18. EINIGE WICHTIGE FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNGEN

(18.1) Überblick

In diesem Kapitel werden einige wichtige Funktionen behandelt. Die meisten unter ihnen sind nicht neu und sind schon früher vorgekommen. Hier soll nun vor allem der Aspekt ihrer Anwendbarkeit in den Naturwissenschaften betont werden:

- *Trigonometrische Funktionen* werden zur Darstellung von periodischen Vorgängen gebraucht. *(18.3)*
- Die *Exponentialfunktion* und verschiedene daraus hergeleitete Funktionen haben oft mit Wachstumsvorgängen zu tun. *(18.4)* *(18.7)*
- Von diesen Abwandlungen der Exponentialfunktion werden die *hyperbolischen Funktionen* und ihre Umkehrfunktionen, die *Areafunktionen*, noch etwas näher besprochen. *(18.6)* *(18.7)*
- Oft tritt eine Funktion $f(x)$ in gewissen *Modifikationen* auf, wie etwa $f(x-a)$, $f(x)+b$, $f(cx)$, $sf(x)$. Diese Änderungen haben gut überblickbare Auswirkungen auf den Graphen der Funktion. *(18.2)*
- Eine andere Anwendung von Exponentialfunktion und Logarithmus sind die *logarithmischen Skalen*. Versieht man eine oder beide Koordinatenachsen mit dieser Skala, so wird der Graph einer Exponential- bzw. einer Potenzfunktion zu einer Geraden. *(18.11), (18.12)*

(18.2) Modifikation einer Funktion

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ und ihren Graphen, der durch die Beziehung $y = f(x)$ gegeben ist. Wir modifizieren nun diese Beziehung auf verschiedene Arten und sehen, was herauskommt.

a) <u>Verschiebung in x–Richtung</u>

Wir setzen $f_1(x) = f(x-a)$ für $a > 0$. Der Graph von f_1 ist gegenüber dem Graphen von f um die Strecke a nach rechts verschoben. Entsprechend liefert $f(x+a)$, $a > 0$ eine Verschiebung nach links.

b) Verschiebung in y–Richtung

Nun sei $f_2(x) = f(x) + b$ für $b > 0$. Hier wird der Graph von f um b nach oben verschoben. Analog ergibt $f(x) - b,\ b > 0$, eine Verschiebung nach unten.

c) Spiegelung an der y–Achse

Der Graph der Funktion $f_3(x) = f(-x)$ wird durch Spiegelung von f an der y–Achse erhalten.

d) Streckung/Stauchung in x–Richtung

Es sei $c > 0$. Wir untersuchen $f_4(x) = f(cx)$. Der Wert von f_4 an der Stelle x ist gleich jenem von f an der Stelle cx. Deshalb entspricht der Übergang von f zu f_4 einer Streckung in x–Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{c}$. (Für $c > 1$, also $\frac{1}{c} < 1$ handelt es sich anschaulich um eine "Stauchung".)

Ist $c < 0$, so kommt gemäss c) zur Streckung um $\frac{1}{|c|}$ eine Spiegelung an der y–Achse hinzu.

e) Spiegelung an der x–Achse

Dieser Übergang wird durch $f_5(x) = -f(x)$ geleistet.

f) Streckung/Stauchung in y–Richtung

Es sei $s > 0$. Wir untersuchen $f_6(x) = sf(x)$. Der Wert von f_6 an der Stelle x ist das s–fache des Werts von $f(x)$. Der Übergang von f zu f_6 besteht in einer Streckung $(s > 1)$ (oder Stauchung $(s < 1)$) in y–Richtung.

Für $s < 0$ kommt gemäss e) eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.

Diese verschiedenen Modifikationen können natürlich auch kombiniert werden; im Extremfall zu

$$g(x) = sf\big(c(x-a)\big) + b\ .$$

In (18.3) wird dieses Thema aufgenommen.

(18.3) Periodische Funktionen

Wir betrachten hier die trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus etc.) unter einem neuen Gesichtspunkt (siehe (26.15) für die wichtigsten Grundbegriffe). Ihr erster Kontakt mit diesen Funktionen fand wohl in der Geometrie (Trigonometrie) statt, doch gibt es auch noch ganz anders geartete Anwendungen. In den Naturwissenschaften ist nämlich vor allem wichtig, dass die trigonometrischen Funktionen *periodisch* sind, denn es gilt bekanntlich für alle $x \in \mathbb{R}$ (wir verwenden wie üblich das Bogenmass)

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \; .$$

Ganz allgemein nennt man eine Funktion f *periodisch*, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x + p) = f(x)$ für alle x.

Für die Sinusfunktion kann man $p = 2\pi$ wählen, es wäre aber auch $p = 4\pi, 6\pi$ usw. möglich. Die kleinste positive Zahl p mit der erwähnten Eigenschaft heisst die *Periode* von f (im Fall der Sinusfunktion also $p = 2\pi$).

Periodische Vorgänge sind ja in der Natur sehr häufig (man denke an Schwingungsvorgänge, Biorhythmen oder dergleichen). Somit treten periodische Funktionen in ganz natürlicher Weise auf. Als konkretes Beispiel erwähnen wir das Elektrokardiogramm, das man (mit einer gewissen Idealisierung) als Darstellung einer periodischen Funktion betrachten kann:

Zunächst scheint diese Kurve überhaupt nichts mit trigonometrischen Funktionen zu tun zu haben. Es gibt aber einen wichtigen mathematischen Satz, der besagt, dass jede einigermassen "vernünftige" periodische Funktion f als eine sogenannte *Fourierreihe*, nämlich als unendliche Reihe der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dargestellt werden kann. (Die durch die obige EKG-Kurve gegebene Funktion wäre z.B. bereits "vernünftig" genug!) In dieser Formel wird vorausgesetzt, dass f die Periode 2π hat, was durch eine Massstabsänderung leicht erreicht werden kann (siehe unten).

Wir können hier nicht näher auf diese Fourierreihen eingehen. Wir erwähnten sie, um zu zeigen, dass die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen weit über die Dreiecksberechnung hinausgeht, bilden sie doch gemäss den obigen Bemerkungen sozusagen Bausteine der periodischen Funktionen.

Wir haben oben gesehen, dass Sinus und Cosinus die Periode 2π haben. Wir zeigen nun, wie man die Funktionen so modifizieren kann, dass sie eine beliebige Periode p haben. Es genügt, den Sinus zu betrachten, für den Cosinus geht alles analog. Im übrigen gilt ja $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung!).

Wir behaupten: Die Funktion $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{p}x)$ hat die Periode p. In der Tat ist nämlich

$$f(x+p) = \sin\Big(\frac{2\pi}{p}(x+p)\Big) = \sin\Big(\frac{2\pi}{p}x + 2\pi\Big) = \sin\Big(\frac{2\pi}{p}x\Big) = f(x) \ ,$$

denn der Sinus hat die Periode 2π.

Zum Beispiel hat die Funktion $\sin(\pi x)$ die Periode 2, die Funktion $\sin(\frac{1}{2}\pi x)$ die Periode 4 usw.

$y = \sin x$

$y = \sin \frac{\pi}{2} x$

$y = \sin \pi x$

Wir haben hier eine Anwendung von Punkt d) von (18.2) vor uns.

Die eben diskutierte Funktion $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{p}x)$ hat also die Periode p. Ferner hat sie eine Nullstelle in $x = 0$ und ist dort wachsend, denn $f'(0) > 0$. Eine Funktion g mit der Periode p, die an einer beliebigen Stelle x_0 eine Nullstelle hat und dort wachsend ist, erhält man, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt (geometrisch: Verschiebung des Graphen parallel zur x–Achse, vgl. Punkt a) von (18.2)). Die Formel lautet dann

$$g(x) = \sin\Big(\frac{2\pi}{p}(x - x_0)\Big) \ .$$

Die Maxima bzw. Minima dieser Funktion liegen bei 1 bzw. bei -1. Man sagt, sie habe die *Amplitude* 1. Wünscht man nun eine periodische Funktion h (mit Periode p und einer Nullstelle in x_0) mit einer beliebigen Amplitude $A > 0$, so muss man $g(x)$ mit A multiplizieren (Punkt f) von (18.2)). Man erhält

$$h(x) = A \sin\Big(\frac{2\pi}{p}(x - x_0)\Big) \ .$$

<u>Beispiel</u>

Gesucht ist eine periodische Funktion h mit folgenden Eigenschaften:

- Periode 24 (Stunden),
- eine Nullstelle (mit wachsender Funktion) für $x = 5$,
- Amplitude 3.

Lösung: $h(x) = 3\sin(\frac{\pi}{12}(x-5))$.

Wie gross ist der Funktionswert um Mitternacht?

Lösung: $h(0) = h(24) = 3\sin(-\frac{5\pi}{12}) \approx -2.9$. (Bogenmass verwenden!) ⊠

(18.4) Die Exponentialfunktion

Für die Grundeigenschaften der Exponentialfunktion verweisen wir auf (26.13), wo auch die Definition der Zahl $e = 2.718281828\ldots$ angegeben ist. Wenn man von *der Exponentialfunktion* (mit dem bestimmten Artikel und ohne weitere Zusätze) spricht, so ist immer die Exponentialfunktion mit der Basis e, also die Funktion

$$x \mapsto e^x$$

gemeint. Um Exponenten zu vermeiden, schreibt man auch $\exp x$ oder $\exp(x)$ anstelle von e^x. Für die Anwendungen in den Naturwissenschaften ist die wohl wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion die, dass sie gleich ihrer Ableitung ist*. Es gilt ja

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \ .$$

Anders ausgedrückt: Die Exponentialfunktion $y = e^x$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y \ .$$

Da $y' = f'(x)$ das Wachstumsverhalten der Funktion $y = f(x)$ beschreibt, wird die Exponentialfunktion überall dort eine Rolle spielen, wo die Wachstumsgeschwindigkeit

* Für die Exponentialfunktion zur Basis $a \neq e$ gilt diese einfache Formel nicht mehr; vielmehr ist $\frac{da^x}{dx} = \ln a \cdot a^x$.

proportional zum jeweiligen Funktionswert ist. Beispiele hiezu haben wir in (15.3.a) und (15.3.b) kennengelernt.

Wenn man es mit der Exponentialfunktion zu tun hat, so benötigt man auch immer die dazu inverse Funktion, den natürlichen Logarithmus. Hier gilt (vgl. Beispiel b) in (17.3) oder (26.14.c)):

$$\begin{aligned} y = e^x &\Longleftrightarrow x = \ln y \ , \\ \ln(e^x) &= x \ , \\ e^{\ln y} &= y \ . \end{aligned}$$

Diese Beziehungen braucht man z.B., um Exponenten "herunterzuholen" (vgl. etwa Beispiel 1. in (16.10)).

Als eine andere Anwendung des Logarithmus sei festgehalten, dass die *allgemeine Exponentialfunktion*

$$f(x) = Ca^x, \quad (a > 0)$$

stets auch mit der Basis e geschrieben werden kann. Wegen $a = e^{\ln a}$ ist

$$f(x) = Ca^x = Ce^{x \cdot \ln a} \ .$$

Der *Graph* von $e^{\lambda x}$ hat für $\lambda > 0$ die untenstehende Form (vgl. auch (26.13.e)), wobei er um so steiler ist, je grösser λ ist. Diese Skizze schliesst wegen $\ln a > 0$ für $a > 1$ auch den Fall $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ für $a > 1$ ein. Der Graph von $e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$ wird gemäss Punkt c) von (18.2) durch Spiegelung des ersten Graphen an der y–Achse erhalten. Er schliesst den Fall a^x für $0 < a < 1$ ein, denn hier ist $\ln a < 0$.

(18.5) Radioaktiver Zerfall

In diesem Abschnitt wird anhand des radioaktiven Zerfalls das Auftreten der Exponentialfunktion bei Zerfallsvorgängen beschrieben, vgl. auch (15.3.a). Entsprechendes gilt für exponentielles Wachstum (15.3.b).

Wir untersuchen eine radioaktive Substanz. In (15.3.a) sind wir von der Modellvorstellung ausgegangen, dass in einem bestimmten Zeitraum jedes Atom dieselbe

Wahrscheinlichkeit hat, zu zerfallen. In einem kleinen Zeitintervall ist dann die Anzahl der Zerfälle proportional zur Anzahl der vorhandenen Atome. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0$$

für die Anzahl $N(t)$ der Atome, welche, wie man direkt nachrechnet (vgl. aber auch (15.3.a)), die folgende Lösung hat:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} .$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass es sich bei der besprochenen Funktion $N(t)$ um eine Idealisierung handelt. Man beschreibt die Anzahl $N(t)$ der Atome durch die Funktion $N_0 e^{-\lambda t}$, welche auch nicht-ganzzahlige Werte annimmt, wogegen die Anzahl der Atome natürlich stets ganzzahlig ist. Wegen der grossen Zahl der Atome ist diese Annäherung an die Wirklichkeit aber ohne weiteres erlaubt. Zudem muss man $N(t)$ als differenzierbar voraussetzen, wenn man die Methoden der Differentialgleichung einsetzen will (siehe auch den Schluss von (15.3.a)).

Nun betrachten wir die Funktion $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ noch etwas genauer. Dabei ist N_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atome, denn $N(0) = N_0 e^0 = N_0$. Da $\lambda > 0$ ist, ist nach dem am Schluss von (18.4) gesagten $e^{-\lambda t}$ eine fallende Funktion, wie es auch sein muss, da die Anzahl der Atome im Verlauf der Zeit abnimmt.

Was bedeutet nun λ konkret? Um dies zu ergründen, betrachten wir die *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ des untersuchten Isotops. Dies ist bekanntlich die Länge jenes Zeitintervalls, in dem die Hälfte der vorhandenen Atome zerfällt. Wir werden sehen, dass diese Halbwertszeit weder von der Anzahl Atome noch von der gewählten Anfangszeit abhängt. Natürlich hängt sie aber von der betrachteten Substanz ab. Der Zusammenhang zwischen der sogenannten *Zerfallskonstanten* λ und der Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist durch die Formeln

$$(1) \qquad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

gegeben.

Dies sieht man folgendermassen ein: Wir betrachten einen beliebigen Zeitpunkt t_1. Zur Zeit t_1 ist die Anzahl der vorhandenen Atome

$$N_1 = N(t_1) = N_0 e^{-\lambda t_1} .$$

Wenn nun $T_{1/2}$ die Halbwertszeit ist, so sind zur Zeit $t_2 = t_1 + T_{1/2}$ nur noch halb so viele Atome da. Mit

$$N_2 = N(t_2) = N_0 e^{-\lambda t_2}$$

ist dann

$$N_2 = \frac{1}{2} N_1 .$$

Nun ist aber

$$N_2 = N_0 e^{-\lambda t_2} = N_0 e^{-\lambda(t_1 + T_{1/2})} = N_0 e^{-\lambda t_1} \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = N_1 e^{-\lambda T_{1/2}} .$$

Wegen $N_2 = \frac{1}{2}N_1$ folgt $N_1 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}N_1$ oder $e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$.

Logarithmieren ergibt

$$-\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

und weiter (unter Benutzung der Regel $\ln x^{-1} = -\ln x$)

$$T_{1/2} = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.69315\ldots}{\lambda} \ .$$

Dies ist die gesuchte Beziehung. Natürlich hängen λ und $T_{1/2}$ vom untersuchten Isotop ab. Dagegen hängt, wie schon oben erwähnt, $T_{1/2}$ weder von N_0 noch von t_1 ab.

Zum Schluss noch eine praktische Anwendung der ganzen Geschichte: Bei der archäologischen *Altersbestimmung* vergleicht man die ^{14}C-Konzentration von lebenden Wesen mit jener der Funde und berechnet nach der "Zerfallsgleichung" (d.h. der Gleichung für $N(t)$) das Alter des Fundes.

Beispiel

Bei Ausschachtungsarbeiten wurden Speisereste gefunden, deren ^{14}C-Radioaktivität 90% der Aktivität von lebenden Pflanzen betrug, d.h. es war

$$\frac{N(t)}{N(0)} = 0.9 \ ,$$

wobei t das Alter der Speisereste (in Jahren) bedeutet. $N(0)$ stellt die Zahl der radioaktiven Teilchen am Anfang, $N(t)$ jene Zahl heute dar.

Die Halbwertszeit von ^{14}C ist bekannt, sie beträgt $T_{1/2} = 5730$ Jahre, wobei in der Literatur auch abweichende Angaben vorkommen. Gemäss Formel (1) ist

$$\lambda = \frac{0.693}{5730} = 0.000121 \ .$$

Nach der "Zerfallsgleichung" ist $N(0) = N_0, N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Es folgt

$$0.9 = e^{-\lambda t}$$

und diese Gleichung ist nach t aufzulösen. Logarithmieren liefert

$$\ln 0.9 = -\lambda t$$

$$-0.105 = -0.000121 \cdot t \ ,$$

woraus $t \approx 870$ Jahre folgt. Damit ist das Alter der Speisereste bestimmt. ⊠

Die Methode basiert auf der Annahme, dass das Verhältnis zwischen dem "normalen" Kohlenstoff ^{12}C und dem radioaktiven Isotop ^{14}C in der Atmosphäre zeitlich konstant bleibt (^{14}C zerfällt einerseits laufend, wird aber durch die kosmische Strahlung neu erzeugt). Lebewesen (Tiere und Pflanzen) nehmen also ^{12}C und ^{14}C in einem konstanten Verhältnis auf. Mit dem Tod endet diese Aufnahme, und das Verhältnis ändert sich, da ^{14}C zerfällt.

(18.6) Die hyperbolischen Funktionen

Verwandt mit der Exponentialfunktion sind die sogenannten *hyperbolischen Funktionen* (gelesen "Sinus hyperbolicus" usw.). Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0)\ .
\end{aligned}$$

Wir werden diese Funktionen kaum gebrauchen, erwähnen sie aber der Vollständigkeit halber (und weil sie auf manchen Taschenrechnern vorkommen). Ihre Graphen haben folgendes Aussehen:

Diese Funktionen erfüllen allerlei Beziehungen, die an trigonometrische Funktionen erinnern und die Bezeichnungen rechtfertigen. Die hyperbolischen Funktionen sind aber im Gegensatz zu den trigonometrischen nicht periodisch. Wir erwähnen folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle} \quad x\ , \\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad \text{für alle} \quad x, y\ , \\
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \text{für alle} \quad x, y\ .
\end{aligned}$$

Diese werden durch Nachrechnen leicht bestätigt.

Setzt man $x = \cosh t,\ y = \sinh t$, so folgt aus der erstgenannten Formel nach einer Umbezeichnung:

$$x^2 - y^2 = 1\ ,$$

d.h., die Punkte (x, y) liegen auf einer Hyperbel. (Für die trigonometrischen Funktionen $x = \cos t$ und $y = \sin t$ ist entsprechend $x^2 + y^2 = 1$, d.h., die Punkte (x, y) liegen auf einem Kreis!) Dies möge zur Begründung der Bezeichnungen dienen.

Der Graph von $\cosh x$ heisst manchmal auch *Kettenlinie*, denn man kann zeigen, dass eine beidseitig aufgehängte Kette unter ihrem Eigengewicht im wesentlichen (d.h. bis auf Konstanten) die Form dieses Graphen annimmt.

(18.7) Die Areafunktionen

Schliesslich seien noch die sogenannten *Areafunktionen* kurz erwähnt. Es handelt sich dabei um die zu den hyperbolischen Funktionen inversen Funktionen, vgl. dazu (17.3).

Wie man den Graphen entnimmt, sind die Funktionen sinh, tanh und coth injektiv, cosh ist a priori nicht injektiv, wird aber durch Einschränkung des Definitionsbereichs injektiv gemacht: Man wählt $[0, \infty]$ als neuen Definitionsbereich. Nun lassen sich die Umkehrfunktionen bilden.

Im einzelnen lauten die Definitionen (arsinh z.B. wird gelesen “area sinus hyperbolicus”):

$$\begin{array}{lcl} y = \sinh x \ \ (x \in \mathbb{R}) & \Longleftrightarrow & x = \operatorname{arsinh} y \ \ (y \in \mathbb{R}) \ , \\ y = \cosh x \ \ (x \geq 0) & \Longleftrightarrow & x = \operatorname{arcosh} y \ \ (y \geq 1) \ , \\ y = \tanh x \ \ (x \in \mathbb{R}) & \Longleftrightarrow & x = \operatorname{artanh} y \ \ (|y| < 1) \ , \\ y = \coth x \ \ (x \neq 0) & \Longleftrightarrow & x = \operatorname{arcoth} y \ \ (|y| > 1) \ . \end{array}$$

Die Graphen erhält man wie üblich durch Spiegeln.

Es sei noch erwähnt, dass man die Areafunktionen auf den Logarithmus zurückführen kann. Es gilt nämlich:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \ , & \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \ (y > 1) \ , \\ \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \ \ (|y| < 1) \ , & \operatorname{arcoth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1} \ \ (|y| > 1) \ . \end{array}$$

Wir beweisen die Formel für arsinh (die andern Fälle gehen analog):

Wir müssen die Gleichung $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ nach x auflösen. Mit der Abkürzung $e^x = z$ (und $e^{-x} = 1/z$) erhält man

$$y = \frac{1}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \quad 2yz = z^2 - 1, \quad z^2 - 2yz - 1 = 0 \ .$$

Löst man diese quadratische Gleichung bei gegebenem y nach z auf, so findet man

$$e^x = z = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \ .$$

Da aber $z = e^x$ stets positiv ist, kommt in diesem Augenblick nur das Pluszeichen in Frage. Durch Logarithmieren erhält man schliesslich den gesuchten Ausdruck für x:

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \ .$$

Für ganz Neugierige: Woher kommt der Wortteil “area”? Setzt man $x = \cosh t, y = \sinh t \ \ (t \in \mathbb{R})$, so liegen, wie schon erwähnt, die Punkte (x, y) auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ und zwar für $t > 0$ auf dem gezeichneten rechten Ast. Man kann dann ausrechnen, dass $t = \operatorname{arcosh} x = \operatorname{arsinh} y$ gleich dem Flächeninhalt (“area”) der schraffierten Figur ist.

(18.8) Die Ableitung der hyperbolischen und der Areafunktionen

Die Ableitung der hyperbolischen Funktionen ergibt sich unmittelbar aus der Definition und den Ableitungsregeln. So ist z.B.

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \ .$$

Für die Areafunktionen kann man entweder die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktionen (17.4) oder aber die Beziehungen von (18.7) verwenden. Wir verzichten auf weitere Details. Die Ableitungen dieser acht Funktionen sind in (5.3) bereits tabelliert worden.

(18.9) Weitere Funktionen im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion

Neben den hyperbolischen Funktionen verwendet man gelegentlich noch weitere Funktionen, die mit Hilfe der Exponentialfunktion gebildet werden. Im folgenden seien einige aufgeführt. (Beachten Sie die Schreibweise $\exp(x)$ für e^x.)

a) Die logistische Funktion

$$f(x) = \frac{a}{1 + Ce^{-bx}}$$

für geeignete Konstanten a, b, C (siehe (16.12)).

b) Die Dichtefunktion der Normalverteilung

Diese für die Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Funktion ist gegeben durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)^2\Big) \ .$$

Dabei ist μ eine beliebige, σ eine positive reelle Zahl. Eine Kurvendiskussion ergibt, dass der Graph von φ die folgende "Glockenform" hat:

Der Graph ist symmetrisch zur Geraden $x = \mu$, und seine Wendepunkte liegen an den Stellen $x = \mu \pm \sigma$.

c) Exponentielle Annäherung an Grenzwerte

Ein Blick auf den Graphen der Funktion $y = e^{-x}$ (18.4) zeigt, dass diese Funktion an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 annimmt und sich dann mit wachsendem x rasch der x–Achse nähert.

In manchen Fällen ist eine Funktion gesucht, die zur Zeit $t = 0$ (wir fassen hier die unabhängige Variable lieber als Zeit auf und schreiben t statt x) einen Anfangswert y_0 annimmt und im Verlauf der Zeit einem "Grenzwert" y_∞ zustrebt. Ein einfaches Beispiel einer solchen Funktion ist gegeben durch

$$y = y_\infty + (y_0 - y_\infty) \cdot e^{-ct}, \quad c > 0 \, .$$

In der Tat: Für $t = 0$ ist $e^{-ct} = 1$, und es folgt $y(0) = y_0$. Je grösser aber t wird, desto kleiner wird e^{-ct} und damit auch das Produkt $(y_0 - y_\infty) \cdot e^{-ct}$. Der Funktionswert y kommt dabei immer näher an y_∞ heran. Die Grösse c beschreibt im wesentlichen die Geschwindigkeit der Annäherung: Je grösser c ist, desto rascher nähert sich die Funktion dem Wert y_∞. Der Graph hat (für $y_0 < y_\infty$) folgende Gestalt:

Diese Funktion haben wir übrigens (mit anderen Bezeichnungen) in (16.8) als Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten angetroffen. ■

(18.10) Logarithmische Skalen

Eine weitere Anwendung von Exponentialfunktion und Logarithmus ist die logarithmische Skala, die zur Darstellung von gewissen Sachverhalten oft sehr zweckmässig ist. Wir besprechen zuerst den eindimensionalen Fall und anschliessend die sogenannten logarithmischen Papiere.

Aus praktischen Gründen verwenden wir im folgenden den Zehnerlogarithmus (Logarithmus zur Basis 10) $\operatorname{Log} x = \log_{10} x$.

Man erhält die *logarithmische Skala*, indem man auf einer linearen Skala den Punkt x neu mit $X = 10^x$ anschreibt:

Die Skala ist also gewissermassen eine graphische Darstellung der Wertetabelle (Funktionstafel von $X = 10^x$):

x	-1	0	0.69897	1	1.69897	2
$X = 10^x$	0.1	1	5	10	50	100

Wegen $X = 10^x$ ist natürlich $x = \operatorname{Log} X$.

Derartige Skalen sind z.B. dann praktisch, wenn die darzustellende Variable einen grossen Bereich umfasst. Allerdings werden dabei die Intervalle ungleich behandelt. So haben die Intervalle $[0.1, 1]$, $[1, 10]$, $[10, 100]$ etc. in dieser logarithmischen Skala alle dieselbe Länge, was aber mitunter ganz erwünscht sein kann, wie z.B. in der untenstehenden Darstellung des elektromagnetischen Spektrums. Ferner kann der Wert 0 nicht dargestellt werden, da $\operatorname{Log} 0$ nicht definiert ist.

Beispiel

Das elektromagnetische Spektrum, dargestellt auf einer logarithmischen Skala (Frequenz in Hertz):

Eine weitere Bedeutung haben die logarithmischen Skalen deshalb, weil man mit ihnen Koordinatensysteme bilden kann, in denen die Exponentialfunktionen bzw. die Potenzfunktionen durch Geraden dargestellt werden.

(18.11) Das halblogarithmische Koordinatensystem

Dieses Koordinatensystem wird erhalten, indem die Abszisse wie üblich mit einer linearen Skala, die Ordinate aber mit einer logarithmischen Skala versehen wird.

Beispiele (mit verschiedenen Massstäben):

Auf der linken Seite ist dabei der Punkt $P(1, 100)$ eingetragen. Beachten Sie, dass der Abstand zur x-Achse effektiv nicht $= 100$, sondern nur $= \operatorname{Log} 100 = 2$ ist!

Für die praktische Arbeit kann entsprechend liniertes sogenanntes halblogarithmisches Papier (ein Muster ist weiter unten abgebildet) in verschiedenen Massstäben käuflich erworben werden. Natürlich sind dann nur noch die Werte Y angeschrieben; die horizontale Achse beschriftet man selbst passend.

Das halblogarithmische Koordinatensystem hat die folgende wichtige Eigenschaft:

> Der Graph der Exponentialfunktion
>
> $$Y = f(x) = ca^x \qquad \text{mit } a > 0 \text{ und } c > 0$$
>
> ist in diesem Koordinatensystem eine Gerade.

Im Bild weiter unten ist rechts die Funktion $Y = 2^x$ dargestellt. Da ihr Graph hier eine Gerade ist, muss man nur zwei Punkte berechnen — hier $x = 0,\ Y = 1$ und $x = 2,\ Y = 4$ — und kann den Graphen auf einfachste Weise zeichnen.

Wir überlegen uns noch, warum wirklich eine Gerade herauskommt. Zu jedem x tragen wir nämlich auf der logarithmischen Skala $Y = ca^x$ ab. Die Vertikaldistanz zum Punkt Y ist aber nicht Y, sondern $y = \operatorname{Log} Y$. Es ist also

$$y = \operatorname{Log} Y = \operatorname{Log}(ca^x) = x \cdot \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} c, \qquad (a > 0,\ c > 0)\ .$$

Setzen wir noch $\operatorname{Log} a = A,\ \log c = C$, so erhalten wir im linearen x-y–System die Gleichung

$$y = Ax + C\ ,$$

welche tatsächlich eine Gerade darstellt.

Halblogarithmisches Papier

Graph von $Y = 2^x$

Halblogarithmisches Papier kann dann nützlich sein, wenn man vermutet, eine gewisse Beziehung werde durch eine Exponentialfunktion beschrieben.

Beispiel

Die Konzentration Y (in μg/10 ml) eines bestimmten Enzyms wird in Funktion der Zeit t (in Minuten) gemessen. Man vermutet, dass ungefähr folgende Beziehung gilt:

$$Y = aq^t$$

für noch zu bestimmende Konstanten a, q. Die Messwerte sind:

t	0	10	30	50	60	70	80
Y	95	54	21	7.5	4	2.4	1.6

Wir tragen nun die Daten auf halblogarithmischem Papier ab. Die Punkte liegen alle ungefähr auf einer Geraden, so dass man annehmen kann, die angegebene Beziehung sei approximativ richtig.

Wir bestimmen nun noch a und q. Für $t = 0$ ist $Y = 95$, es folgt $a = 95$. Der graphischen Darstellung entnimmt man weiter, dass für $t = 87$ der Wert von $Y = 1$ ist. Aus $1 = 95 \cdot q^{87}$ folgt

$$q = \sqrt[87]{\frac{1}{95}} \approx 0.95 \; .$$

(18.12) Das doppeltlogarithmische Koordinatensystem

Hier wird auf *beiden* Achsen eine logarithmische Skala verwendet, wie man anhand des weiter unten gezeigten Musters von “doppeltlogarithmischem Papier” sehen kann.

Das *doppeltlogarithmische* Koordinatensystem hat die folgende wichtige Eigenschaft:

Der Graph der Potenzfunktion

$$Y = aX^b \quad \text{mit} \quad X > 0, \; a > 0$$

ist in diesem Koordinatensystem eine Gerade.

Doppeltlogarithmisches Papier

Graph von $Y = 2X^2$

Beweis für diese Eigenschaft: Zu jedem X tragen wir über dem mit X angeschriebenen Punkt der Abszisse auf der logarithmischen Skala den Wert $Y = aX^b$ ab. Im linearen System ist aber $x = \operatorname{Log} X,\ y = \operatorname{Log} Y$. Wir logarithmieren deshalb die Gleichung und erhalten $\operatorname{Log} Y = \operatorname{Log}(aX^b) = \operatorname{Log} a + b \operatorname{Log} X$ oder eingesetzt $y = bx + \operatorname{Log} a$. Ersetzen wir noch $\operatorname{Log} a$ durch a', so haben wir in der Tat eine Geradengleichung gefunden: $y = bx + a'$.

Die Anwendungen entsprechen jenen von (18.12), wobei natürlich an Stelle der Exponentialfunktion jetzt eine Potenzfunktion steht.

Beispiel

Im untenstehenden doppeltlogarithmischen Achsenkreuz sind die Schweizerrekorde in den Laufdisziplinen (Männer, Stand 31.12.1991) eingetragen, und zwar findet man auf der horizontalen Achse die Distanz in Metern, auf der vertikalen Achse die Rekordzeit in Sekunden. Da die Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen, kann man annehmen, dass die Beziehung approximativ durch eine Potenzfunktion gegeben ist. (Das Beispiel wird in (23.7) fortgesetzt.)

Distanz in m	Rekordzeit	Rekordzeit in Sekunden
100	10.37	10.37
200	20.46	20.46
400	45.26	45.26
800	1:45.24	105.24
1'000	2:16.87	136.87
1'500	3:31.75	211.75
[Meile]	3:50.36	230.36
2'000	4:54.46	294.46
3'000	7:41.00	461.00
5'000	13:07.54	787.54
10'000	27:54.29	1674.29
20'000	59:55.8	3595.8
25'000	1:18:54.8	4734.8
30'000	1:35:40.8	5740.8

Beachten Sie, wie nützlich die logarithmische Einteilung der Skalen ist. Eine lineare Skala, die von 100 m bis 30'000 m reichen würde, müsste entweder sehr lang sein, oder dann wären die feineren Unterschiede, etwa im Bereich 100 m bis 400 m, nicht mehr gut trennbar.

(18.13) Zusammenfassung

Die wichtigen Eigenschaften der logarithmischen Skala sind:

- Auf halblogarithmischem Papier wird die Exponentialfunktion $Y = ca^x$ durch eine Gerade dargestellt.
- Auf doppeltlogarithmischem Papier wird die Potenzfunktion $Y = aX^b$ durch eine Gerade dargestellt.

Man kann diese Eigenschaft dazu verwenden, bei einem empirisch (durch Messwerte) gegebenen funktionellen Zusammenhang festzustellen, ob er möglicherweise durch eine Exponential- oder eine Potenzfunktion gegeben sei. Man braucht dazu bloss die Messwerte auf halb- und auf doppeltlogarithmisches Papier aufzutragen.

Beispiel

Es seien folgende Werte gegeben

x	1.5	2.5	4.0	5.0	6.5
y	1.8	2.6	4.6	6.8	12.0

Wie man sieht, liegen in der *halblogarithmischen* Darstellung die Punkte ziemlich genau auf einer Geraden: Der Zusammenhang wird durch eine Exponentialfunktion vermittelt.

Wir weisen noch darauf hin, dass es auch Papiere gibt, wo die Abszisse logarithmisch, die Ordinate aber linear geteilt ist. Eine Gerade in diesem Koordinatensystem hat die Gleichung

$$y = ax + b$$

(x bezieht sich wie immer auf die lineare Skala). Wegen $x = \operatorname{Log} X$ wird durch diese Gerade die Funktion

$$y = a \operatorname{Log} X + b \quad \text{oder} \quad y = \operatorname{Log}(BX^a) \quad (\text{mit } b = \operatorname{Log} B)$$

dargestellt.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass die Bezeichnungen “doppeltlogarithmisch” und “halblogarithmisch” zwar üblich, aber nicht ganz konsequent sind. Statt letzterem wäre wohl “einfachlogarithmisch” passender.

(18.∞) Aufgaben

18–1 Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in dasselbe Koordinatensystem ein:

a) $f_1(x) = x^3$, b) $f_2(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 - 1$, c) $f_3(x) = (x+1)^3 + 1$.

18–2 Skizzieren Sie die Graphen von

a) $y = \cos(\pi x)$, b) $y = \cos\pi(x - \dfrac{1}{2})$, c) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos\pi(x-1)$.

18–3 Die Auslenkung einer an beiden Enden befestigten Saite der Länge L ist an der Stelle x ($0 \leq x \leq L$) gegeben durch $A(x) = A_0 \sin\frac{n\pi}{L}x$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Zeichnen Sie dies für $n = 1, 2, 3$.

18–4 Die Theorie der Biorhythmen lehrt, dass das Gefühlsleben in wellenförmigen Hochs und Tiefs mit einer Periode von 28 Tagen verläuft. Wir denken uns eine Gefühlsskala mit Minimalwert 0 und Maximalwert 100. Ferner war Ihr persönlicher Wert am 1. Januar, 00.00 Uhr, gerade durchschnittlich (d.h. 50), aber immerhin mit aufsteigender Tendenz. Wie gross ist er am 28. Februar, 12.00 Uhr? Tip: Verwenden Sie eine passend modifizierte Sinusfunktion.

18–5 Uran-239 hat eine Halbwertszeit von 23.5 Minuten. Nach welcher Zeitspanne ist noch a) ein Viertel, b) ein Fünftel der ursprünglichen Substanzmenge vorhanden? c) Welcher Prozentsatz ist nach 60 Minuten noch vorhanden? (Tip für a): Erst denken, dann rechnen!)

18–6 Das “Gesetz von Bouguer-Lambert” besagt folgendes: Wenn Licht mit der Intensität I_0 senkrecht auf eine Wasseroberfläche trifft, dann beträgt die Intensität in x Metern Tiefe noch $I_0 \exp(-\mu x)$. Dabei ist μ eine positive Konstante, der “Absorptionskoeffizient”. Wir nehmen an, es sei $\mu = 1.4\ \mathrm{m}^{-1}$.
a) Wieviel Prozent der ursprünglichen Intensität hat das Licht in 2 m Tiefe? b) In welcher Tiefe beträgt die Intensität noch 10% der ursprünglichen?

18–7 a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c so, dass die Funktion $f(t) = a + be^{-ct}$ die folgenden Eigenschaften hat: $f(0) = 10$, $f(1) = 20$, $f(t) \to 30$ für $t \to \infty$. b) Wie gross ist $f(2)$?
c) Geben Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung an, die $f(t)$ als Lösung hat.

18–8 Ein Faden, der an zwei Punkten aufgehängt wird, nimmt unter seinem Eigengewicht die Form einer Kettenlinie an, d.h. des Graphen der Funktion $f(x) = a\cosh(\frac{x}{a})$, für ein passendes $a > 0$. Berechnen Sie die Kurvenlänge dieser Kettenlinie für $a = 1$ im Intervall $[-1, 1]$.

18–9 Zeichnen Sie in einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem die Graphen von a) $Y = 5\sqrt[4]{X}$, b) $Y = 10/X$ ein ($1 \leq X \leq 10$).

18–10 Zeichnen Sie in einem halblogarithmischen Koordinatensystem die Graphen von a) $Y = 2 \cdot 1.5^x$, b) $Y = 10 \cdot 0.8^x$ ein ($0 \leq x \leq 8$).

18–11 Das sogenannte allometrische Wachstum (vgl. Aufgabe 15–6) führt auf eine Potenzfunktion der Form $Y = aX^b$. Gegeben ist die folgende Tabelle:

X	0.5	1.5	5	8	10
Y	0.10	0.55	3.35	6.68	9.50

a) Zeichnen Sie diese Werte in ein geeignetes logarithmisches Papier ein. b) Wie gross (ungefähr) ist Y für $X = 1$? c) Für welches X (ungefähr) ist $Y = 15$?

18−12 Von einem Wachstumsvorgang weiss man, dass er zumindest annähernd exponentiell verläuft, d.h., dass $Y = ab^t$ gilt, wo $Y = Y(t)$ die Grösse der Population zur Zeit t bezeichnet. Messungen ergeben folgende Tabelle:

t	1	3	4	6	7
Y	4.5	10	15	34	52

a) Bestimmen Sie mit einer graphischen Methode die Grössen a und b.
b) Man möchte Y in der Form $Y = Ce^{\lambda t}$ schreiben. Bestimmen Sie C und λ.

18−13 Von einer Funktion f kennt man einige Werte:

x	1.5	3	5	7	9
$f(x)$	9	5.6	3.5	2.1	1.3

Zeichnen Sie diese Punkte sowohl in ein halb- als auch in ein doppeltlogarithmisches Koordinatensystem ein, und entscheiden Sie, ob es sich eher um eine Potenz- oder um eine Exponentialfunktion handelt.