Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

5 Treffwahrscheinlichkeiten und erwartete Zeit bis zur Absorption

Multiplikation von Links!

Literatur Kapitel 5

* Grimmett & Stirzaker: Kapitel 6.3 (Übungen)

* Krengel: § 15.4

Wir werden in diesem Kapitel lineare Rekurrenzgleichungen erhalten (das Wort rekurrent hat hier nichts mit der Rekurrenz von Markov-Ketten zu tun!). Wir wollen solche Gleichungen lösen können. Deshalb werden wir in 5.1 zuerst die notwendige Theorie aus der Analysis ohne Beweise vorausschicken.

5.1 Lineare Rekurrenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Rekurrenzgleichung $k-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine Gleichung des Typs

$$f_{n+k} = a_1 f_{n+k-1} + a_2 f_{n+k-2} + \ldots + a_k f_n + b_n. \tag{5.1}$$

Dabei muss gelten: $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, die a_i sind konstant, unabhängig von n, $a_k \neq 0$, $n \geq 0$. Falls $b_n = 0$ nennen wir diese Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*. $f_1, \ldots, f_k$ nennen wir die Anfangsbedingungen.

Kochrezept I:

Wir definieren weiter für $z \in \mathbb{C}$:

$$p(z) := z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \ldots - a_{k-1} z - a_k, \tag{5.2}$$

und nennen dies das *charakteristische Polynom* von (5.1), wobei b_n nicht einfliesst. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_t$, $t \leq k$, die paarweise verschiedenen charakteristischen Wurzeln von $p(z) = 0$ mit Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, wo $\sum_{i=1}^t \alpha_i = k$. Wir haben also

$$p(z) = \Pi_{i=1}^t (z - z_i)^{\alpha_i}.$$

Dann gilt

Satz 5.1 [Lösung einer homogenen, linearen Rekurrenzgleichung] *Die allgemeine Lösung der Gleichung (5.1) mit $b_n = 0, a_k \neq 0$ hat folgende Form (es existieren keine weiteren)*

$$f_n = \sum_{s=1}^{t} z_s^n \sum_{m=0}^{\alpha_s - 1} c_{sm} n^m,$$

wobei c_{sm} $(s = 1, \ldots, t; m = 0, 1, \ldots, \alpha_s - 1)$ beliebige Konstanten sind, welche mit den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Beweis: Analysis-Bücher

□

Kochrezept II:

Wir wenden uns jetzt dem Fall $b_n \neq 0$, und damit dem inhomogenen Fall zu. Das Vorgehen erinnert an die Lösung von Differentialgleichungssystemen: "homogene + spezielle Lösung". Zuerst ein paar Vorbereitungen:

$$f_{n+k} = a_1 f_{n+k-1} + \ldots + a_k f_n \tag{5.3}$$

$$f_{n+k} = a_1 f_{n+k-1} + \ldots + a_k f_n + b_n, b_n \neq 0. \tag{5.4}$$

Wir inkrementieren jetzt in (5.3):

$$f_{n+k+1} = a_1 f_{n+k} + \ldots + a_k f_{n+1}. \tag{5.5}$$

Wir subtrahieren jetzt (5.3) von (5.5) und bringen alles auf eine Seite:

$$f_{n+k+1} - (1 + a_1) f_{n+k} + (a_1 - a_2) f_{n+k-1} + \ldots + (a_{k-1} - a_k) f_{n+1} + a_k f_n = 0.$$

Wir definieren

$$W(z) := z^{k+1} - (1 + a_1)z^k + (a_1 - a_2)z^{k-1} + \ldots + (a_{k-1} - a_k)z + a_k.$$

Es gilt $W(1) = 0$. Des weiteren haben wir

$$W(z) = p(z)(z-1) =: \phi(z)(z-1)^{\alpha+1},$$

wobei α so ist, dass $\phi(1) \neq 0$, also $p(z) = (z-1)^\alpha \phi(z)$. Dann gilt

Satz 5.2 [Lösung einer inhomogenen, linearen Rekurrenzgleichung] *Die allgemeine Lösung der Gleichung (5.4) mit $b_n \neq 0, a_k \neq 0$ hat folgende Form (es existieren keine weiteren)*

$$f_n = g_n + \frac{b_n n^\alpha}{\phi(1)\alpha!},$$

wobei g_n die allgemeine Lösung von (5.3) darstellt.

Beweis: Analysis-Bücher

$\square$

5.2 Treffwahrscheinlichkeiten

Wir kommen jetzt zu einer Urfrage der Theorie von Markov-Ketten. Sei X_n eine Markovkette auf den Zahlen $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$. Es gelte $p_{00} = p_{10,10} = 1$. Für $i \in \{1, \ldots, 9\}$ gelte: $p_{i,i-1} = p = (1 - p_{i,i+1}) \in (0, 1)$. Offenbar sind die Zustände 0 und 10 absorbierend. Man kann sich jetzt fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, in 0 absorbiert zu werden.

* Diese Wahrscheinlichkeit ist offenbar vom Startwert abhängig.
* Es ist zudem klar, dass man mit Wahrscheinlichkeit 1 (0) in 0 absorbiert wird, wenn man in 0 (10) startet.
* Die folgenden 2 Fragestellungen sind mathematisch das gleiche Problem: 1. in obigem Modell die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit einer Absorption in 0 ist und 2. falls 0 und 10 nicht mehr absorbierend die Frage, ob man *zuerst* in 0 oder in 10 vorbeikommt.

Sei $y_i := P_i[\cup_{n\geq 1}\{X_n = a\}]$ die Wahrscheinlichkeit, dass X_n im **a**bsorbierenden Zustand a absorbiert wird, gegeben wir starten in i. Dann gilt der folgende

Satz 5.3 [Treffwahrscheinlichkeiten] *Die Grössen $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ erfüllen die folgenden Bedingungen:*
1. $0 \leq y_i \leq 1\,\forall i$
2. $y_a = 1$
3. $Py = y$
und y ist der minimale Vektor, der 1., 2. und 3. erfüllt, d.h.: wenn y' auch 1., 2. und 3. erfüllt, dann gilt $y'_i \geq y_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}^+$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass unser Vektor y diese Bedingungen erfüllt und dann zeigen wir die Minimalität. Die Forderungen 1. und 2. sind klar. Für 3. erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_i &= P[\cup_{n\geq 1}\{X_n = a\}|X_0 = i] \\
&= \sum_j P[\cup_{n\geq 1}\{X_n = a\}|X_0 = i, X_1 = j]P[X_1 = j|X_0 = i] \\
&= \sum_j y_j p_{ij} \\
&= \sum_j p_{ij} y_j.
\end{aligned}$$

Minimalität:

Sei y' eine weitere Lösung (solche gibt es in der Tat, z.B. $y'_i = 1\,\forall i$). Wegen 3. muss gelten:

$$y' = Py' = P^2 y' = \ldots = P^n y' \;\forall n,$$

und damit auch

$$y'_i = \sum_j p_{ij}^{(n)} y'_j \geq p_{ia}^{(n)} y'_a = p_{ia}^{(n)} = P_i[X_n = a] = P_i[\cap_{m\geq n}\{X_m = a\}]. \tag{5.6}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt daraus, dass Zustand a absorbierend ist. Diese $A_n := \cap_{m\geq n}\{X_m = a\}$ sind mit n gegen ∞ eine aufsteigende Folge von Ereignissen. Das Ereignis $A := \cup_{n\geq 1} \cap_{m\geq n} \{X_m = a\}$ ist das Ereignis, dass der Prozess in a absorbiert wird. Mit WTS-Lemma 1.8 können wir folgern, dass

$$P_i[A] = \lim_{n\to\infty} P_i[A_n]. \tag{5.7}$$

Von (5.6) haben wir $y'_i \geq P_i[A_n]\,\forall n$, wir erhalten mit (5.7)

$$y'_i \geq P_i[A] = y_i.$$

□

Wir wollen das eingangs erwähnte Beispiel mit Hilfe von Satz 5.1 untersuchen: Die Randbedingungen vorerst nicht beachtend, erhalten wir entsprechend (5.1) vorerst die Gleichung ($q := 1 - p$)

$$y_i = py_{i-1} + qy_{i+1}.$$

Wir wollen Sie noch komplett in die Form (5.1) bringen und formen deshalb um zu:

$$y_{n+2} = \frac{1}{q} y_{n+1} - \frac{p}{q} y_n.$$

Wir haben also $k = 2, a_1 = 1/q, a_2 = -p/q$. Für (5.2) erhalten wir

$$z^2 - \frac{1}{q} z + \frac{p}{q} = 0.$$

Wir behandeln hier nur den Fall $p \neq 0.5$; der Fall $p = 0.5$ ist als Übungsaufgabe zu lösen. Wegen $p + q = 1$ erhält man (mit Vielfachheiten 1) $z_1 = 1$ und $z_2 = p/q$. Aus Satz 5.1 folgt, dass die allgemeine Lösung von der Form

$$y_i = A + B(p/q)^i$$

ist. Die A, B muss man jetzt mit den Randbedingungen herausfinden: Wegen $y_0 = 1$ (a ist gleich 0 in obigem Beispiel) muss gelten $A + B = 1$. Des weiteren muss ja $y_{10} = 0$ sein. Damit erhalten wir

$$y_i = 1 - \frac{(p/q)^i - 1}{(p/q)^{10} - 1} \in [0, 1].$$

Dies ist auch die einzige Lösung (wegen Satz 5.1); eine Untersuchung der Minimalität erübrigt sich deswegen.

5.3 Erwartete Zeit bis zur Absorption

Satz 5.3 gibt uns eine Antwort auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, wo eine Markov-Kette allenfalls absorbiert wird. Wir wissen aber überhaupt nicht, wie lange dies allenfalls dauern wird. Eine Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 5.4 [Erwartete Zeit bis zur Absorption] *Sei I ($|I| \geq 1$) absorbierend und $N := \inf\{n \geq 0 : X_n \in I\} \leq \infty$. Wir schreiben $e_k := E[N|X_0 = k]$ ($\leq \infty$). Dann ist der Vektor e die minimale Lösung von*

1. $0 \leq e_k \leq \infty \, \forall k$
2. $e_I = 0$
3. $e_k = 1 + \sum_j p_{kj} e_j \, \forall k \notin I$.

Beweis von Satz 5.4 Wieder sind Bedingungen 1. und 2. klar. Es bleibt 3. und die Minimalität. Für $k \notin I$ haben wir:

$$\begin{aligned}
e_k &= E[N|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[N|X_0 = k, X_1 = j] P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[N|X_1 = j] P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[N + 1|X_0 = j] P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= \sum_j (e_j + 1) p_{kj} \\
&= 1 + \sum_j p_{kj} e_j.
\end{aligned}$$

Minimalität:

Dies ist keine leere Forderung: $e_I = 0, e_k = \infty, \forall k \notin I$, ist meist auch eine Lösung!

Wir müssen hierzu zuerst eine ganze Folge von Vektoren $e^{(n)}$ definieren:

$$e_k^{(n)} := E[\min(N, n)|X_0 = k], \, \forall k, \, \forall n \geq 0.$$

Der Vorteil der $e^{(n)}$ ist deren Beschränktheit. Es gilt weiter: $e_k^{(0)} = 0\,\forall k$ und $e_I^{(n)} = 0\,\forall n$. Die $e_k^{(n)}$ sind monoton wachsend in n. Wegen des Monoton-Konvergenzsatzes für Erwartungswerte (WT-Satz 4.7 (Beppo Levi)) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} e_k^{(n)} = e_k \leq \infty. \tag{5.8}$$

$e^{(n)}$ ist (mit einer kleinen Korrektur) auch Lösung von Bedingungen 1., 2. und 3: 1. und 2. sind offenbar erfüllt; für 3. erhalten wir für $k \notin I$:

$$\begin{aligned}
e_k^{(n+1)} &= E[\min(N, n+1)|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[\min(N, n+1)|X_0 = k, X_1 = j]P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[\min(N, n+1)|X_1 = j]P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= \sum_j E[1 + \min(N, n)|X_0 = j]P[X_1 = j|X_0 = k] \\
&= 1 + \sum_j p_{kj} e_j^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3'.}$$

Erst nach diesen Vorbereitungen betrachten wir jetzt eine weitere Lösung e' der Bedingungen 1., 2. und 3. Wir werden jetzt zeigen, dass $e'_k \geq e_k^{(n)}$ für alle k, n. Wegen (5.8) sind wir dann fertig. Wir nehmen induktiv an, dass für alle $0 \leq r \leq n$ immer gilt: $e'_k \geq e_k^{(r)}$. Die Induktionsverankerung ist wegen $e_k^{(0)} = 0\,\forall k$ vorhanden. Für $k \notin I$ haben wir wegen (3'.)

$$\begin{aligned}
e_k^{(n+1)} &= 1 + \sum_j p_{kj} e_j^{(n)} \\
&\leq 1 + \sum_j p_{kj} e'_j \\
&= e'_k
\end{aligned}$$

Der zweitletzte Schritt ist der Induktionsschritt und der letzte Schritt ist, dass e' selber eine Lösung ist.

$\square$

Ein paar Beispiele

1. Wenn wir jetzt naiv wieder das gleiche Beispiel wie im Teil 5.2 untersuchen wollen, erleben wir eine "böse" Überraschung (?). Sei dazu nochmals X_n eine Markovkette auf den Zahlen $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$. Es gelte $p_{00} = p_{10,10} = 1$. Für $i \in \{1, \ldots, 9\}$ gelte: $p_{i,i-1} = p = (1 - p_{i,i+1}) \in (0, 1)$. Offenbar sind die Zustände 0 und 10 absorbierend.

Damals fragten wir uns, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, in 0 absorbiert zu werden. Wir könnten uns jetzt fragen, wie gross die erwartete Zeit ist, in 0 absorbiert zu werden. Mit $I = \{0\}$ suchen wir den minimalsten Vektor e, sodass $0 \leq e_k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, 9, 10\}$, $e_0 = 0$ und

$$e_k = 1 + pe_{k-1} + (1-p)e_{k+1} \tag{5.9}$$

für $1 \leq k \leq 9$. Es gilt ganz sicher $e_{10} = \infty$, denn $e_{10} = 1 + e_{10}$ hat nur diese nicht-negative Lösung. Damit müssen alle $e_1, e_2, \ldots, e_9$ wegen (5.9) auch ∞ sein.

2. Nach dieser Erfahrung werden wir oben vielleicht $I = \{0, 10\}$ wählen. In einer Aufgabe ist der Fall $p = 0.5$ zu lösen. Mit Satz 5.2 erhält man im Fall $p \neq 0.5$ die allgemeine Lösung (Randbedingungen noch nicht berücksichtigt):

$$e_k = \frac{k}{2p-1} + A + B(p/(1-p))^k. \tag{5.10}$$

Die Randbedingungen sind hier $e_0 = e_{10} = 0$. Wegen $e_0 = 0$ erhalten wir $A + B = 0$ oder besser $A = -B$. Wegen e_{10} erhalten wir

$$0 = \frac{10}{2p-1} + A + B(p/(1-p))^{10},$$

$$0 = \frac{10}{2p-1} + B[(p/(1-p))^{10} - 1],$$

und damit die Lösung

$$e_k = \frac{k}{2p-1} - \frac{10[(p/(1-p))^k - 1]}{(2p-1)[(p/(1-p))^{10} - 1]}.$$

Wir finden nur eine Lösung, sie ist minimal.

3. Wir werden jetzt in obigem Beispiel den rechten Endpunkt der Kette (10) nach $+\infty$ "schicken". Wir fragen uns mit $I = \{0\}$ nach der erwarteten Zeit bis zur Absorption in 0. Mit $p = 0.5$ haben wir dann eine Hängepartie aus 3.1.1 erledigt: die erwartete Zeit, bis ein Random Walk nach 0 zurückkehrt, haben wir dann auch gleich berechnet.

Sei dazu zuerst $p > 0.5$. Wir können Gleichung (5.10) benutzen. Erstmals werden wir in der Vorlesung die Minimalität voll ausnutzen. Da $A = -B$ immer noch gelten muss, haben wir

$$e_k = \frac{k}{2p-1} + B((p/(1-p))^k - 1).$$

Da $p > 0.5$ ist $((p/(1-p))^k - 1) \geq 0$. B muss damit klein gewählt werden. $B = 0$ liefert uns die kleinste Lösung, ohne Bedingung 1 zu verletzen. Damit gilt im Fall $p > 0.5$

$$e_k = \frac{k}{2p-1}.$$

Die erwartete Zeit bis zur Absorption in 0 nimmt also linear zu!

Sei jetzt $p < 0.5$. Damit driftet der Prozess offensichtlich mit positiver Wahrscheinlichkeit gegen unendlich. Es gilt $e_k = \infty$ für $k \geq 1$. Dies kann man auch mit Minimalitätsüberlegungen von (5.10) weg herleiten (kleine freiwillige Übung).

Interessanter ist der Fall $p = 0.5$. Dies ist ja ein "abgeschnittener", symmetrischer Random Walk. Gemäss Satz 4.15 wird man mit Wahrscheinlichkeit 1 in 0 absorbiert. Wie steht es aber mit der erwarteten Zeit, bis man absorbiert wird? Von Aufgabenblatt 5 her wissen wir, dass die allgemeine Lösung hier von der Form

$$e_i = c_{10} + c_{11} i - i^2$$

ist. Da $e_0 = 0$ ist, haben wir sofort $e_i = c_{11} i - i^2$. Da $e_i \geq 0$ erfüllt sein muss, haben wir zwangsweise $e_i = \infty$ ($c_{11} = \infty$) für alle $i \geq 1$. Mit wenigen Schritten können wir folgern: **Die erwartete Rückkehrzeit eines symmetrischen Random Walks ist damit unendlich!**