Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. C.J. Luchsinger

5 $n \to \infty$ (Konvergenz, LLN)

5.1 Konvergenzarten

In der WT gibt es viele Konvergenzarten für Folgen von Zufallsgrössen. Sie haben alle ihre Berechtigung. In der Analysis untersucht man auch die Konvergenz von Funktionenfolgen und hat auch dort (zum Teil) analoge Begriffe und Theoreme. Es gibt jedoch einen wichtigen Unterschied: in der WT haben wir ein endliches Mass (im Gegensatz zum Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$ in der Analysis). Damit gelten in der WT Sätze, welche verallgemeinert in der Analysis *nicht* gelten. Wir werden die Resultate aus der Analysis auch präsentieren (aber ohne Beweise, immerhin mit Gegenbeispielen).

Im Folgenden ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; ebenso ist X eine Zufallsgrösse auf dem gleichen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Ein erster Konvergenzbegriff macht einen Rückgriff auf die gewöhnliche Konvergenz einer Folge von reellen Zahlen: die **Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, auch stochastische Konvergenz genannt**. Dazu wählen wir ein festes $\epsilon > 0$ und berechnen

$$p_n(\epsilon) := P[|X_n - X| > \epsilon].$$

Dieses $p_n(\epsilon)$ ist jetzt eine reelle Zahl! Wenn wir jetzt $n \to \infty$ gehen lassen, dann ist das eine gewöhnliche Konvergenz von reellen Zahlen (hoffentlich gegen 0). Exakte Definition: Wir sagen, dass eine Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 0$, in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| > \epsilon] = 0.$$

In den Anwendungen ist die Zufallsgrösse X häufig ein Mittelwert (von iid X_i) oder 0. Diese Konvergenz kommt beim Gesetz der grossen Zahlen vor (WLLN: **Weak** Law of Large Numbers).

2. Ein weiterer Konvergenzbegriff macht ebenfalls Rückgriff auf die gewöhnliche Konvergenz einer Folge von reellen Zahlen: die **fast sichere Konvergenz**. Jargon: fs-Konvergenz (fast sichere) oder as-Konvergenz (almost surely); in der Analysis eher ae-Konvergenz (almost everywhere). Dazu fixiert man zuerst ein bestimmtes Elementarereignis ω. Man kann sich dann für dieses ω fragen, ob $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Falls dies nicht nur für ein bestimmtes ω gilt, sondern im Gegenteil die Menge aller ω's mit dieser Eigenschaft Mass 1 haben, dann liegt fs-Konvergenz vor. Exakte Definition: Die Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 0$, konvergiert fs gegen X, wenn

$$P[\{\omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1.$$

Auch hier wird in den Anwendungen die Zufallsgrösse X häufig ein Mittelwert (von iid X_i) oder 0 sein. Auch diese Konvergenz kommt beim Gesetz der grossen Zahlen vor (SLLN: **Strong** Law of Large Numbers).

Leute von der Gasse sprechen in den beiden ersten Fällen vom "limP" und vom "Plim".

3. Der dritte wichtige Konvergenzbegriff wird über die Erwartungswerte definiert: die sogenannte **L^p-Konvergenz**. Die Folge $(X_n), n \geq 1$, konvergiert gegen eine Zufallsgrösse X in der L^p-Norm (eigentlich eine Pseudo-Norm), wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

Auch hier wird X häufig eine Konstante sein. Für $p = 2$ spricht man auch von Konvergenz im quadratischen Mittel.

4. Die vierte Konvergenzart tanzt insofern aus der Reihe, als dass die Folge der Zufallsgrössen X_n nicht auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sein muss (wir werden nicht einzelne ω's von Anfang bis Unendlich verfolgen). Man stützt sich bei dieser Konvergenz auf die Verteilungsfunktion; dies gibt der **Konvergenz in Verteilung** auch den Namen: Eine Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 1$, konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsgrösse X, wenn die Folge der Verteilungsfunktionen $F_{X_n}(a)$ gegen die Verteilungsfunktion $F_X(a)$ konvergiert und zwar an allen Stetigkeitspunkten von F_X! Es gibt viele

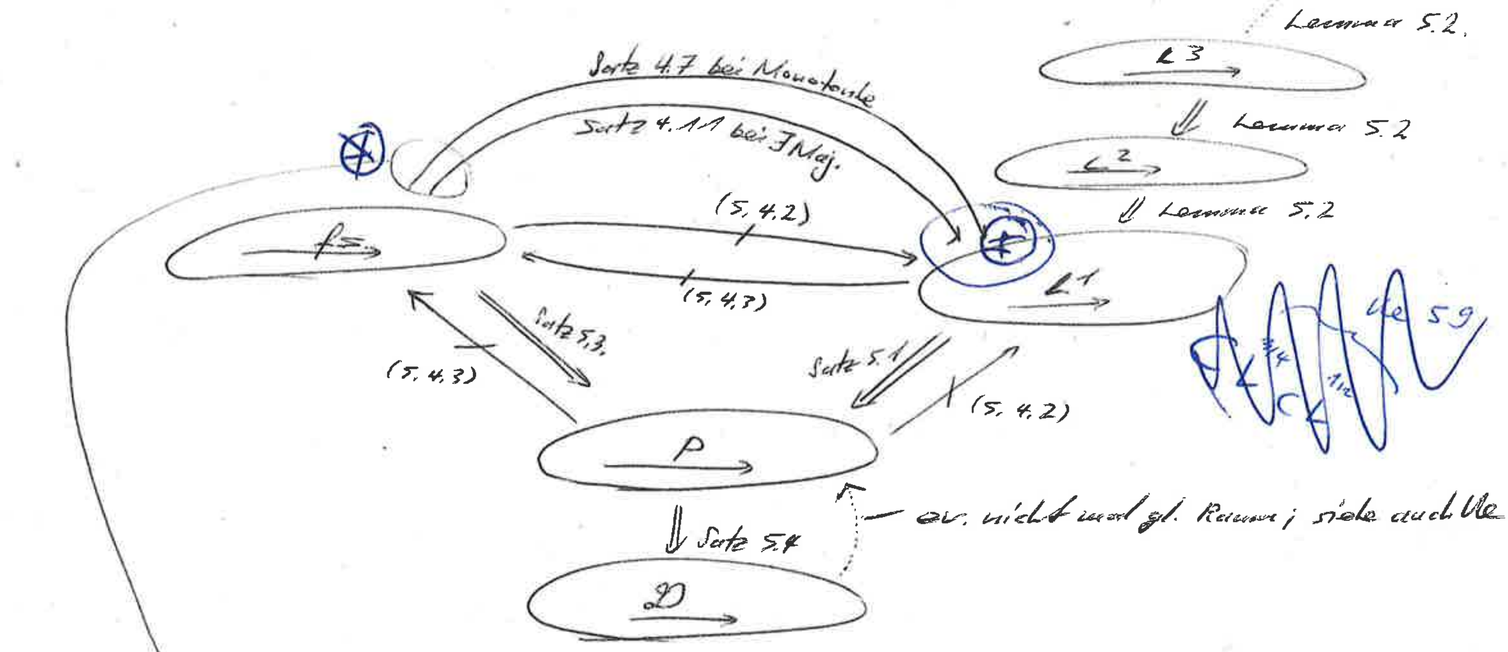
alternative Definitionen dieser Konvergenzart (auch in allgemeinen metrischen Räumen), die hier vorgestellte ist die elementarste. Diese Konvergenz haben wir in WTS-Kapitel 5 schon kennengelernt. Die Konvergenz war dort gegen eine Standard-Normalverteilung - die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist bekanntlich überall stetig, womit wir die Sache mit den Stetigkeitspunkten in der WTS gar nicht beachten mussten.

Vergleich zur Vorlesung WTS:

1. Mit fs-Konvergenz und L^p-Konvergenz haben wir zwei neue Konvergenzarten kennengelernt.
2. Neu haben wir eine allgemeine Zufallsgrösse X als Limes und nicht mehr nur einen Mittelwert oder eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse.
3. In der elementaren WTS (auch in der Mittelschule und für Nicht-Mathematiker/innen an den Hochschulen) wird meist die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gebraucht um die Konvergenz des arithmetischen Mittels gegen den theoretischen Mittelwert (eine reelle Zahl und keine Zufallsgrösse mit positiver Varianz) zu formulieren (LLN) und die Konvergenz in Verteilung für den CLT. Kurz: Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für Konvergenz gegen einen einzelnen Punkt und Konvergenz in Verteilung gegen eine Zufallsgrösse mit positiver Varianz. Dies ist am Anfang der Ausbildung als Gedächtnisstütze und Orientierung durchaus erlaubt - ab jetzt aber zu simpel.

— an gekannte Tafel

5.2. DAS Schema (WT)



⊛ ∘ Es reicht f.s. Konvergenz $X_n \to X$ bei Satz 4.7 & 4.11 (ohne Beweis)

⊕ · haben Satz 4.7/4.11: $E[\lim .] = \lim E[.]$ $(p=1)$

12

· Monotonie: $X_n \nearrow X \Rightarrow E[|X_n - X|] = E[|X - X_n|] = E[X - X_n] = E[X] - E[X_n] \to 0$ falls $E[X] < \infty$

$\Rightarrow L^1$ Konvergenz

· Lebesgue: $E[|X_n - X|] = E[(X_n - X)^+] + E[(X_n - X)^-]$

$n \to \infty$: $E[(X_n - X)^+] \to 0$, $E[(X_n - X)^-] \to 0$

da $X_n \to X$ f.s. $\Rightarrow$

$(X_n - X) \to 0$ f.s. $\Rightarrow$

$(X_n - X)^+ \to 0$ f.s. &

$(X_n - X)^- \to 0$ f.s.

& Majorante $2Y$

5.3 Konvergenzsätze

Satz 5.1 **[L^p-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit]** *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche in der L^p-Norm gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.*

Beweis von Satz 5.1 Œ nehmen wir $X = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wir haben

sonst $(X_n - X) =: Y_n$; $Y = 0$

$$E[|X_n|^p] \geq E[|X_n|^p I_{\{|X_n| \geq \epsilon\}}] \geq \epsilon^p E[I_{\{|X_n| \geq \epsilon\}}] = \epsilon^p P[|X_n| \geq \epsilon]. \tag{5.1}$$

Wenn die Folge aber in L^p konvergiert, dann wegen (5.1) auch in Wahrscheinlichkeit.

□

Lemma 5.2 **[$p \geq q \geq 1$: L^p-Konvergenz $\Rightarrow$ L^q-Konvergenz]** *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche in der L^p-Norm gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert und sei $p \geq q \geq 1$. Dann konvergiert die Folge auch in der L^q-Norm gegen X.*

Beweis von Lemma 5.2:

o Lyapunovungleichung:

$$\begin{array}{ccc} E[|X_n - X|^q]^{1/q} & \leq & E[|X_n - X|^p]^{1/p} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n \to \infty} & \Longleftarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle n \to \infty} \\ 0 & & 0 \end{array}$$

o elementare Ueberlegung: bei Konvergenzaussagen gilt

$$\underbrace{E[|X_n - X|^p]^{1/p}}_{=: a_n}$$

„irrelevant" ($1/p$)

„relevant" (p)

□

da $a_n \to 0 \iff (a_n)^d \to 0$; $d > 0$

$\sqrt{\ }$, quadrat, egal

FS 08

FS14

Satz 5.3 [fs-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche fs gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.*

Beweis von Satz 5.3

- $\varepsilon > 0$ gegeben.
- $B_N := \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N\}$
- $B_N \subseteq B_{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N}$
- $A := \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$
- $\left(\bigcup_{N\geq 1} B_N\right) \supseteq A$
- $P[A] \underset{\text{Voraus.}}{=} 1 \leq P[\bigcup_{N\geq 1} B_N] \overset{\text{Satz 1.9 c)}}{=} \lim_{N\to\infty} P[B_N] = 1$
- $P[\{\omega \mid |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}] \leq P[B_N^c] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

$\square$

Satz 5.4 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ⇒ Konvergenz in Verteilung] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Verteilung gegen X.*

Beweis von Satz 5.4

- Sei t ein Stetigkeitspunkt von F_X.
- $\forall\, \varepsilon > 0, n$: $F_{X_n}(t) = P[X_n \leq t]$

$$= P[X_n \leq t, |X_n - X| \leq \varepsilon] + P[X_n \leq t, |X_n - X| > \varepsilon]$$

extremster Fall ⟶ $\leq P[X \leq t + \varepsilon] + P[|X_n - X| > \varepsilon]$

1 Richtung

$$= F_X(t+\varepsilon) + P[|X_n - X| > \varepsilon]$$

$n \to \infty \Longrightarrow$ $\to 0$ wegen $X_n \xrightarrow{P} X$

$\Rightarrow \limsup_n F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0$;

$\Rightarrow$ mit (Rechts-)Stetigkeit von F_X: $\boxed{\limsup_n F_{X_n}(t) \leq F_X(t)}$ I.

- $\forall\, \varepsilon > 0, n$: $F_X(t-\varepsilon) = P[X \leq t - \varepsilon]$

$$= P[X \leq t-\varepsilon, |X_n - X| \leq \varepsilon] + P[X \leq t-\varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon]$$

$$\leq F_{X_n}(t) + P[|X_n - X| > \varepsilon]$$

$n \to \infty \Longrightarrow$ $\to 0$ wegen $X_n \xrightarrow{P} X$

$\Rightarrow$ mit $\varepsilon \downarrow 0$; da F_X bei t stetig:

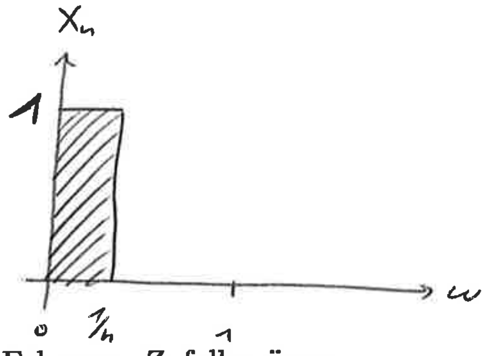
$\boxed{F_X(t) \leq \liminf_n F_{X_n}(t)}$ II.

beweistechnisch:
limsup & liminf
∃ immer; darf
also schreiben &
in dieser Kreisfolge, damit
„eingequetscht"

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$. ⟸ □

Man beachte auch den Spezialfall einer Konvergenz gegen eine Konstante auf Blatt 11 als Ergänzung zu Satz 5.4.

5.4 Beispiele und Gegenbeispiele



5.4.1 Erstes Beispiel/Gegenbeispiel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := 1_{[0,1/n]}(\omega).$$

Untersuchen Sie dieses Beispiel im Hinblick auf Ihre bisherigen Kenntnisse aus Kapitel 5. rechnen lassen!

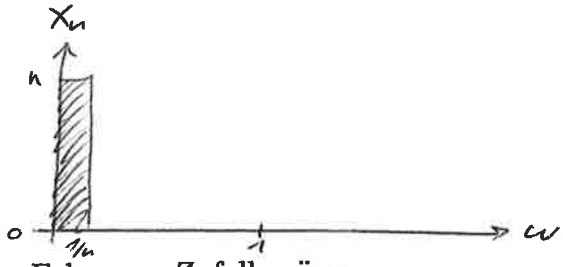
- $X = 0$; andere Vorschläge? wie $\frac{1}{n} \to 0$; $\frac{1}{n} \to e$!
- $X_n \xrightarrow{f.s.} X$: $\underline{P[\{\omega / \lim X_n(\omega) = X(\omega) = 0\}]} = P[(0,1]] = \cancel{\lambda(1) - \lambda(0)} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$
- $X_n \xrightarrow{L^1} X$: $\underline{E[|X_n - 0|]} = E[|X_n|] = E[X_n] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \underline{\underline{0}}$

direkt!

- $X_n \xrightarrow{P} X$ & $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

  Satz 5.1, auch Satz 5.3 — Satz 5.4

- $X_n \xrightarrow{L^1} X$ auch wegen Majorisierte Konvergenz: $Y := 1_\Omega$
- hätte auch $X \equiv 1_{\{0\}}$ nehmen können. (dann stetig)



5.4.2 Zweites Beispiel/Gegenbeispiel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := n\mathbf{1}_{[0,1/n]}(\omega).$$

Untersuchen Sie dieses Beispiel im Hinblick auf Ihre bisherigen Kenntnisse aus Kapitel 5.

- $X = 0$
- $X_n \xrightarrow{f.s.} X$: $P[\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n = 0\}] = P[(0,1]] = 1 \Rightarrow$ f.s. Konvergenz
- $X_n \not\xrightarrow{L^1} X$: $E[|X_n|] = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0 = E[0] = E[X] \;\forall n$
- $X_n \xrightarrow{P} X$:
  Satz 5.3 & in der Tat $P_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.
  $\varepsilon \in (0,1)$
- Satz 4.11? $\nexists$ Majorante in L^1 $\rightarrow$ Satz 4.11 nicht anwendbar
  ($\frac{1}{\omega}$ wäre Kandidat, aber dann: $E[X]$
  $X(\omega) = \frac{1}{\omega}$

5.4.3. ~~2.5.3~~ **Drittes Beispiel/Gegenbeispiel**

Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass aus der Konvergenz in L^1 nicht zwingend die fs-Konvergenz folgt. $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

- $X_0 = \mathbb{1}_{\Omega}(\omega)$
- $X_1 = \mathbb{1}_{[0, 1/2]}(\omega)$; $X_2 = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(\omega)$
- $X_3 = \mathbb{1}_{[0, 1/4]}(\omega)$; $X_4 = \mathbb{1}_{[1/4, 2/4]}(\omega)$; $X_5 = \mathbb{1}_{[2/4, 3/4]}(\omega)$; $X_6 = \mathbb{1}_{[3/4, 1]}(\omega)$

$\vdots$

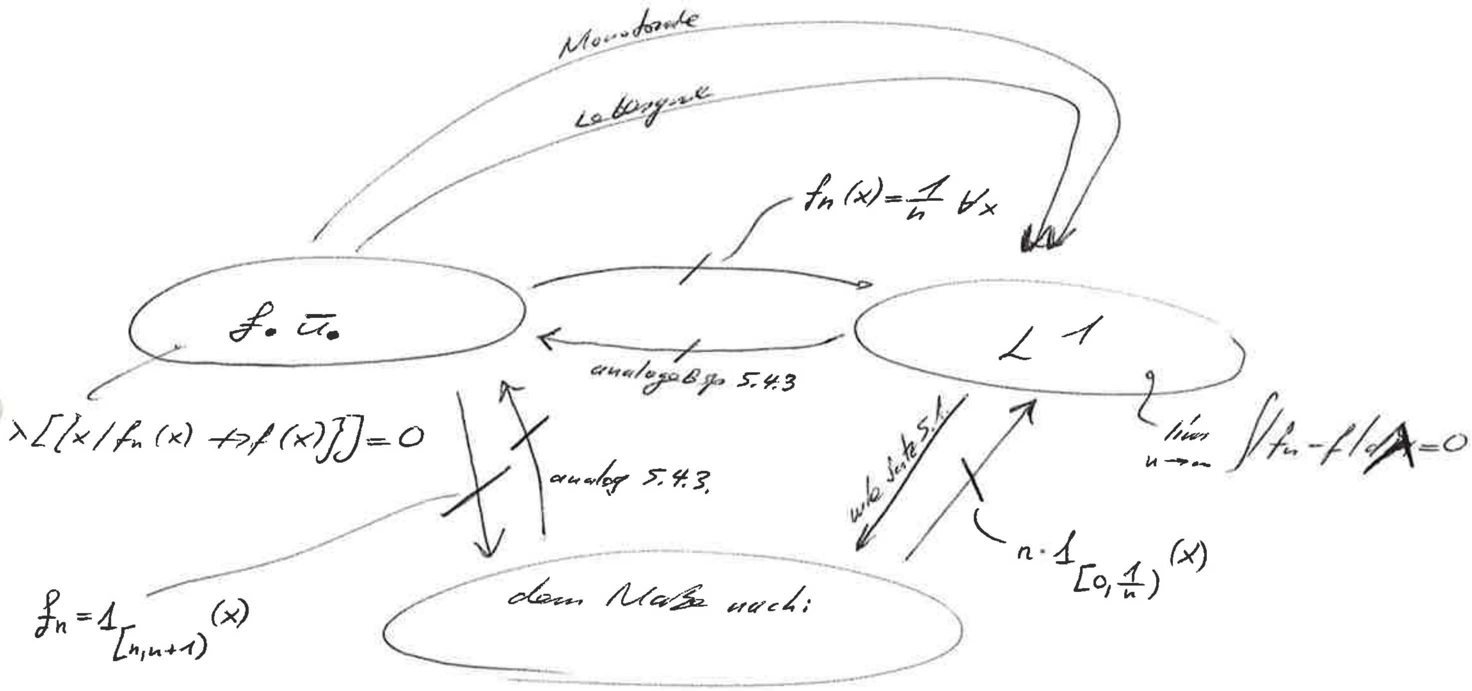
- immer dünnere Grundfläche, aber immer ganz durch pro Zeile
- $\Rightarrow \nexists\, \omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = 0 \quad (X_n \overset{f.s.}{\not\longrightarrow} X)$
- $E[|X_n|] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (X_n \overset{L^1}{\longrightarrow} X)$

~~$\frac{1}{2^{h(n)}}$ $i \to \infty$, $n \to \infty$; $i = i(n)$~~

$\frac{1}{2^{h(n)}}$, $h(n) \to \infty$, $n \to \infty$

FS12

5.5 Und wie sieht das Ganze in der Analysis aus? (→ Prüfung)



$\forall \varepsilon > 0: \ \lambda[\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}] \to 0, \ n \to \infty$

{alternativ: $\lambda[\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \cap A] = 0, \ n \to \infty$
$\forall A$ beliebig mit $\lambda[A] < \infty$.
(wegen σ-endlichkeit)}

[dann folgt aus f.ü. die Konv. dem Maße nach] wo?

5.6 LLN (WLLN, SLLN) revisited

Aus Zeitgründen können wir den Beweis des SLLN im FS ~~08~~ 10 nicht führen, er folgt im FS ~~16~~ 12. Interessierte StudentInnen sind bis dann auf Karr verwiesen.

Definition 5.5 [Gesetz der grossen Zahlen] *Eine Folge $X_i, i \geq 1$, von Zufallsgrössen mit endlichen Erwartungswerten genügt dem (schwachen/starken) Gesetz der grossen Zahlen, wenn die Folge*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])$$

(in Wahrscheinlichkeit/fast sicher) gegen 0 konvergiert. Die Abkürzungen WLLN und SLLN stehen englisch für Weak Law of Large Numbers (bei Konvergenz in Wahrscheinlichkeit) resp. Strong Law of Large Numbers (bei fast sicherer Konvergenz).

In Satz 5.3 sehen wir, dass aus SLLN die WLLN folgt. Das Gesetz der grossen Zahlen ist offenbar eine *Eigenschaft* einer Folge. Es gilt folgender starker Satz, welcher übrigens nicht die Existenz einer Varianz fordert:

Satz 5.6 [Satz von Kolmogoroff] *Sei $X_i, i \geq 1$, eine Folge von paarweise unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrössen mit $E[|X_1|] < \infty$. Dann genügt diese Folge dem SLLN; es gilt also*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E[X_1]$$

fast sicher, falls $n \to \infty$. Diese Folge genügt wegen Satz 5.3 auch dem WLLN.

Beweis: Karr und/oder FS ~~10~~ 12 in dieser Vlsg. □