Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

4 Qualitatives Verhalten von Markov-Ketten, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^n$

Literatur Kapitel 4

* Grimmett & Stirzaker: Kapitel 6.2, 6.3, 6.6
* Krengel: § 16

In Kapitel 4 werden wir uns "nur" fragen, wo gelegentlich eine Markov-Kette hingelangt oder hingelangen kann. Wir fragen uns vorerst nicht, wie lange es dauert, bis die Kette dort angelangt ist oder wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sie überhaupt dort ankommt. Dies wird in Kapitel 5 geschehen, wo wir Treffwahrscheinlichkeiten und erwartete Zeiten bis zur Absorption berechnen werden.

4.1 Qualitatives Verhalten von Markov-Ketten

Definition 4.1 [kommunizieren (miteinander)] *Zustand i kommuniziert mit j (in Zeichen $i \rightsquigarrow j$), wenn es ein $m \geq 0$ gibt, so dass $p_{ij}^{(m)} > 0$ ($m = 0$ beinhaltet den Fall $i \rightsquigarrow i$).*
i und j kommunizieren miteinander ($i \leftrightsquigarrow j$), wenn sowohl $i \rightsquigarrow j$ wie auch $j \rightsquigarrow i$.

$p_{ij}^{(m)} > 0$ ist zum Beispiel wegen der Chapman-Kolmogoroff Ungleichung sicher dann erfüllt, wenn wir eine Folge von positiven (d.h. > 0) Zahlen $p_{i,i_1}, p_{i_1,i_2}, \ldots, p_{i_{m-1},j}$ finden können. Die Frage, ob Zustände (miteinander) kommunizieren, lässt sich am besten graphisch ablesend beantworten. Dazu einige Beispiele.

Symmetrische Irrfahrt:

nur Drift nach links (oder rechts):

Nach diesen Beispielen haben wir sicher schon gemerkt, dass wir mit $\leftrightsquigarrow$ eine Äquivalenzrelation auf dem Zustandsraum definieren können:

Lemma 4.2 [Kommunikationsklassen (Äquivalenzrelation)] $\leftrightsquigarrow$ *definiert auf dem Zustandsraum eine Äquivalenzrelation. Der Zustandsraum wird in sogenannte Kommunikationsklassen partitioniert.*

Beweis: Aufgabe auf Blatt 4.

Definition 4.3 [Absorbierend] *i heisst absorbierend, falls $p_{ii} = 1$. In diesem Fall ist $\{i\}$ eine Kommmunikationsklasse.*

Sei der Zustandsraum die Menge $\{0, 1, \ldots, 10\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten seien $p_{00} = p_{10,10} = 1$ und $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Geben Sie die absorbierenden Zustände und die Kommunikationsklassen an:

Definition 4.4 [abgeschlossene Klasse] *Eine Klasse K heisst abgeschlossen, wenn $p_{ij} = 0 \; \forall i \in K, j \notin K$ (also einmal in K gefangen, immer in K gefangen; man kommt nicht mehr raus!).*

Beispiel:

Fragen:
1. Wenn $X_0 = i \in K_3$, wie ist $P_i[X_n \in K_1$, für n gross genug] (P_i bedeutet, dass wir in i gestartet sind, also ist dies $P[X_n \in K_1$, für n gross genug$|X_0 = i])$.
2. Wie verhält sich der Prozess, einmal in K_1 angekommen?

Diese beiden Fragen erlauben je eine Vereinfachung der Markov-Kette:
1. Zur Beantwortung von Frage 1 können wir gerade so gut nur die Kette

betrachten.
2. Für Frage 2 reicht es, die folgende Teilmatrix von P zu betrachten:

Man beachte, dass diese Teil-Matrix auch eine stochastische Matrix ist (Zeilensummen gleich 1). K_1 ist als gesamte Klasse absorbierend. Offenbar kann man in diesem Fall die Matrix P reduzieren, sobald man nach K_1 gelangt ist.

Definition 4.5 [irreduzibel] *Eine stochastische Matrix A (d.h. $a_{lm} \in [0,1], \forall l, m$ und Zeilensumme =1) heisst irreduzibel, wenn wir für alle Paare (i,j) ein $k = k(i,j)$ finden können, sodass*

$$(A^k)_{ij} > 0.$$

Definition 4.6 [rekurrent / vergänglich] *Sei $i \in \mathbb{Z}^+$, $F_{ii} := P_i[\cup_{n\geq 1}\{X_n = i\}] = P[X$ kommt nach i zurück $|X_0 = i]$.*

i heisst rekurrent, wenn $F_{ii} = 1$.

i heisst vergänglich (oder transient), wenn $F_{ii} < 1$

Bemerkung: Wenn der Zustandsraum stetig ist (z.B. bei der Brownschen Bewegung im zweidimensionalen Raum und höheren Dimensionen), wird rekurrent und vergänglich leicht anders definiert. Wir kommen in Kapitel 17 kurz darauf zurück.

Satz 4.7 [Wie oft kommt man zurück? Unendlich oft?]

a) Sei i vergänglich. Dann gelten:

$$P_j[X \text{ kommt } \infty \text{ oft nach } i] = 0 \ \forall j,$$

$$(= P_j[\cap_{n\geq 1} \cup_{m\geq n} \{X_m = i\}])$$

und

$$\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = E_i[\sum_{n\geq 1} I[X_n = i]] = E_i[\#\{n \geq 1 : X_n = i\}] = \frac{F_{ii}}{1 - F_{ii}} < \infty. \tag{4.1}$$

b) Sei i rekurrent. Dann gilt

$$P_i[X \text{ kommt } \infty \text{ oft nach } i] = 1,$$

und sogar

$$P_j[X \text{ kommt } \infty \text{ oft nach } i] = 1,$$

falls $i \rightsquigarrow j$ (es gilt dann übrigens auch $j \rightsquigarrow i$ (freiwillige Übung)).

Beweis von Satz 4.7:

a) Der Beweis wird der intuitiven Vorstellung folgen: Wenn i vergänglich ist und wir einmal in i landen, so werden wir nur mit Wahrscheinlichkeit echt kleiner 1 wieder nach i zurückkommen. Da wir eine Markov-Kette haben, fängt bei jeder allfälligen Rückkehr die Zeit von neuem an. Jedes Mal wird man nur mit Wahrscheinlichkeit echt kleiner 1 zurückkommen. Wie oft man zurückkommt ist geometrisch verteilt, worauf das zweite Resultat in a) auch hinweist. Der exakte Beweis geht folgendermassen:

Wir definieren $A := \cap_{n\geq 1} \cup_{m\geq n} \{X_m = i\}$ das Ereignis, dass wir unendlich oft nach i zurückkommen. $N := \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$ sei die Stoppzeit des ersten Eintreffens in i nach Zeit 0. Wir starten vorerst mal in i zur Zeit 0. Sei $m \geq 1$. Man beachte: $\{\sum_{n\geq 1} I[X_n = i] \geq m\}$ ist das Ereignis, dass man *mindestens* m mal nach i zurückkommt.

$$\begin{aligned}
q_m &:= P_i[\sum_{n\geq 1} I[X_n = i] \geq m] \\
&= P_i[\sum_{n\geq 1} I[X_n = i] \geq m | N < \infty] P_i[N < \infty] + P_i[\sum_{n\geq 1} I[X_n = i] \geq m | N = \infty] P_i[N = \infty] \\
&= q_{m-1} F_{ii}
\end{aligned}$$

Wir haben im letzten Gleichheitszeichen die starke Markov-Eigenschaft gebraucht. $q_1 = F_{ii}$, also gilt

$$q_m = (F_{ii})^m.$$

Bis jetzt haben wir übrigens nicht gebraucht, dass i vergänglich ist (wir werden deshalb die Resultate bis hier auch für den Beweis von b) heranziehen können). Sei jetzt aber $F_{ii} < 1$, also gilt $\lim_{m\to\infty} q_m = 0$. Wir können somit WTS-Lemma 1.8 anwenden, denn die Folge der $A_m := \{\omega | \sum_{n\geq 1} I[X_n = i] \geq m\}$ fällt monoton gegen A. Damit gilt:

$$P_i[A] = \lim_{m\to\infty} q_m = 0.$$

Dies ist erst der Beweis, wenn wir in i starten. Aber

$$P_j[A] = P_j[A|N < \infty] P_j[N < \infty] + P_j[A|N = \infty] P_j[N = \infty] = 0.$$

Wir haben auch hier die starke Markov-Eigenschaft angewandt.

Es fehlt noch der Beweis von (4.1): Weil $P[C] = E[I[C]]$, ist nur das 2. letzte Gleichheitszeichen in (4.1) zu beweisen. Sei $M := \#\{n \geq 1 | X_n = i\} = \sum_{n \geq 1} I[X_n = i]$:

$$P_i[M \geq m] = q_m = (F_{ii})^m,$$

also wegen WTS-Lemma 3.6 [Alternative Berechnung des Erwartungswerts]

$$E_i[M] = \sum_{m \geq 1} P_i[M \geq m] = \frac{F_{ii}}{1 - F_{ii}} < \infty$$

für $F_{ii} < 1$. M ist in der Tat unter P_i geometrisch verteilt auf den natürlichen Zahlen **inklusive** die Null.

b) Von Teil a) des Beweises und der dortigen Notation erhalten wir

$$P_i[A] = P_i[\cap_{m \geq 1} A_m] = \lim_{m \to \infty} P_i[A_m] = \lim_{m \to \infty} (F_{ii})^m = 1,$$

da jetzt $F_{ii} = 1$. Damit haben wir den ersten Teil von b) schon bewiesen.

Sei jetzt $i \rightsquigarrow j$. Dann existiert ein $l > 0$, sodass $p_{ij}^{(l)} > 0$. Also haben wir (mit dem ersten Teil von b) und bFTW):

$$1 = P_i[A] := P[A | X_0 = i] = \sum_k P[A | X_0 = i, X_l = k] P[X_l = k | X_0 = i] = \sum_k P_k[A] p_{ik}^{(l)}.$$

Damit gilt:

$$0 = 1 - \sum_k P_k[A] p_{ik}^{(l)} = \sum_k p_{ik}^{(l)} (1 - P_k[A]).$$

Alle Summanden in obiger Darstellung sind ≥ 0; genauer: sowohl die $p_{ik}^{(l)}$ wie auch die $(1 - P_k[A])$ sind alle ≥ 0. Damit müssen aber alle einzelnen Summanden auch $= 0$ sein. l ist so gewählt, dass $p_{ij}^{(l)} > 0$. Dann muss aber

$$1 - P_j[A] = 0$$

und damit $P_j[A] = 1$ sein.

□

Definition 4.6 und Satz 4.7 erlauben uns noch nicht rechnerisch zu überprüfen, ob ein Zustand rekurrent oder vergänglich (andere Bezeichnung transient) ist. Wir werden jetzt einige einfache, operationelle Kriterien erarbeiten. Ein erstes Kriterium folgt direkt aus Satz 4.7.

Korollar 4.8 [Operationelle Beschreibung von Rekurrenz und Transienz] *Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.7 a):*
i vergänglich $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} < \infty$.
i rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Beweis von Korollar 4.8: Folgt direkt aus Satz 4.7.

□

Satz 4.9 [Rekurrenz und Transienz sind Klasseneigenschaften] *Es gelte $i \leftrightsquigarrow j$. Dann gilt: ist i vergänglich, dann ist auch j vergänglich. Ist i rekurrent, dann ist auch j rekurrent.*

Beweis von Satz 4.9: Seien i und j so, dass $i \leftrightsquigarrow j$. Dann existieren k, l, sodass $p_{ij}^{(k)} > 0, p_{ji}^{(l)} > 0$. Wenn man die Chapman-Kolmogoroff Ungleichung zwei mal anwendet, erhält man $\forall n \geq 0$:

$$p_{ii}^{(k+l+n)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)}. \tag{4.2}$$

Sei i vergänglich. Dann gilt wegen Korollar 4.8: $\sum_n p_{ii}^{(k+l+n)} < \infty$. Wegen (4.2) muss aber auch gelten

$$\sum_n p_{jj}^{(n)} < \infty.$$

Wegen Korollar 4.8 ist damit auch j vergänglich. Der Fall i rekurrent ist als Übungsaufgabe zu lösen.

□

Wir können mit Hilfe von Satz 4.9 bereits intuitiv einfache Fälle mathematisch exakt untersuchen: Sei X_n eine Markovkette auf den Zahlen $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$. Es gelte $p_{00} = p_{10,10} = 1$. Für $i \in \{1, \ldots, 9\}$ gelte: $p_{i,i-1} = p = (1 - p_{i,i+1}) \in (0, 1)$. Aufgabe:

a) Bestimme alle Kommunikationsklassen

b) Welche sind rekurrent, welche transient und warum?

Obiges Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 4.10 [Rekurrenz/Transienz bei abgeschlossenen/offenen Klassen] *Sei K eine Kommunikationsklasse. Dann gelten:*

a) Wenn K nicht abgeschlossen ist, muss K vergänglich sein.

b) Wenn K abgeschlossen ist und nur endlich viele Zustände enthält, dann ist K rekurrent.

Beweis von Satz 4.10: a) ist als Übungsaufgabe zu lösen.

b) Œ bezeichnen wir die Elemente von K mit $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Sei $M_i := \sum_n I[X_n = i], 1 \leq i \leq m$. Wir nehmen (Widerspruchsansatz) an, K sei vergänglich. Dann gilt wegen Satz 4.7 a): $P_1[M_i < \infty] = 1 \, \forall \, 1 \leq i \leq m$. Also gilt auch

$$P_1[\sum_{i=1}^{m} M_i < \infty] = 1. \tag{4.3}$$

Aber

$$\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \geq 1} I[X_n = i] = \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{m} I[X_n = i]. \tag{4.4}$$

$1 \in K$ und K ist abgeschlossen. Damit muss gelten $P_1[X_n \in K] = 1 \, \forall n$. Wir haben damit

$$P_1\left[\sum_{i=1}^{m} I[X_n = i] = 1\right] = P_1[I[X_n \in K] = 1] = 1 \, \forall n \geq 0.$$

Damit gilt aber wegen (4.4) auch

$$P_1[\sum_{i=1}^{m} M_i = \infty] = P_1[\sum_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{m} I[X_n = i] = \infty] = P_1[\sum_{n\geq 1} 1 = \infty] = 1,$$

im Widerspruch zu (4.3).

□

Vier Beispiele

1. Letztes Beispiel vor Satz 4.10 wieder besucht: Wir können jetzt sofort entscheiden, dass die "mittlere" Klasse $\{1, 2, \ldots, 9\}$ wegen Satz 4.10 a) vergänglich sein muss.

2. Betrachten eine Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Sei $p_{01} > 0$ und genauso $p_{10,9} > 0$ sowie $p_{00} = 1 - p_{01}$ und $p_{10,10} = 1 - p_{10,9}$. Weiter gelte $p_{i,i+1} = (1 - p_{i,i-1}) \in (0, 1)$ für $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Dann bildet die Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ eine einzige, abgeschlossene Kommunikationsklasse und wegen Satz 4.10 b) ist diese Markovkette rekurrent.

3. Betrachten eine Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Sei $p_{00} = 1$. Weiter gelte $p_{i,i+1} = (1 - p_{i,i-1}) \in (0, 1)$ für $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann bildet die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ eine nicht-abgeschlossene Kommunikationsklasse und wegen Satz 4.10 a) ist diese Markovkette vergänglich.

Im Übrigen wird die Markov-Kette je nach konkreten Werten der p_{ij} entweder eher in 0 absorbiert (dann ist die "Drift nach links" relativ stark (in den p_{ij})), oder eher nach ∞ verreisen (dann ist die "Drift nach rechts" vorherrschend (in den p_{ij})). Der hypothetische Fall, dass der Prozess unendlich lange so zwischen z.B. 100 und 550 herumpendelt, ist intuitiv deshalb unmöglich, weil wir immer $p_{i,i-1} > 0$ haben. Das heisst, dass man irgendwann mal zufälligerweise nach 0 kommt (und dort steckenbleibt). Die einzige Möglichkeit der 0 zu entfliehen, ist diejenige nach ∞. Dazu müssen aber die p_{ij} "stimmen". Im nächsten Beispiel werden wir einen Fall betrachten, wo wir dies noch genauer angeben können.

4.

Im letzten Beispiel betrachten wir wieder eine Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Seien jetzt aber für alle $i \geq 0$ $p_i := p_{i,i+1} > 0$ und $q_i := p_{i0} > 0$ und $p_i + q_i = 1$. Wir haben also eine einzige, unendliche, abgeschlossene Klasse. *Das heisst aber nicht, dass die Markovkette rekurrent sein muss: Sie kann ja immer noch nach ∞ abdriften (vgl. Definition von rekurrent)!* Wir wollen diese Markov-Kette auf Rekurrenz/Transienz untersuchen: Dazu müssen wir laut Definition 4.6 (und mit Hilfe von Satz 4.9) den Ausdruck

$$F_{00} = P_0[\cup_{n\geq 1}\{X_n = 0\}]$$

untersuchen. Wir haben (Einsatz von WTS-Lemma 1.8 im 3. Gleichheitszeichen)

$$\begin{aligned}
1 - F_{00} &= P_0[\cap_{n\geq 1}\{X_n \neq 0\}] \\
&= P_0[X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_n = n, \ldots] \\
&= \lim_{n\to\infty} P_0[X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_n = n] \\
&= \lim_{n\to\infty} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots p_{n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j).
\end{aligned}$$

Es gilt aber (kleine, freiwillige Analysis-Übung):

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_j) \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j = \infty \\ > 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j < \infty. \end{cases}$$

Also haben wir Rekurrenz falls $\sum_{j\geq 0} q_j = \infty$ und Transienz falls $\sum_{j\geq 0} q_j < \infty$.

Definition 4.11 [Periode, aperiodisch] *Sei* $i \in \mathbb{Z}^+, L_i := \{n \geq 1 | p_{ii}^{(n)} > 0\}, d_i := ggT(L_i) \geq 1$. d_i *heisst Periode von* i. *Bei* $d_i = 1$ *sprechen wir von aperiodisch.*

Satz 4.12 [Periodizität ist eine Klasseneigenschaft] *Gilt* $i \leftrightsquigarrow j$, *so gilt* $d_i = d_j$.

Beweis von Satz 4.12: Wir finden ein $m \geq 1$ und ein $k \geq 1$, sodass $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(k)} > 0$. Damit haben wir wegen der Chapman-Kolmogoroff Ungleichung auch $p_{ii}^{(m+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(k)}$. Somit ist $(m+k) \in L_i$ und damit gilt $d_i | (m+k)$. Es gilt auch

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(k)} \, \forall n.$$

Der Term $p_{ii}^{(m+k+n)}$ ist jedoch gleich 0, wenn $d_i \not| (m+k+n)$, das heisst $d_i \not| n$. Wenn also $d_i \not| n$, dann muss gelten $p_{jj}^{(n)} = 0$. Also ist $L_j \subseteq d_i \mathbb{N}$, also $d_j \geq d_i$. Aus Symmetriegründen muss aber auch gelten $d_i \geq d_j$, und damit $d_i = d_j$.

□

Lemma 4.13 [aperiodisch, dann werden alle $p_{ii}^{(n)} > 0$**]** *Sei* i *ein aperiodischer Zustand. Dann gilt* $p_{ii}^{(n)} > 0$ *für alle* n *genügend gross.*

Beweis von Lemma 4.13: als freiwillige Übung; mehr Algebra als WT!

□

Endlicher Zustandsraum: Perron-Frobenius und seine Konsequenzen

In diesem Abschnitt (bis und ohne Teil 4.2) sei P stets aperiodisch und irreduzibel und der Zustandsraum endlich.

Wir haben in Teil 3.2 gelernt, wie wir $P_\lambda[X_1 = i]$ berechnen können, wo λ die Startverteilung ist. Es gilt:

$$P_\lambda[X_1 = i] = (\lambda^t P)_i.$$

Wir erhielten weiter

$$P_\lambda[X_n = i] = (\lambda^t P^n)_i.$$

Wir werden uns oft die Frage stellen, wie sich diese Markov-Kette verhält, wenn n sehr gross ist (gegen ∞ strebt). Im Spezialfall eines endlichen Zustandsraums ist diese Frage wesentlich einfacher als im allgemeinen Fall. Man kann sich des Satzes von Perron-Frobenius bedienen:

Satz 4.14 [Satz von Perron-Frobenius] *Sei P eine Übergangsmatrix einer aperiodischen, irreduziblen Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum. Dann ist 1 der grösste Eigenwert (mit Multiplizität 1). Die dazugehörenden Links- und Rechts-Eigenvektoren haben strikt positive Koordinaten. Alle anderen Eigenwerte haben Absolutbetrag < 1.*

Beweis: Bücher aus der Linearen Algebra.

□

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass man Matrizen der Form P^n am besten mit dem Ansatz

$$P = S^{-1}\Lambda S$$

darstellt, wo Λ eine geeignete Form hat (Diagonalgestalt oder sonst Jordan-Normalform). Wir zeigen hier die Konsequenzen auf für den Fall, dass Λ Diagonalgestalt hat und S orthonormal ist (der allgemeine Fall ist in Cox & Miller, The Theory of Stochastic Processes

(1965, p. 118 ff.) beschrieben). Da die Zeilen von P auf 1 summieren, ist übrigens der Vektor $\mathbf{1}$ sicher rechter Eigenvektor (zum Eigenwert 1):

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Jeder Eigenwert ist immer Links- & Rechts-Eigenwert. Sei μ der Links-Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir haben also

$$\mu^t = \mu^t P.$$

Wenn wir also mit diesem μ als Start-Verteilung starten, dann ist die Verteilung nach einem Schritt immer noch μ. Auch nach n Schritten wird die Verteilung auf den *endlich vielen* Zuständen gleich μ sein. μ ist eine sogenannte Gleichgewichts-Verteilung (mehr dazu in Kapitel 6). Was geschieht aber, wenn wir *nicht* mit dieser Verteilung starten? Λ^n wird geometrisch für wachsendes n gegen eine Matrix konvergieren, deren einziger Eintrag an der Stelle (1,1) eine 1 (der grösste Eigenwert) sein wird. Alle anderen Einträge sind entweder von Anfang an 0 oder konvergieren wegen Satz 4.14 geometrisch gegen 0. Wenn wir also einen Ausdruck der Art

$$(\lambda^t P^n)$$

berechnen wollen, erhalten wir (weil μ^t die erste Zeile von S und $\mathbf{1}$ die erste Spalte von S^{-1} ist und die Komponenten von λ auf 1 summieren):

$$(\lambda^t P^n) = \mu^t + O(c^n \mathbf{1}^t),$$

wo $|c| < 1$ (dies als kleine Übung in Matrizenmultiplikation bitte nachrechnen). Also konvergiert die Verteilung (wo ist die Markov-Kette zur Zeit n?) gegen diese Gleichgewichts-Verteilung, egal wie wir starten. In obiger Gleichung ist auch inbegriffen:

$$p_{ij}^{(n)} = \mu_j + O(c^n)\,\forall i.$$

Damit ist der Fall endlicher, aperiodischer und irreduzibler Markov-Ketten diesbezüglich abgeschlossen. Wir kommen in Kapitel 6 zum Fall des unendlichen Zustandsraumes.

4.2 Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^n$

In 3.1.1 haben wir Fragen aufgeworfen, welche wir jetzt beantworten können. Es geht in 4.2 um die Frage, ob die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^n$ rekurrent oder transient ist. Wir behandeln hier, wie im Titel angedeutet, bis auf einen kurzen Abstecher in 4.2.1 nur die *symmetrische* Irrfahrt. Falls die Irrfahrt nicht symmetrisch ist, haben wir eine Drift nach ∞ bzw. $-\infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

4.2.1 Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist rekurrent

(X_i) sei eine i.i.d.-Folge von Zufallsgrössen mit $p := P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$. Wir definieren $S_0 := 0$ und $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$. Es gilt im Übrigen (dies brauchen wir jetzt nicht) $E[S_k] = 0$ für alle $k \geq 0$ und $V[S_k] = k$; $sd[S_k] := \sqrt{V[S_k]} = \sqrt{k}$.

Wir wollen Korollar 4.8 anwenden. Wegen Satz 4.9 ist Rekurrenz eine Klasseneigenschaft. Wir können also den Startwert beliebig auf $\mathbb{Z}$ wählen und nehmen 0. Es gilt hier $p_{00}^{(2m+1)} = 0$ für alle m, da diese Markov-Kette Periode 2 hat. Wir haben

$$p_{00}^{(2m)} = p^m(1-p)^m \binom{2m}{m}.$$

Wegen der Stirling-Formel ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$) haben wir

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{m\pi}}.$$

Damit erhalten wir asymptotisch:

$$p_{00}^{(2m)} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} 2^{2m} \sqrt{m\pi}^{-1}$$

und damit

$$\sum_{m\geq 1} p_{00}^{(m)} \sim \sum_{m\geq 1} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} = \infty.$$

Also ist der symmetrische Random Walk auf $\mathbb{Z}$ rekurrent. Wegen Satz 4.7 b) kommt man mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft nach 0 zurück (egal wo man startet (2. Teil von Satz 4.7 b))). Wie lange es dauert, bis man zurückkommt, werden wir in Kapitel 5 untersuchen (es dauert durchschnittlich unendlich lange!).

Wir zeigen noch schnell, dass wir für $p \neq 0.5$ Transienz haben:

$$p_{00}^{(2m)} \sim p^m(1-p)^m 2^{2m} \sqrt{m\pi}^{-1} = \sqrt{\frac{1}{m\pi}} \exp(m(2\ln 2 + \ln p + \ln(1-p))) = \sqrt{\frac{1}{m\pi}} e^{cm},$$

wo $c := 2\ln 2 + \ln p + \ln(1-p)$. Eine Auswertung mit Analysis I zeigt sofort, dass dieses c an der Stelle $p = 0.5$ das Maximum von 0 annimmt und bei $p \neq 0.5$ negativ ist. Damit haben wir

$$\sum_{m \geq 1} p_{00}^{(m)} \sim \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} e^{cm} < \infty.$$

Also haben wir in dem Fall ($p \neq 0.5$) Transienz. Diese Irrfahrt kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft bei 0 vorbei (Satz 4.7)!

Insgesamt haben wir also bewiesen:

Satz 4.15 [Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist rekurrent] *a) Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist rekurrent. Jeder Punkt in $\mathbb{Z}$ wird mit Wahrscheinlichkeit 1 ∞ oft besucht.*

b) Die nicht-symmetrische Irrfaht auf $\mathbb{Z}$ ist transient. Jeder Punkt in $\mathbb{Z}$ wird mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft besucht.

Wir fügen noch weitere Resultate (z.T. ohne Beweise) hinzu. Man findet Sie in jedem Buch über Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse. Resultat (4.5) nennt man das *Gesetz des iterierten Logarithmus.*

Wir haben oben gesehen, dass die symmetrische Irrfahrt in einer Dimension rekurrent ist (also immer wieder nach 0 zurückkommt). Wie stark schwankt dieses S_k um seinen Erwartungswert 0? Theoretisch ist für S_k jeder Wert im Intervall $[-k, +k]$ möglich. Die Ränder $-k$ und k sind jedoch totale Extremfälle. Die Varianz von S_k ist k. Dies ist jedoch ein quadratisches Mass. Die Standardabweichung $sd[S_k]$ ist gleich $\sqrt{k}$. Man wird asymptotisch mit konstanter Wahrscheinlichkeit Werte in z.B. $[-2\sqrt{k}, +2\sqrt{k}]$ erhalten (CLT). Falls wir S_k durch $\sqrt{k}$ teilen, erhalten wir offenbar einen Ausdruck,

$$\frac{S_k}{\sqrt{k}},$$

dessen Varianz (und Standardabweichung) konstant ist. Mit dieser Aussage wollen wir uns aber nicht zufrieden geben. Es gelten noch folgende Aussagen (ohne Beweise; es gelten auch die analogen Resultate gespiegelt an die x-Achse):

$$P[\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{k}\sqrt{2\log\log k}} = 1] = 1 \tag{4.5}$$

und

$$P[\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{\sqrt{k}} = \infty] = 1. \tag{4.6}$$

(4.5) besagt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 die Trajektorien von (S_k) mit $\epsilon > 0$ einerseits unendlich oft über der Grenze von $(1-\epsilon)\sqrt{k}\sqrt{2\log\log k}$ sind und mit Wahrscheinlichkeit 0 unendlich oft über der Grenze von $(1+\epsilon)\sqrt{k}\sqrt{2\log\log k}$.

(4.6) besagt, dass die Trajektorien von (S_k) mit Wahrscheinlichkeit 1 ∞ oft die Kurven $\pm b\sqrt{k}$ schneiden für $b > 0$ beliebig.

Weiter haben wir mit Satz 4.15 auch (für den einfachsten Fall - es gibt Verallgemeinerungen, siehe unten) den Beweis, dass eine Versicherung, welche nach dem Äquivalenzprinzip arbeitet (Prämie = erwarteter Schaden plus Administrationskosten) mit Wahrscheinlichkeit 1 Bankrott geht (sog. Ruin-Wahrscheinlichkeit). Die mathematische Formalisierung geht folgendermassen: pro Periode gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 50 %, dass ein Schaden von 2 Milliarden Franken entsteht und sonst passiert nichts. Wenn wir Zinsen und Administrationskosten vernachlässigen, sollte deshalb die Prämie pro Jahr 1 Milliarde sein. Damit geht das Vermögen der Versicherung mit 20 Milliarden Startkapital und keinen anderen Geschäften pro Jahr mit 50 % Wahrscheinlichkeit um 1 Milliarde nach oben (Prämie erhalten aber kein Schadenfall) und mit 50 % Wahrscheinlichkeit um 1 Milliarde nach unten (Prämie erhalten aber Schadenfall). Diese Versicherung geht wegen Satz 4.15 a) sicher Bankrott.

Eine Verallgemeinerung obiger Aussage folgt aus Seite 233, Theorem 6.3.1, T. Rolski et al, Stochastic Processes for Insurance and Finance, Wiley, 1998: Wenn $(X_i)_{i\geq 1}$ iid, $E[X_i] = 0, P(X_i = 0) < 1$, dann haben wir bereits Ruin-Wahrscheinlichkeit 1, unabhängig vom Startwert.

4.2.2 Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ ist rekurrent

Wir werden ab dieser Dimension nur noch die symmetrische Irrfahrt behandeln. Es ist wegen Satz 4.15 intuitiv klar, dass man in höheren Dimensionen bei nicht vorhandener Symmetrie erst Recht Transienz haben wird. Man betrachtet dazu einfach eine Projektion auf die eine Achse. Damit eine zweidimensionale Irrfahrt wieder nach $(0,0)$ zurückkommt, muss sie ja in beiden Dimensionen gleichzeitig zurück sein. Wenn Sie in einer Dimension bereits transient ist, dann erst recht in beiden.

Beim Random Walk (RW) in 2 Dimensionen sind die Übergänge derart, dass mit Wahrscheinlichkeit je 1/4 einer der folgenden Übergänge stattfindet:

$$(i,j) \to (i+1,j),$$

$$(i,j) \to (i-1,j),$$

$$(i,j) \to (i,j+1),$$

$$(i,j) \to (i,j-1).$$

Eine Koordinate ist also immer fest und die andere wird wechseln. Wir wollen 2 unabhängige RW haben. Dazu führen wir neue Koordinaten ein:

Diese beiden RW's auf dem neuen Koordinatensystem lassen wir unabhängig "laufen". Dann haben wir z.B. den Punkt (1,0) in den alten Koordinaten genau dann, wenn beide RW's auf den neuen Koordinaten je einen Schritt von 0 nach 1 gehen. Dies mit Wahrscheinlichkeiten von je 1/2, also wegen der Unabhängigkeit gibt das genau 1/4; dies wollten wir ja auch.

Damit haben wir von 4.2.1:

$$p^{(2m)}_{(0,0)(0,0)} = (p^{(2m)}_{00})^2 \sim \frac{1}{\pi m}.$$

Damit gilt aber

$$\sum_{m\geq 1} p^{(2m)}_{(0,0)(0,0)} \sim \sum_{m\geq 1} \frac{1}{\pi m} = \infty.$$

In 2 Dimensionen ist der RW also wegen Korollar 4.8 auch rekurrent.

4.2.3 Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$ ist transient

Beim symmetrischen RW in 3 Dimensionen wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/6 in genau einer Dimension entweder um 1 inkrementiert oder um 1 dekrementiert. Wir werden jetzt nicht auf die Resultate in kleineren Dimensionen direkt zugreifen, obschon auf den ersten Blick die Konvergenz von

$$\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^{3/2}}$$

gerade hierzu einlädt. Stattdessen spalten wir den gesamten Prozess nach der Anzahl vertikaler Schritte auf: Wir wollen $p^{(2m)}_{\underline{0}\,\underline{0}}$ berechnen, wo $\underline{0} := (0,0,0)$. Sei $2n$ die Anzahl vertikaler Schritte (es verbleiben noch $2m-2n$ Schritte für die Schritte in der xy-Ebene). Die Anzahl vertikaler Schritte ist eine $Bin(2m, 1/3)$-Zufallsgrösse. Wir wollen dazu zuerst eine Abschätzung erarbeiten. Sei also M eine $Bin(2m, 1/3)$-Zufallsgrösse. Es gilt: $E[M] = 2m/3$ (das "np") und $V[M] = 4m/9$ (das "$np(1-p)$" oder "npq"). Wegen (WTS-5.1) haben wir

$$P[|M - \frac{2m}{3}| \geq \frac{m}{6}] \leq \frac{1}{(m/6)^2}\frac{4m}{9} =: K_1\frac{1}{m}. \tag{4.7}$$

Es gilt mit den Resultaten von 4.2.1 und 4.2.2 und FTW:

$$p^{(2m)}_{\underline{0}\,\underline{0}} \sim \sum_{n=1}^{m} K\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{m-n} \vee 1)P[Bin(2m, 1/3) = 2n]. \tag{4.8}$$

Wir wollen jetzt mit Hilfe von (4.7) (4.8) zerlegen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} K\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{m-n}\vee 1\Big)P[Bin(2m,1/3)=2n] &\leq K_1\frac{1}{m}K\max_{1\leq n\leq m/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{m-n}\Big)\\ &+K\max_{m/2\leq n\leq 5m/6}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{m-n}\Big)\\ &+K_1\frac{1}{m}K\max_{5m/6\leq n\leq m}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{m-n}\vee 1\Big)\Big)\\ &\leq K_2 m^{-3/2}.\end{aligned}$$

Wir haben dazu (4.8) folgendermassen zerlegt:

Wegen Korollar 4.8 ist die Irrfahrt in 3 Dimensionen damit transient.

4.2.4 Die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 4$, ist transient

Man betrachtet für diesen "Beweis" einfach nur die ersten 3 Dimensionen. Denn damit der RW in allen Dimensionen zurückkommt (gleichzeitig!), muss er auch in den ersten 3 Dimensionen zurückkommen. In 3 Dimensionen ist der RW aber transient, also auch in mehr als 3 Dimensionen.

4.2.5 Ausblick auf die Brownsche Bewegung

Wir werden in Kapitel 17 ohne Beweise die entsprechenden Resultate für die sogenannte Brownsche Bewegung (BB) besprechen. Nur soviel sei jetzt schon gesagt: die BB ist ein Prozess mit kontinuierlichem Zustandsraum $\mathbb{R}^k$. Wenn $k \geq 2$, ist es intuitiv kaum wahrscheinlich, dass ein Prozess exakt an den selben Ort zurückkehrt. Man wird also die Definition von Rekurrenz/Transienz in abzählbaren Zustandsräumen und in kontinuierlichen Zustandsräumen auseinanderhalten müssen: in kontinuierlichen Zustandsräumen wird rekurrent heissen, dass der Prozess in einen beliebig kleinen Ball z.B. um den Ursprung wieder zurückkehren wird. Dann haben wir analoge Resultate wie jetzt in Kapitel 4.2. Mehr dazu und genauere Ausformulierung folgen in Kapitel 17.