Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

2 Weitere notwendige Grundlagen aus der WT: Konvergenzarten und -Sätze

Literatur Kapitel 2

* Grimmett & Stirzaker: Kapitel 7
* Krengel: § 12 (wenig)

Zur Einstimmung lese man in WTS nochmals Kapitel 5. Es wird nachfolgend auf die Unterschiede Bezug genommen. In WTS Kapitel 5 haben wir jeweils (einfache) Spezialfälle der unteren Situationen und Theoreme betrachtet.

2.1 Konvergenzarten

In der Vlsg WT gibt es viele Konvergenzarten für Folgen von Zufallsgrössen. Sie haben alle ihre Berechtigung. Wir repetieren hier nur die wichtigsten. LeserInnen aus dem Gebiet der Analysis seien sich bitte bewusst, dass wir hier Wahrscheinlichkeitsmasse haben (endlich und sogar von Mass 1). Damit gelten Sätze, welche verallgemeinert in der Analysis *nicht* gelten.

Im Folgenden ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; ebenso ist X eine Zufallsgrösse auf dem gleichen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Ein erster Konvergenzbegriff macht einen Rückgriff auf die gewöhnliche Konvergenz einer Folge von reellen Zahlen: die **Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, auch stochastische Konvergenz genannt**. Dazu wählen wir ein festes $\epsilon > 0$ und berechnen

$$p_n(\epsilon) := P[|X_n - X| > \epsilon].$$

Dieses $p_n(\epsilon)$ ist jetzt eine reelle Zahl! Wenn wir jetzt $n \to \infty$ gehen lassen, dann ist das eine gewöhnliche Konvergenz von reellen Zahlen (hoffentlich gegen 0). Exakte Definition:

Wir sagen, dass eine Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 0$, in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| > \epsilon] = 0.$$

In den Anwendungen (WTS-Kapitel 5) ist die Zufallsgrösse X häufig ein Mittelwert (von iid X_i) oder 0. Diese Konvergenz kommt beim Gesetz der grossen Zahlen vor (WLLN: Weak Law of Large Numbers).

2. Ein weiterer Konvergenzbegriff macht ebenfalls Rückgriff auf die gewöhnliche Konvergenz einer Folge von reellen Zahlen: die **fast sichere Konvergenz**. Jargon: fs-Konvergenz (fast sichere) oder as-Konvergenz (almost surely); in der Analysis eher ae-Konvergenz (almost everywhere). Dazu fixiert man zuerst ein bestimmtes Elementarereignis ω. Man kann sich dann für dieses ω fragen, ob $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Falls dies nicht nur für ein bestimmtes ω gilt, sondern im Gegenteil die Menge aller ω's mit dieser Eigenschaft Mass 1 haben, dann liegt fs-Konvergenz vor. Exakte Definition: Die Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 0$, konvergiert fs gegen X, wenn

$$P[\{\omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1.$$

Auch hier wird in den Anwendungen die Zufallsgrösse X häufig ein Mittelwert (von iid X_i) oder 0 sein. Auch diese Konvergenz kommt beim Gesetz der grossen Zahlen vor (SLLN: Strong Law of Large Numbers).

Leute von der Gasse sprechen in den beiden ersten Fällen vom "limP" und vom "Plim".

3. Der dritte wichtige Konvergenzbegriff wird über die Erwartungswerte definiert: die sogenannte **L^p-Konvergenz**. Die Folge $(X_n), n \geq 1$, konvergiert gegen eine Zufallsgrösse X in der L^p-Norm (eigentlich eine Quasi-Norm), wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

Auch hier wird X häufig eine Konstante sein. Es gilt: konvergiert X_n gegen X in der L^p-Norm, so konvergiert X_n auch in der L^q-Norm gegen X, falls $p \geq q \geq 1$. Für $p = 2$ spricht man auch von Konvergenz im quadratischen Mittel.

4. Die vierte Konvergenzart tanzt insofern aus der Reihe, als dass die Folge der Zufallsgrössen X_n nicht auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sein muss (wir werden nicht einzelne ω's von Anfang bis Unendlich verfolgen). Man stützt sich bei dieser Konvergenz auf die Verteilungsfunktion; dies gibt der **Konvergenz in Verteilung** auch den Namen: Eine Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 1$, konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsgrösse X, wenn die Folge der Verteilungsfunktionen $F_{X_n}(a)$ gegen die Verteilungsfunktion $F_X(a)$ konvergiert und zwar an allen Stetigkeitspunkten von F_X! Es gibt viele alternative Definitionen dieser Konvergenzart (auch in allgemeinen metrischen Räumen), die hier vorgestellte ist die elementarste. Diese Konvergenz haben wir in WTS-Kapitel 5 schon kennengelernt. Die Konvergenz war dort gegen eine Standard-Normalverteilung - die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist bekanntlich überall stetig, womit wir die Sache mit den Stetigkeitspunkten in der WTS gar nicht beachten mussten.

Vergleich zur Vorlesung WTS:

1. Mit fs-Konvergenz und L^p-Konvergenz haben wir zwei neue Konvergenzarten kennengelernt.
2. Neu haben wir eine allgemeine Zufallsgrösse X als Limes und nicht mehr nur einen Mittelwert oder eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse.
3. In der elementaren WTS (v.a. Mittelschule und für Nicht-Mathematiker/innen an den Hochschulen) wird meist die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gebraucht um die Konvergenz des arithmetischen Mittels gegen den theoretischen Mittelwert (eine reelle Zahl und keine Zufallsgrösse mit positiver Varianz) zu formulieren (LLN) und die Konvergenz in Verteilung für den CLT. Kurz: Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für Konvergenz gegen einen einzelnen Punkt und Konvergenz in Verteilung gegen eine Zufallsgrösse mit positiver Varianz. Dies ist am Anfang der Ausbildung als Gedächtnisstütze und Orientierung durchaus erlaubt - ab jetzt aber zu simpel.

2.2 LLN (WLLN, SLLN) revisited

WT-Definition 5.5 [Gesetz der grossen Zahlen] *Eine Folge* $X_i, i \geq 1$*, von Zufallsgrössen mit endlichen Erwartungswerten genügt dem (schwachen/starken) Gesetz der grossen Zahlen, wenn die Folge*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])$$

(in Wahrscheinlichkeit/fast sicher) gegen 0 *konvergiert. Die Abkürzungen WLLN und SLLN stehen englisch für Weak Law of Large Numbers (bei Konvergenz in Wahrscheinlichkeit) resp. Strong Law of Large Numbers (bei fast sicherer Konvergenz).*

Wir werden in WT-Satz 5.3 sehen, dass aus SLLN das WLLN folgt. Das Gesetz der grossen Zahlen ist offenbar eine *Eigenschaft* einer Folge. Es gilt folgender starker Satz, welcher übrigens nicht die Existenz einer Varianz fordert:

WT-Satz 5.6 [Satz von Kolmogoroff] *Sei* $X_i, i \geq 1$*, eine Folge von paarweise unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrössen mit* $E[|X_1|] < \infty$*. Dann genügt diese Folge dem SLLN; es gilt also*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E[X_1]$$

fast sicher, falls $n \to \infty$*. Diese Folge genügt wegen WT-Satz 5.3 auch dem WLLN.*

Beweis: Vlsg WT

2.3 DAS Schema

2.4 Konvergenzsätze

WT-Satz 5.1 [L^p-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] $(X_n)_{n\geq 1}$ *sei eine Folge von Zufallsgrössen, welche in der L^p-Norm gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.*

Beweis von WT-Satz 5.1: Œ nehmen wir $X = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wir haben

$$E[|X_n|^p] \geq E[|X_n|^p I_{\{|X_n|\geq\epsilon\}}] \geq \epsilon^p E[I_{\{|X_n|\geq\epsilon\}}] = \epsilon^p P[|X_n| \geq \epsilon]. \qquad (WT-5.1)$$

Wenn die Folge aber in L^p konvergiert, dann wegen (WT-5.1) auch in Wahrscheinlichkeit.

WT-Lemma 5.2 [$p \geq q \geq 1$: L^p-Konvergenz $\Rightarrow$ L^q-Konvergenz] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche in der L^p-Norm gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert und sei $p \geq q \geq 1$. Dann konvergiert die Folge auch in der L^q-Norm gegen X.*

Beweis von WT-Lemma 5.2: Vlsg WT

WT-Satz 5.3 [fs-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche fs gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.*

Beweis von WT-Satz 5.3 Vlsg WT

WT-Satz 5.4 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit $\Rightarrow$ Konvergenz in Verteilung] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Verteilung gegen X.*

Beweis von WT-Satz 5.4 Vlsg WT

WT-Satz 4.7 [Monoton-Konvergenzsatz von Beppo Levy] *Sei (X_n), $n \geq 1$, eine nichtnegative, monoton wachsende Folge von Zufallsgrössen (für alle $\omega \in \Omega$ und $n \geq 0$ gilt: $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$). Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\lim_{n\to\infty} X_n].$$

Beweis von WT-Satz 4.7: Vlsg WT

WT-Satz 4.11 [Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz] *Sei* (X_n), $n \geq 1$, *eine Folge von Zufallsgrössen, welche fs gegen eine Zufallsgrösse* X *konvergiert. Zudem existiert eine nichtnegative Zufallsgrösse* M *(Majorante) derart, dass* $E[|M|] < \infty$ *und für alle* $n \geq 0$ *gilt:* $P[X_n \leq M] = 1$. *Dann gelten* $E[|X|] < \infty$, $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$ *und* $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0$.

Beweis von WT-Satz 4.11: Vlsg WT

2.5 Beispiele und Gegenbeispiele

2.5.1 Erstes Beispiel/Gegenbeispiel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ mit $P[[a,b]] := b - a$, wenn $0 \leq a \leq b \leq 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := 1_{[0,1/n]}(\omega).$$

Untersuchen Sie dieses Beispiel im Hinblick auf 2.3.

2.5.2 Zweites Beispiel/Gegenbeispiel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ mit $P[[a,b]] := b - a$, wenn $0 \leq a \leq b \leq 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := n 1_{[0,1/n]}(\omega).$$

Untersuchen Sie dieses Beispiel im Hinblick auf 2.3.

2.5.3 Drittes Beispiel/Gegenbeispiel

Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass aus der Konvergenz in L^1 nicht zwingend die fs-Konvergenz folgt.