# Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. C.J. Luchsinger

## 3 Unabhängigkeit

Wir repetieren zuerst unsere elementaren Vorstellungen von Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsgrössen aus der WTS:

∘ WTS: zuerst Unabh. von Ereignisse (WTS – Kap 1); dann erst Unabh. ZG (WTS – Kap 2).

Ereignisse

∘ $A$ unabh. $B$: $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ — 2 leicht mit, Bsp WTS

∘ $(A_i)_{i=1}^n$ unabh.: $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} P[A_i] \ \forall I \subset \{1, \ldots, n\}$.

Zufallsgrössen

∘ $(X_i)_{i=1}^n$ ⫫ : $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P\left[\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right] = \prod_{i=1}^n P[X_i \in B_i]$ I.

$\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

dann WTS-Kapitel 2.5:

$$F_{X_1, \ldots, X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t_i) \quad \text{II.}$$

& falls (absolut) stetig

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) \quad \text{III.}$$

I. ⟷ II. ⟷ III.

(stetig)

ohne Beweis! (in WTS)



geht immer um Faktorisierung & (auch hier): $(-\infty, t]$ statt beliebige Borel-Mengen

## 3.1 Unabhängigkeit von Zufallsgrössen

Entgegen dem Aufbau in WTS werden wir jetzt zuerst die Unabhängigkeit von *Zufallsgrössen* behandeln und definieren hierzu erstmal:

**Defintion 3.1 [Unabhängigkeit von Zufallsgrössen]** *Zufallsgrössen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, wenn*

$$P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in B_i]$$

*für alle Borelmengen $B_1, \ldots, B_n$. Eine unendliche Menge von Zufallsgrössen sei unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge hiervon unabhängig ist.* – warum beschränkt $I$? (Auswahl!)

Obige Definition ist ein wenig umständlich: wir müssten dazu jede Borel-Menge überprüfen - und die können kompliziert sein! Bereits in der Vlsg WTS haben wir jedoch gesehen, dass die Faktorisierung der Verteilungsfunktion bereits ein gleichwertiges Kriterium ist. Damit können wir - wie schon häufig in Kapitel 1 und 2 - eine Vereinfachung machen derart, dass anstelle von *allen* Borel-Mengen lediglich ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - hier die halboffenen Intervalle $(-\infty, a]$ - überprüft werden müssen.

**Satz 3.2 [Faktorisierung von $F$ und Unabhängigkeit]** *Zufallsgrössen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$F_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$$

(+)

*für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.*

**Beweis Satz 3.2**

$\Rightarrow$: $F_X(t_1, \ldots, t_n) := P[X_1 \leq t_1, \ldots, X_n \leq t_n] =$

$= P[X_1 \in (-\infty, t_1], \ldots, X_n \in (-\infty, t_n]] =$

Def. 3.1. $\rightarrow$ $= \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in (-\infty, t_i]]$

$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$ ; da $(-\infty, t_i]$ Borel-Mengen - kannten wir schon in WTS-Vlsg!

$\Leftarrow$: ∘ Sei $\mathcal{G}_1$ die Familie von Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ so, daß

$$\circledast \quad P[X_1 \in B, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n] = P[X_1 \in B] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i] \; (\forall t_i)$$

(d.h. für 1. Koordinate schon mal geschafft) wie ist $\mathcal{G}_1$?

∘ $\mathcal{J} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{G}_1$ nach Voraussetzung. $\mathcal{J}$ ist $\pi$-System.

$\mathcal{J}$ erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; zielen auf Monoton-Lemma für Menge (Satz 1.6.)

∘ Wollen zeigen: $\mathcal{G}_1$ ist Dynkin-System (nach Kaw-Definition).

(falls wir das dann haben: $\mathcal{G}_1 = \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$) $\Longrightarrow \circledast$ gilt dann $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. + $\mathbb{R} \in \mathcal{G}_1$ ~~[illegible]~~ wegen monotoner Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit & $\circledast$.

2. + $A \subseteq B \in \mathcal{G}_1$, $A \in \mathcal{G}_1$ $\Rightarrow \forall t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$:

$$P[X_1 \in B \setminus A, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n] =$$

$$P[X_1 \in B, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n] - P[X_1 \in A, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n]$$

$$= P[X_1 \in B] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i] - P[X_1 \in A] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i]$$

$$= P[X_1 \in B \setminus A] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i] \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{G}_1$$

3. + $B_k \in \mathcal{G}_1 \; \forall k$ & $B_k \nearrow B \Rightarrow B \in \mathcal{G}_1$ weil $\forall t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$$P[X_1 \in B, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n] = \lim_{k \to \infty} P[X_1 \in B_k, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n]$$

$$= \lim_{k \to \infty} P[X_1 \in B_k] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i]$$

$$= P[X_1 \in B] \prod_{i=2}^{n} P[X_i \le t_i].$$

$B \in \mathcal{G}_1$ $\Rightarrow \mathcal{G}_1$ dynkin

FS12 $\rightarrow$



∘ Jetzt iterativ weiter mit $X_2, \dots, X_n$. ZB $\mathcal{G}_2$ Menge aller $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P[X_1 \in B, X_2 \in B', X_3 \le t_3, \dots, X_n \le t_n] = P[X_1 \in B] P[X_2 \in B'] \prod_{i=3}^{n} P[X_i \le t_i]$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t_3, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. $\rightarrow$ gl. Schritte wie oben! $\Rightarrow \mathcal{G}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Bereits in der Vlsg WTS haben wir immer wieder betont, dass die Definition der Verteilungsfunktion(en) gleich ist für alle Arten von Verteilungen (diskret, absolut stetig und singulär stetig - sogar für konvexe Linearkombinationen hiervon). Unterschiede ergeben sich, sobald wir die Wahrscheinlichkeitsfunktionen (diskret) bzw die Dichten (absolut stetig) im Hinblick auf die Unabhängigkeit der zugrunde liegenden Zufallsgrössen untersuchen wollen. Deshalb folgen jetzt 2 sich entsprechende Sätze (Satz 3.3 und Satz 3.4):

**Satz 3.3 [Unabhängigkeit diskreter Zufallsgrössen]** *Seien $X_1, \dots, X_n$ diskrete Zufallsgrössen mit Werten in der abzählbaren Menge $C$. Dann gilt: $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$P[X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = a_i]. \qquad \oplus$$

*für alle $a_1, \dots, a_n \in C$.*

**Beweis Satz 3.3**

$\Rightarrow$: Klar, weil $\{a_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; wende direkt Def. 3.1 an.

$\Leftarrow$: Wenden Satz 3.2 an:

läuft nicht fix

$$P[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n] = \sum_{\substack{a_1 \in C \\ a_1 \le t_1}} \cdots \sum_{\substack{a_n \in C \\ a_n \le t_n}} P[X_1 = a_1, \dots, X_n \le a_n]$$

$$\overset{\oplus}{=} \sum_{\substack{a_1 \in C \\ a_1 \le t_1}} \cdots \sum_{\substack{a_n \in C \\ a_n \le t_n}} \left( \prod_{i=1}^{n} P[X_i = a_i] \right)$$


ablaufen $\longrightarrow$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{\substack{a_i \in C \\ a_i \le t_i \text{ — fix}}} P[X_i = a_i] \right)$$

multipliziere alle mögl. Werte der $X_1$ einzeln mit ... $X_2$ ... $X_3$

$$= \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i]$$

Dann noch das Analogon im stetigen Fall:

**Satz 3.4 [Unabhängigkeit absolut stetiger Zufallsgrössen]** $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ *sei ein absolut stetiger Zufallsvektor. Dann gilt: $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \qquad (\Gamma)$$

*für fast alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.*

**Beweis Satz 3.4** geht, da motiv. → eindim.

$\Rightarrow$: $\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_i} f_{X_i}(y_i)\,dy_i = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} P[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n]$

⊛ von L. 2.19 $\longrightarrow = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_X(y_1, \dots, y_n)\,dy_1 \dots dy_n \quad \forall t_i$ ; d.h. $\forall t_i$:

$\int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} \underbrace{\left\{ f_X(y_1, \dots, y_n) - \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(y_i) \right\}}_{⊛} dy_1 \dots dy_n = 0 \implies (\Gamma)$, weil:

Kann anwenden: Ableiten nach $t_i$ & Hauptsatz DI ; aber $f_i$ → stetig ; fehlt Bemerkung Fo III, §6, p 59:

⊛ Lebesgue-Integrabel $\iff$ bzgl $\|\cdot\|_{L^1}$ beliebig genau durch Fkt aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ approximierbar!

$\Leftarrow$: Falls $(\Gamma)$ gilt, dann

$P[X_1 \le t_1, \dots X_n \le t_n] = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_X(y_1, \dots, y_n)\,dy_1 \dots dy_n$

$= \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} \left( \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(y_i) \right) dy_1 \dots dy_n$

$\iint f(u) g(v)\,du\,dv = \int f(u)\,du \int g(v)\,dv$ ; $f_i \ge 0$

$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_i} f_{X_i}(y_i)\,dy_i$

$= \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i]$ ; $\perp\!\!\!\perp$ wegen Satz 3.2.

Um das folgende, kleine Korollar zu verstehen, lesen Sie vorher bitte die Resultate und Definitionen aus 2.7 nochmals durch. Gemäss Lemma 2.20 gilt, dass die Komponenten eines absolut stetigen Zufallsvektors immer auch absolut stetig sind. Wir haben bereits dort darauf hingewiesen, dass - im Gegensatz zum diskreten Fall - die Umkehrung *nicht* gilt und dazu auch ein Beispiel gegeben. Hingegen gilt die Umkehrung, wenn wir noch die Unabhängigkeit der Einzelkomponenten fordern:

**Korollar 3.5 [absolut stetiger Vektor und absolut stetige Komponenten bei Unabhängigkeit]** *Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsgrössen. Dann gilt: die Komponenten $(X_i)_{i=1}^n$ sind genau dann absolut stetig, wenn auch der Vektor $(X_1, \dots, X_n)$ absolut stetig ist.*

**Beweis Korollar 3.5**

$\Leftarrow$: Lemma 2.20. (brauche keine U)

$\Rightarrow$: $P[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n]$

als Mehrfaches Lebesgue-Integral darstellbar ⇒ fertig

$$\overset{U}{=} \prod_{i=1}^{n} P[X_i \le t_i]$$

Komponenten abs. stetig →

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_i} f_{X_i}(y_i)\,dy_i$$

$f_i \ge 0$

$$= \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} \Big\{ \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(y_i) \Big\}\, dy_1 \dots dy_n .$$

d.h. $\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(y_i)$ ist gemeinsame Dichtefunktion gemäß (*) in Lemma 2.19.

FS 14

## 3.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

**Definition 3.6 [Unabhängigkeit von Ereignissen]** *Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig, wenn die Indikatoren $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ (Zufallsgrössen!) unabhängig sind. Eine unendliche Sammlung von Ereignissen nennen wir unabhängig, wenn jede endliche Teilsammlung unabhängig ist.*

$\hookrightarrow B \subset \overline{\underline{\amalg}}$

Wir müssen natürlich schauen, dass diese Definition gleichwertig mit der Definition aus der WTS ist - dies *ist* der Fall:

(d.h.: $1_{A_1} \ldots 1_{A_n}$ ⫫ als ZG)

**Satz 3.7 [Gleichwertigkeit der Definitionen von Unabhängigkeit von Ereignissen]** *Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$P[\cap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i] \qquad (w)$$

*für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.*

**Beweis Satz 3.7**

$\Rightarrow$: Falls $(A_i)_{i=1}^n$ unabhängig $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$ sind ZG: $\{1_{A_i}, i \in I\}$ nach Def. 3.6 ⫫ $\Rightarrow$

$P[\bigcap_{i \in I} A_i] \overset{"w"}{=} P[\{1_{A_i} = 1 ; i \in I\}] \overset{\text{Satz 3.3, Def. 3.6}}{=} \prod_{i \in I} P[1_{A_i} = 1] = \prod_{i \in I} P[A_i]$.
(Verteilung Menge der ZG!)

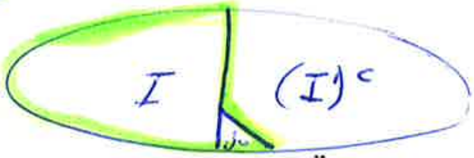
$\Leftarrow$: Benutzen Satz 3.3 (da $1 \in \{0,1\}$); wollen wegen Def 3.6 zeigen, daß $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ ⫫; reicht zu zeigen, daß $\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\}$:

$$P[\{1_{A_i} = 1 ; i \in I\} \cap \{1_{A_j} = 0 ; j \notin I\}] = \prod_{i \in I} P[A_i] \cdot \prod_{j \notin I} (1 - P[A_j]) \qquad (u)$$

machen dazu Induktion über $|I^c|$. Falls $|I^c| = 0 \Rightarrow I = \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow u \equiv w$. Nehmen jetzt an, (u) gilt $\forall I : |I^c| \leq k-1$; jetzt nehme $I : |I^c| = k$ & $I' = I \cup \{j_0\}$, $j_0 \in I^c$; $\Rightarrow$

$P[\{1_{A_i} = 1 ; i \in I\} \cap \{1_{A_j} = 0 ; j \notin I\}] = P[\{1_{A_i} = 1 ; i \in I\} \cap \{1_{A_j} = 0 ; j \notin I'\}] - P[\{1_{A_i} = 1 ; i \in I'\} \cap \{1_{A_j} = 0 ; j \notin I'\}]$

auf andere Seite nehmen; $1_{A_{j_0}}$ offe; $1_{A_{j_0}} = 1$; $1_{A_{j_0}} = 0$




$\overset{IS}{=} \prod_{i \in I} P[A_i] \cdot \prod_{j \notin I'} (1 - P[A_j]) - \prod_{i \in I'} P[A_i] \cdot \prod_{j \notin I'} (1 - P[A_j])$ $(k-1)$

$\overset{\text{ohne } j_0 \; k-1}{=} \prod_{i \in I} P[A_i] \cdot \prod_{j \notin I} (1 - P(A_j))$

Sie beweisen in einer Übungsaufgabe, dass $A_1, \ldots, A_n$ genau dann unabhängig sind, wenn auch $A_1^c, \ldots, A_n^c$ unabhängig sind.



$= \prod_{i \in I} P[A_i] \prod_{j \notin I'} (1 - P[A_j])(1 - P[A_{j_0}]) =$

FS 08

(FS 12)

In Kapitel 1 haben wir in Satz 1.11 [Borel-Cantelli I] gezeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] < \infty \Rightarrow P[\limsup_n A_n] = 0.$$

Analysis: $\sum_n |a_n| < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Im Fall von Unabhängigkeit haben wir auch eine Umkehrung der Art:

**Satz 3.8 [Borel-Cantelli II]** *Seien $A_1, A_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = \infty \Rightarrow P[\limsup_n A_n] = 1.$$

(schwierig, anschaulich vorzustellen; schöne Intuition willkommen!)

**Beweis Satz 3.8** • $\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m$ ; wir ~~zeigen~~

$$P\Big[\bigcup_{m\geq n} A_m\Big] = 1 \ \forall n \text{ \& dann A21, fertig}$$

aufsteigend

$$\bullet\ P\Big[\bigcup_{m\geq n} A_m\Big] = \lim_{k\to\infty} P\Big[\bigcup_{m=n}^{k} A_m\Big]$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} P\Big[\Big(\bigcup_{m=n}^{k} A_m\Big)^c\Big]$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} P\Big[\bigcap_{m=n}^{k} A_m^c\Big]$$

A48, k endl.!

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} P[A_m^c]$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} (1 - P[A_m])$$

$$\geq 1 - \lim_{k\to\infty} \prod e^{-P[A_m]}$$

$e^{-x} \geq 1 - x$ ↑ Tangente & Zwischenschritt

$$\to\ = 1 - \lim_{k\to\infty} \underbrace{\exp\Big\{-\sum_{m=n}^{k} P[A_m]\Big\}}_{\to\, 0 \text{ da } \sum_{m=1}^{\infty} P[A_m] = \infty}$$

In den Übungen werden Sie noch Beispiele zu Borel-Cantelli angeben müssen.



BC I & II: $\left\{ \text{unabh.} \Rightarrow P[\limsup_n A_n] \in \{0,1\} \right\}$

(Teil der Resultate rund um Null-Eins-Gesetze von Kolmogoroff; sog. terminale Ereignisse)