Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

7 Kriterien für Rekurrenz und Transienz

In Kapiteln 4 und 6 haben wir diverse Methoden kennengelernt, um herauszufinden, ob eine Markov-Kette (positiv-/null-) rekurrent oder transient ist. Wir fügen jetzt noch 3 Sätze von Foster (1960 und später) und Tweedie (1975) ohne Beweise an.

Satz 7.1 [Hinreichende Bedingung für positive Rekurrenz] *Eine Markov-Kette auf einer abgeschlossenen Klasse ist positiv rekurrent, wenn es eine Funktion*

$$g : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

und ein globales $\delta > 0$ gibt, sodass

1) $E_j[g(X_1)] \leq g(j) - \delta$

für alle $j \notin A$, wobei gelten muss $|A| < \infty$.

2) $E_j[g(X_1)] < \infty$ für $j \in A$.

Interpretation: Man kann diesen Satz am besten verstehen, indem man sich eine Situation vorstellt, in der wir mit der Wahl $g(j) = j$ obige Bedingungen erfüllen können. Wir haben dann nämlich in der ersten Bedingung, dass die Kette im Erwartungswert "langsam" (mit mindestens δ (global!)) gegen 0 tendiert. Es kann zwar eine Ausnahmemenge A geben, doch wird diese nur endlich viele Zustände umfassen. Da positive Rekurrenz eine "langfristige Angelegenheit" ist, werden wir eventuell durch die Zustände in A zwar immer wieder massiv in Richtung ∞ geworfen, aber nur an endlich vielen Stellen. Es gibt also insbesondere ein $a_1 := \min A$ und ein $a_2 := \max A$. Wir haben also folgende Situation:

Ist man einmal in einem Zustand kleiner a_1 angelangt, hat man nur noch die reine Drift aus 1) (ausser man fällt zufälligerweise wieder in einen Zustand in A). Ist man hingegen einmal in einen Zustand grösser a_2 geraten, so wird wieder 1) dafür sorgen, dass man nicht nach ∞ abdriftet. Bedingung 2) garantiert uns, dass wir nicht beliebig weg "Richtung" ∞ kommen.
Das Beeindruckende dieses Satzes ist jedoch, dass ein beliebiges g, welches Bedingungen 1) und 2) erfüllt, bereits reicht!

Beispiele:

1) Misslungener Versuch, mit $g(j) = j$ bei einem Random Walk auf $\mathbb{Z}^+$ mit $p_{01} = 1$, $p_{i,i-1} = 0.4$ und $p_{i,i+1} = 0.6$ für $i \geq 1$ positive Rekurrenz nachzuweisen:

2) Untersuchen Sie mit Satz 7.1, *wann* folgende Markov-Kette positiv rekurrent ist: $p_{i,i-1} = 1$ für $i \geq 1$ und $p_j := p_{0j}$ mit $|\{j : p_j > 0\}| = \infty$.

Satz 7.2 [Hinreichende Bedingung für Null-Rekurrenz oder Transienz] *Eine Markov-Kette auf einer abgeschlossenen Klasse ist null-rekurrent oder transient, wenn es eine Funktion*

$$g : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

gibt, sodass

1)

$$E_j[g(X_1)] \begin{cases} \geq g(j) & \forall j \\ > g(j_0) & \textit{für mindestens einen Zustand } j_0 \end{cases}$$

2) Es existiert ein $\beta \in \mathbb{R}^+$, sodass $E_j[|g(X_1) - g(j)|] \leq \beta < \infty$ für alle j.

Bemerkung: Das Bedingung 2) auch notwendig ist, sieht man in unterem Kontrast-Beispiel.

Kontrast-Beispiel: [Zu zeigen in Übungsblatt 7] Zeigen Sie mit $g(j) = j$ bei einer Markov-Kette auf $\mathbb{Z}^+$ mit $p_{01} = 1$, $p_{i0} = 0.5$ und $p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \geq 1$ positive Rekurrenz. Zeigen Sie auch, dass mit $g(j) = 2^j$ zwar Bedingung 1), nicht aber Bedingung 2) von Satz 7.2 erfüllt ist.

Satz 7.3 [Hinreichende Bedingung für Transienz] *Eine Markov-Kette auf einer abgeschlossenen Klasse ist transient, wenn es eine Funktion*

$$g : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

und ein globales $\delta > 0$ gibt, sodass

1) $E_j[g(X_1)] \geq g(j) + \delta$

für alle $j \notin A$, wobei gelten muss $|A| < \infty$.

2) Es existiert ein $\beta \in \mathbb{R}^+$, sodass $E_j[|g(X_1) - g(j)|^2] \leq \beta < \infty$ für alle j.

Bemerkungen: 1. In Bedingung 2) reicht es bereits, ein $\alpha > 1$ zu finden, sodass $E_j[|g(X_1) - g(j)|^\alpha] \leq \beta < \infty$. Das Bedingung 2) notwendig ist, sieht man an unterem Kontrast-Beispiel.
2. Die Ähnlichkeit von Bedingung 1) in Satz 7.1 und Satz 7.3 ist beeindruckend!

Interpretation: Die Interpretation ist (mutatis mutandis) gleich wie bei Satz 7.1.

Kontrast-Beispiel: Sei X_n eine Markov-Kette auf $\mathbb{Z}^+$ mit $p_{01} = 1$, $p_{i0} = 1/2i$ und $p_{i,i+1} = 1 - 1/2i$ für $i \geq 1$.

1) Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 4 (gleich nach Satz 4.10), dass die Kette rekurrent ist.

2) Zeigen Sie mit $g(j) = j$, dass die Kette Bedingung 1) durchaus erfüllt.

3) Zeigen Sie auch, dass mit $g(j) = j$ Bedingung 2) von Satz 7.3 *nicht* erfüllt ist.