: Wie oft müssen wir eine faire Münze werfen, damit mit Wahrscheinlichkeit 0.95 die relative Häufigkeit der Würfe mit Kopf zwischen 0.48 und 0.52 liegt?

Statistik

Aufgabe 5 [2+2 Punkte]

a) Sei $Y_1, \ldots, Y_n$ eine Stichprobe aus $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \sigma^2 > 0$. Wir möchten das Testproblem $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 1$ gegen $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 \neq 1$ untersuchen. Konstruieren Sie einen Test der Grösse 0.01, wenn $n = 30$.

b) Angenommen, Sie wissen nun in Aufgabe a), dass $\mu = 0$. Wie können Sie den Test dahingehend verbessern, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art kleiner wird? [Sie müssen nur die Änderungen gegenüber der Lösung von a) angeben und nicht beweisen, dass es besser ist.]

Aufgabe 6 [3 Punkte]

Sei x eine Beobachtung aus einer Zufallsgrösse mit Dichte $f(x)$, von der bekannt ist, dass sie nur auf $[0,1]$ positiv ist. Testen Sie das einfache Testproblem $\mathcal{H}_0 : f(x) = 1_{[0,1]}(x)$ gegen $\mathcal{H}_1 : f(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$ mit einem Neyman-Pearson-Test der Grösse $\alpha = 0.03$ und bestimmen Sie die Macht dieses Tests. Wir wollen die Herleitung der Teststatistik explizit sehen.

Aufgabe 7 [2+2 Punkte]

Sie produzieren Stahlbolzen, welche möglichst 3 cm lang sein sollten. Sie haben jetzt 4 Stahlbolzen herausgenommen; die Längen sind 3.00, 2.98, 3.03, 2.97 cm.

a) Testen Sie zweiseitig auf dem 10 %-Niveau, ob der Durchschnitt der Gesamtmenge 3 cm lang ist oder nicht.

b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für die durchschnittliche Länge der Stahlbolzen.