Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

8 Bernoulli- und Poisson-Prozesse

Literatur Kapitel 8

* Grimmett & Stirzaker: Kapitel 6.8

* Krengel: § 18

Dieses Kapitel ist nicht nur für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel (Markov-Prozesse (stetige Zeit, diskrete Zustandsräume)) zentrale Voraussetzung. Die Bernoulli-Prozesse werden selber in der Extremwert-Theorie (Versicherungsmathematik, Risk-Management) eingesetzt; der Poisson-Prozess ist als Modell für den radioaktiven Zerfall und wie wir in 8.4 sehen werden in zahlreichen Anwendungsgebieten (Versicherungsmathematik, Operations Research, Volkswirtschaftslehre, Epidemiologie und weiteren) wichtiges Arbeitswerkzeug. Beeindruckend werden vor allem die analogen Resultate in diskreter Zeit (Bernoulli-Prozesse) und stetiger Zeit (Poisson-Prozesse) sein.

8.1 Bernoulli-Prozesse [diskrete Zeit]

Von Vlsg WTS repetieren wir aus "Ausgewählte Verteilungen":

<u>Bernoulli Be(p)</u>

X kann 2 Werte annehmen: 0 und 1. $P[X = 1] = p$ (Erfolg) und $P[X = 0] = 1 - p$ (Misserfolg). $E[X] = p$ und $V[X] = p(1 - p)$.

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x}$$

Binomial Bin(n,p)

Seien X_i, $1 \leq i \leq n$, n iid Be(p)-Zufallsgrössen. Sei $Y := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann hat Y per Definitionem die Binomialverteilung mit Parametern n und p; Bin(n,p). $E[Y] = np$ und $V[Y] = np(1-p)$.

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

Geometrisch Ge(p)

Seien wieder X_i, $1 \leq i \leq n$, n iid Be(p)-Zufallsgrössen. Wir interessieren uns für den Zeitpunkt des ersten Erfolgs: $Z := \min\{i | X_i = 1\}$. Z ist eine Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen ohne die Null. Z hat per Definitionem eine geometrische Verteilung Ge(p) mit Parameter p. Es gilt: $E[Z] = 1/p$ und $V[Z] = (1-p)/p^2$.

$$P[Z = z] = p(1-p)^{z-1}$$

*

*   *

Seien jetzt $B_1, B_2, \ldots$ iid Be(p)-Zufallsgrössen mit:

$$P[B_1 = 1] = p = 1 - P[B_1 = 0] \in (0, 1).$$

Als Motivation stelle man sich zum Beispiel eine (Rück-)versicherung vor, welche im Jahr i nur dann Anteile von Schäden X_i einer anderen Versicherung übernimmt, wenn eine gewisse, vertraglich vereinbarte Limite L überschritten wurde (Stopp-Loss-Versicherung):

$$B_i := I[X_i > L]; \tag{8.1}$$

dabei steht I wie immer für die Indikatorfunktion (diese Konstruktion mit (8.1) ist nur für die Motivation und nicht weiter von Belang!). Wir setzen hier voraus, dass auch X_i eine iid Folge ist (Verteilung ansonsten beliebig). Mit $N_n := \sum_{i=1}^n B_i$ (**dem Bernoulli-Prozess**) können wir dann modellieren, wie häufig solche Ereignisse vom Jahr 1 (nicht biblisch gemeint!) bis Jahr n vorgekommen sind. Man hat dann also zum Beispiel folgendes Bild:

Wir wollen die Folge der Zufallsgrössen N_n untersuchen. In Satz 8.1 sind einige (zum Teil *sehr* einfache) Eigenschaften aufgelistet. Die Beweise sind (wo überhaupt notwendig) als freiwillige Übung empfohlen.

Satz 8.1 [Eigenschaften des Bernoulli-Prozesses N_n] *Für den Bernoulli-Prozess N_n gilt (wir vereinbaren noch $N_0 := 0$):*
a) **[Binomialverteilte Zuwächse]** *mit natürlichen Zahlen $r; j > k > 0$:*

$$P[N_j - N_k = r] = P[\mathrm{Bin}(j-k,p) = r];$$

b) **[unabhängige Zuwächse]** *mit natürlichen Zahlen $j_2 > k_2 \geq j_1 > k_1$:*

$$N_{j_1} - N_{k_1}$$

und

$$N_{j_2} - N_{k_2}$$

sind unabhängig;
c) **[lineare erwartete Zuwächse]** *mit natürlichen Zahlen $j > k$:*

$$E[N_j - N_k] = p(j-k);$$

d) **[uniforme Verteilung der Ereignisse]** *die Verteilung der "Punkte" (Indizes j, wo $B_j = 1$), gegeben $N_n = m$ ist uniform; genauer: Sei $N_n = m$ gegeben. Die verschiedenen, zufälligen Teil-Mengen $A(\omega)$ von Kardinalität m von $\{1, 2, \ldots, n\}$ wo*

$$j \in A(\omega) \Leftrightarrow B_j(\omega) = 1,$$

sind (aus Symmetriegründen) alle gleichwahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{1}{\binom{n}{m}}.$$

e) **[Markov-Eigenschaft]** *Die Folge der B_i ist eine Markov-Kette auf $\{0,1\}$ mit Übergangsmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

die Folge der N_n ist eine vergängliche Markov-Kette auf $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *mit* $p_{ii} = 1 - p$ *und* $p_{i,i+1} = p$ *für* $i \geq 0$.

f) **[Zeit bis erstes Ereignis]** *Die Verteilung des Indexes des ersten Ereignisses ist geometrisch auf* $j \in \{1, 2, \ldots\}$*: Wir definieren mit* $T_1 := \min\{j | B_j = 1\}$ *die Zeit (***T***ime) des ersten Ereignisses. Dann gilt:*

$$P[T_1 = j] = p(1-p)^{j-1};$$

von der Repetition her haben wir $E[T_1] = 1/p$.

g) **[Zeit für nachfolgende Ereignisse]** *Sei* $j \geq 2$. *Wir definieren mit* $T_j := \min\{k | B_k = 1, k > T_{j-1}\}$ *die Zeit des* $j-$*ten Ereignisses. Dann gilt (definiere für diese kompakte Aussage* $T_0 := 0$*):*

$$T_j - T_{j-1} \sim Ge(p)$$

für $j \geq 1$. *Die Folge der* $(T_j - T_{j-1})_{j \geq 1}$ *ist eine iid Ge(p)-Folge!*

h) **[Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung, Aufgabenblatt 8]** *Sei G eine geometrisch verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für natürliche Zahlen* $n > m > 0$*:*

$$P[G > n | G > m] = P[G > n - m].$$

Wir werden in 8.2 sehr schöne, analoge Resultate in stetiger Zeit herleiten. Zuerst wollen wir ein Paradoxon besprechen, welches in 8.2 noch eindrucksvoller sein wird.

<u>Das Inspektionsparadoxon, 1. Teil (diskrete Zeit)</u>

Stellen Sie sich vor, ein General (wir machen uns hier übrigens offensichtlich nicht über die *Schweizer* Armee lustig, die hat ja im Frieden keinen General) macht eine Inspektion und möchte mit einer kleinen Stichprobe herausfinden, ob bei 100'000 Soldaten die Rasur gut durchgeführt worden ist. Der kommandierende Oberst versichert dem General, dass (aus langjähriger Erfahrung in dieser wichtigen Frage) höchstens bei jedem 1'000-sten Soldaten die Rasur ungenügend sein könnte. Dies will der General nun überprüfen (kleines

Detail: der General hatte einmal angefangen, Mathematik zu studieren, brach das Studium aber interessenhalber zugunsten einer Militärkarriere ab - so *seine* Version). Jetzt will er, dass in zufälliger Reihenfolge alle Soldaten aufgereiht werden. Er fährt dann mit dem Jeep die Reihe ab. Vorher hat er noch einen Zufallsgenerator konsultiert, der ihm sagte, wo er 5 Proben nehmen soll: bei 34'561, 46'995, 50'016, 62'059 und 88'405. Das sind jetzt aber nur 5 Proben - wenn nur jeder 1'000-ste fehlerhaft ist, wird er das so kaum merken. Der General ist sich dieses Problemes durchaus bewusst. Aber er kennt die geometrische Verteilung. Er sagt sich: wenn p die Wahrscheinlichkeit für schlechte Rasur ist (das ist für ihn ja ein Erfolg), dann ist die erwartete Anzahl Personen mit guter Rasur zwischen zwei schlechten Rasuren $1/p - 1$, also hier mindestens 999. Der General hat dann vor, bei Soldat 34'561 anzufangen (er wird kaum schlecht rasiert sein!), dann geht er nach links bis zum ersten Erfolg, setzt dann wieder bei 34'561 an und geht nach rechts bis zum ersten Erfolg. Dann nimmt er die Summe und hat damit die Länge eines gut rasierten Intervalles. Im Erwartungswert müsste dies $1/p-1$ sein. Der General erhält im ersten Versuch ein gut rasiertes Intervall der Länge 1'344, dann bei 46'995 der Länge 1'233, danach noch 1'443, 1'543 und 1'655. Das ist ja immer deutlich grösser als 999, übererfüllt, sodass der General begeistert die Inspektion abbricht. Was ist von seinen Überlegungen zu halten?

8.2 Poisson-Prozesse [stetige Zeit]

Von Vlsg WTS repetieren wir aus "Ausgewählte Verteilungen":

<u>Poisson Po(λ)</u>

Eine Zufallsgrösse V ist poissonsch, wenn Sie Werte auf den natürlichen Zahlen inklusive 0 annimmt und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P[V = v] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^v}{v!}.$$

Es gilt: $E[V] = V[V] = \lambda$.

<u>(Negativ-) Exponential Exp(λ)</u>

Eine Zufallsgrösse X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \;\; x \geq 0,$$

heisst exponentialverteilt mit Parameter λ; Exp(λ). Die gleiche Wahl des Parameters wie bei der Poissonverteilung ist *nicht* zufällig! Es gilt $E[X] = 1/\lambda$ und $V[X] = 1/\lambda^2$ (vgl. mit der Ge(p)-Verteilung!).

*

* *

Man kann wegen Satz 8.1 g) einen Bernoulli-Prozess konstruieren, indem man "einfach eine Folge von iid $Ge(p)$-Zufallsgrössen nimmt und aneinanderhängt!" Wir machen mal in stetiger Zeit das selbe einfach mit iid exponentialverteilten Zufallsgrössen - mit Erfolg:

Definition 8.2 [Poisson-Prozess] *Sei $(T_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von iid exponentialverteilten Zufallsgrössen mit Parameter $\lambda > 0$. Wir definieren $\tau_n := \sum_{i\geq 1}^n T_i$ die Folge der Zeitpunkte von Ereignissen. Wir nennen*

$$X_t := \sum_{n\geq 1} I[\tau_n \leq t]$$

einen Poisson-Prozess mit Parameter (oder Intensität, Rate) λ.

Man vergleiche jeweils die Resultate in Satz 8.3 mit denen aus Satz 8.1:

Satz 8.3 [Eigenschaften des Poisson-Prozesses X_t] *Der in Definition 8.2 konstruierte Prozess X_t hat folgende Eigenschaften:*

a) **[Poisson-verteilte Zuwächse]** *mit natürlicher Zahl r und reellen Zahlen $t > s \geq 0$:*

$$P[X_t - X_s = r] = P[Po(\lambda(t-s)) = r];$$

Warnung: $\lambda(t-s)$, also Rate mal Zeitdauer und nicht nur λ!

b) **[unabhängige Zuwächse]** *mit reellen Zahlen $j_2 > k_2 \geq j_1 > k_1$:*

$$X_{j_1} - X_{k_1}$$

und

$$X_{j_2} - X_{k_2}$$

sind unabhängig;

c) **[lineare erwartete Zuwächse]** *mit reellen Zahlen $t > s$:*

$$E[X_t - X_s] = \lambda(t-s);$$

d) **[uniforme Verteilung der Ereignisse]** *Gegeben $X_t = r$, so haben die Ereignisse $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ die gleiche Verteilung wie die geordnete Stichprobe vom Umfang r aus der $U[0,t]$-Verteilung.*

e) **[Gedächtnislosigkeit der exponentiellen Verteilung]** *Sei T eine exponentiell verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für reelle Zahlen $t > s > 0$:*

$$P[T > t | T > s] = P[T > t - s].$$

Mithilfe von Satz 8.3 a) und d) kann man auch "rückwärtsgerichtet" einen Poissonprozess konstruieren:

Beweis: a) Wir repetieren zuerst von Vlsg WTS die sogenannte Gamma(r, λ)-Verteilung: Seien T_i, $1 \leq i \leq r$, r iid Exp(λ)-Zufallsgrössen. Sei $\tau_r := \sum_{i=1}^{r} T_i$. Dann hat τ_r per Definitionem die Gamma-Verteilung mit Parametern r und λ; Gamma(r,λ). $E[\tau_r] = r/\lambda$ und $V[\tau_r] = r/\lambda^2$. Die Dichte ist (vgl. WTS-Aufgabenblatt 9):

$$f(u) = \frac{u^{r-1}e^{-\lambda u}\lambda^r}{\Gamma(r)}. \tag{8.2}$$

Mit $r = 1$ wird dies in der Tat zu einer Exponential-Verteilung. Die Gamma-Verteilung gibt uns also an, wann das r-te Ereignis stattfinden wird. Wegen der Gedächtnislosigkeit von exponentialverteilten Zufallsgrössen und Definition 8.2 können wir Œ $s = 0, X_s = 0$ wählen:

$$\begin{aligned}
P[X_t = r] &= P[\tau_r < t, T_{r+1} > t - \tau_r] \\
&= \int_0^\infty P[\tau_r < t, T_{r+1} > t - \tau_r | \tau_r = u] f(u) du \\
&= \int_0^\infty P[u < t, T_{r+1} > t - u | \tau_r = u] f(u) du \\
&= \int_0^t P[u < t, T_{r+1} > t - u | \tau_r = u] f(u) du \\
&= \int_0^t P[T_{r+1} > t - u | \tau_r = u] f(u) du \\
&= \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \frac{u^{r-1}e^{-\lambda u}\lambda^r}{(r-1)!} du \\
&= e^{-\lambda t}\lambda^r \int_0^t \frac{u^{r-1}}{(r-1)!} du = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^r}{r!}.
\end{aligned}$$

b) Folgt aus der Gedächtnislosigkeit von exponentialverteilten Zufallsgrössen und Definition 8.2.

c) Folgt aus a).

d) Die r-dimensionale Dichte des Ereignisses $(\tau_1 = t_1, \ldots, \tau_r = t_r)$, gegeben $X_t = r$, ist gegeben durch

$$\frac{\lambda e^{-\lambda t_1}\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cdots \lambda e^{-\lambda(t_r - t_{r-1})} e^{-\lambda(t-t_r)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r/r!} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}t^r/r!} = \frac{r!}{t^r}.$$

e) Ist auf Aufgabenblatt 8 zu lösen.

$\square$

Das folgende Lemma beinhaltet zwei wichtige Eigenschaften von exponentialverteilten Zufallsgrössen. Sie sind wichtige Grundlage für Simulationen.

Lemma 8.4 *Seien* $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ *n unabhängige Zufallsgrössen, wo* X_i *exponentialverteilt mit Parameter* μ_i *ist. Wir definieren* $Y := \min(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i$. *Dann gelten*

a) $\mathbb{P}[Y \leq t] = 1 - e^{-\mu t}$,

b) $\mathbb{P}[X_i = Y] = \mu_i/\mu$.

Bemerkung zu Lemma 8.4 a) sagt aus, dass Y wieder exponentialverteilt ist mit Parameter μ; in b) wird gesagt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die i-te Zufallsgrösse die kleinste ist, dem Anteil des i-ten Parameters an der Gesamtrate μ entspricht.

Beweis von Lemma 8.4: Wir beweisen dieses Lemma vorerst für den Fall $n = 2$.

a) Wegen der Unabhängigkeit können wir folgern:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y \leq t] &= 1 - \mathbb{P}[\{X_1 > t\} \cap \{X_2 > t\}] = 1 - \mathbb{P}[X_1 > t]\mathbb{P}[X_2 > t] \\ &= 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 < X_2] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[X_1 < X_2 | X_2 = x] e^{-\mu_2 x} \mu_2 dx \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\mu_1 x}) e^{-\mu_2 x} \mu_2 dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu_2 x} \mu_2 dx - \int_0^\infty e^{-(\mu_1+\mu_2)x} \mu_2 dx \\ &= 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.\end{aligned}$$

Wie verallgemeinert man jetzt dieses Resultat auf den Fall $n > 2$?

□

Lemma 8.5 [Superposition und Thinning] *a) $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ seien n unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(t)$$

ein Poisson-Prozess mit Rate $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) Sei $p \in (0,1)$ (eine "Eliminationswahrscheinlichkeit"). Jedes Ereignis (jeder Punkt) des Poissonprozesses $X_1(t)$ wird unabhängig vom Prozess $X_1(t)$ und von den anderen Zeitpunkten mit Wahrscheinlichkeit p eliminiert (nicht berücksichtigt) und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ gelassen. Der so konstruierte Prozess $\hat{X}_1$ ist ein Poissonprozess der Rate $(1-p)\lambda_1$.

Beweis von Lemma 8.5: a) folgt aus Lemma 8.4 a) (siehe Konstruktion/Definition des Poisson-Prozesses; warum?) und b) ist als freiwillige Übung gedacht.

$\square$

Das Inspektionsparadoxon, 2. Teil (stetige Zeit)

Wenn wir den Poissonprozess vor der Zeit 0 fortsetzen, so erhalten wir ein noch eindrücklicheres Paradoxon als in diskreter Zeit. Dies deshalb, weil die Wahrscheinlichkeit, dass es gerade am Inspektionsort einen Punkt hat, bei stetigen Wahrscheinlichkeitsdichten gleich 0 ist. Also ist hier *bei einer Inspektion* die Länge des erwarteten Intervalles ohne Zwischenpunkt ("nach links, nach rechts") gleich

$$\frac{2}{\lambda};$$

dies ist zu vergleichen mit der erwarteten Zwischenzeit zwischen 2 Ereignissen (nur nach Vorne schauen!) der Länge

$$\frac{1}{\lambda}.$$

8.3 Diskrete und stetige Analoga und Konvergenzen

Wir haben gesagt, dass die geometrische Verteilung das diskrete Analogon der Exponential-Verteilung ist. Die graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. der Dichte gibt einen ersten Hinweis darauf:

Des weiteren erhalten wir bei beiden Zufallsgrössen einen vergleichbaren Ausdruck für

$$P[X > t]:$$

Die Gedächtnislosigkeit beider Verteilungen sind ein weiterer Hinweis. Diese *wichtigen* Hinweise genügen uns jedoch nicht. Wir wollen rigoros beweisen, dass diese beiden Verteilungen sehr wohl "etwas mit einander zu tun haben"... .

Bemerkung 8.6: Die Definition der Konvergenz in Verteilung lautet (vgl. Kapitel 2): Eine Folge von Zufallsgrössen $X_n, n \geq 1$, konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsgrösse X, wenn die Folge der Verteilungsfunktionen $F_{X_n}(a)$ gegen die Verteilungsfunktion $F_X(a)$ konvergiert und zwar an allen Stetigkeitspunkten von F_X. Dies ist gleichbedeutend mit

$$P[X_n \leq a] \to P[X \leq a]$$

für alle a so, dass $P[X = a] = 0$. Als kleine (freiwillige) Übung zeige man, dass dies bei Zufallsgrössen auf den ganzen Zahlen gleichbedeutend ist mit

$$P[X_n = r] \to P[X = r] \; \forall r \in \mathbb{Z}.$$

*

*   *

Wir werden die folgenden beiden Lemmata benutzen. Sie sind als Übungsaufgaben zu beweisen. Die seltsamen Skalierungen sind notwendig! Man kann sie heuristisch am Besten mit Überlegungen zum Erwartungswert der involvierten Zufallsgrössen erklären. Die Erwartungswerte müssen bei (vernünftigen) Folgen von Zufallsgrössen, welche gegen eine Zufallsgrösse konvergieren, in der gleichen Grössenordnung sein!

Lemma 8.7 [Konvergenz der Binomial- gegen die Poisson-Verteilung] *Sei X_n eine Folge von $Bin(n, p_n)-$ Zufallsgrössen. Für $np_n = \lambda > 0$ gilt: die Folge der X_n konvergiert in Verteilung gegen eine Po(λ)-Zufallsgrösse wenn $n \to \infty$.*

Beweis: Aufgabenblatt.

$\square$

Lemma 8.8 [Konvergenz der geometrischen Verteilung gegen die Exponentialverteilung] *Sei X_n eine Folge von Ge(1/n)-Zufallsgrössen, d.h. X_n habe eine Ge(1/n)-Verteilung. Dann gilt, dass die Folge der*

$$\frac{1}{n} X_n$$

in Verteilung gegen eine exponential-verteilte Zufallsgrösse konvergiert wenn $n \to \infty$.

Beweis: Aufgabenblatt.

$\square$

Wir werden jetzt in 3 Fragestellungen untersuchen, was mit einem Bernoulli-Prozess passiert, wenn man $p \to 0$ konvergieren lässt. Von Satz 8.1 c) her sehen wir sofort, dass dann für die erwarteten Zuwächse gilt:

$$E[N_j - N_k] \to 0.$$

Dies ist also nicht sonderlich interessant. Wir werden deshalb

* einerseits $p \to 0$ gehen lassen und

* andererseits die Zeitachse zusammenstauchen:

Mit $p := \frac{1}{M}$ und mit

$$X_M(t) := N_{[Mt]} \tag{8.3}$$

wo $t \in [0, \infty)$ eine reelle Zahl, sollte es besser gehen. Dabei ist $[x]$ per Definitionem die grösste natürliche Zahl, sodass $[x] \leq x$ (Entier-Funktion). Diese beiden Veränderungen können in drei Skizzen folgendermassen zusammengefasst werden:

1. In der ersten Fragestellung wollen wir es jetzt nochmals mit den erwarteten Zuwächsen wagen; es gilt wegen Satz 8.1 c) für $t \geq s$:

$$E[X_M(t) - X_M(s)] = E[N_{[Mt]} - N_{[Ms]}] = \frac{1}{M}([Mt] - [Ms]) \rightarrow (t - s)$$

für $M \rightarrow \infty$.

Vgl. Satz 8.3 c): dort haben wir $\lambda(t - s)$ erhalten (jetzt $\lambda = 1$). Wenn wir so $M \rightarrow \infty$ gehen lassen, erhalten wir einen Prozess (Poisson-Prozess) in stetiger Zeit, bei dem die erwarteten Zuwächse linear mit Proportionalitätskonstante λ zunehmen.

2. Die erwarteten Zuwächse sind ja nur ein gemittelter Ausdruck. Wir wollen auch die Verteilung kennen. Von Satz 8.1 a) her wissen wir, dass die Zuwächse bei N_n binomialverteilt sind. Wie ist die Verteilung, wenn $M \rightarrow \infty$ in $X_M(t)$?

$$X_M(t) - X_M(s), \tag{8.4}$$

$t > s$ hat eine $Bin([Mt] - [Ms], \frac{1}{M})$-Verteilung. Es gilt: $([Mt] - [Ms])\frac{1}{M} \rightarrow (t - s)$. Daraus folgt von Lemma 8.7 (leicht allgemeinere Version! weshalb?), dass (8.4) in Verteilung gegen eine $Po(t - s)$-Zufallsgrösse konvergiert.

Vgl. Satz 8.3 a)): dort hat man $Po(\lambda(t - s))$ erhalten (jetzt $\lambda = 1$). Wenn wir so $M \rightarrow \infty$ gehen lassen, erhalten wir einen Prozess (Poisson-Prozess) in stetiger Zeit, bei dem die Zuwächse poissonverteilt sind.

3. Wir wollen jetzt noch eine entscheidende Untersuchung machen, welche die Konstruktion der Poisson-Prozesse und der Bernoulli-Prozesse verbindet: Wir schauen in den Bernoulli-Prozessen die Zeitdauern $T_j - T_{j-1}$ zwischen den Ereignissen an. Die Zwischenzeiten sind ja nach Satz 8.1 g) eine Folge von iid $Ge(p)$-Zufallsgrössen; damit insbesondere auch je gedächtnislos (Satz 8.1 h)). Was geschieht mit den Zwischenzeiten in $X_M(t)$, wenn wir $M \rightarrow \infty$ konvergieren lassen? Für M zuerst fest, nehmen die entsprechend definierten $T_j^{(M)}$ und die $T_j^{(M)} - T_{j-1}^{(M)}$ ja Werte auf der Menge

$$\{\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \frac{3}{M} \ldots\}$$

an. Also hat

$$M(T_j^{(M)} - T_{j-1}^{(M)})$$

eine $Ge(\frac{1}{M})$-Verteilung; mithin ist $(T_j^{(M)} - T_{j-1}^{(M)})$ verteilt wie $(1/M)Ge(\frac{1}{M})$. Von Lemma 8.8 können wir jetzt schliessen, dass die $T_j^{(M)} - T_{j-1}^{(M)}$ gegen eine exponentialverteilte Zufallsgrösse konvergieren (das λ ist hier übrigens 1).

Bemerkung 8.9 (eine Warnung!): Für den Fall $\lambda = 1$ haben wir oben in 3 Fragestellungen gesehen, dass mit Konstruktion (8.3) offenbar viele Eigenschaften der Bernoulli-Prozesse ein Pendant in stetiger Zeit haben und offenbar eine Konvergenz von Bernoulli-Prozessen gegen Poisson-Prozesse existiert und gezeigt werden kann. Wir haben in Kapitel 2 die Konvergenz von Zufallsgrössen behandelt. Die Konvergenz von ganzen Prozessen ist eine weit schwierigere Sache. Deshalb werden wir ein Konvergenzresultat nicht zeigen. Es sei nur erwähnt, dass trotz Punkt 1 in obigen Fragestellungen von der Konvergenz von Zufallsgrössen oder -Prozessen gegen Limesgrössen oder -Prozessen i.A. nicht gefolgert werden kann, dass dann auch die Erwartungswerte gleich sein müssen (vgl. 2.3)! **Deshalb kann von einer Konvergenz von Bernoulli-Prozessen gegen einen Poisson-Prozess nicht sofort gefolgert werden, dass der Poisson-Prozess diverse Eigenschaften von den Bernoulli-Prozessen "erbt".**

8.4 Modellierung in stetiger Zeit bei abzählbaren Zustandsräumen

Wir werden jetzt allgemein erklären, wie man die Resultate aus 8.2 zur Modellierung und Simulation verwenden kann. In Kapiteln 10 und 12 folgen danach 2 wichtige Anwendungen davon. Mehr über Simulationen auf Rechnern findet man in Kapitel 8 von "Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance" von D. Lamberton und B. Lapeyre.

Das allgemeine Vorgehen:

1. *Wann* **findet wieder ein Ereignis statt? (Lemma 8.5 a) bzw. Lemma 8.4 a) mit aktueller Gesamtrate)**

2. *Was* **ist bei Punkt 1. passiert? (Lemma 8.4 b) mit Anteilen)**

3. *Neu einstellen, neue Gesamtrate* **goto 1.**

Wenn man nur die Zeitpunkte des Ereignisses anschaut, so haben wir eigentlich einen normalen Poisson-Prozess bis zum allerersten Ereignis. Dann ändert sich die Rate. Dann haben wir wieder einen Poisson-Prozess (mit neuer Rate) bis zum nächsten Ereignis und so weiter und so fort.

Wenn in der Literatur von einem stochastischen Modell und von einer Rate gesprochen wird, dann ist damit (zumindest bei stetiger Zeit und abzählbaren Zustandsräumen) diese obige Modellierung gemeint. Man kann schon andere Übergangsraten (anders als Exp) einbauen - z.B. mit Time Lag bis zum nächsten Ereignis - aber dann muss man dies explizit angeben. Das gleiche gilt auch für allfällige Abhängigkeiten. Das obige ist also der Default wenn nichts anderes geschrieben steht. In Kapitel 13 wird Satz 13.11 im Fall von Markov-Prozessen (unter schwachen Bedingungen) eine Rechtfertigung für dieses Vorgehen liefern.

Wir üben das jetzt an ein paar Aufgaben:

Reiner Geburtsprozess (Yule-Prozess)

1. Am Anfang haben wir 1 Parasit $[X_0 = 1]$
2. Alle Parasiten erzeugen iid Nachkommen mit Rate $\lambda > 0$
3. Geben Sie Übergangsraten und Simulationsstrategie an.
4. Geben Sie auch das deterministische Analogon (DGL) an.

Geburtsprozess mit Immigration

1. Am Anfang haben wir 1 Parasit $[X_0 = 1]$
2. Alle Parasiten erzeugen iid Nachkommen mit Rate $\lambda > 0$
3. Dazu gibt es von aussen eine Immigration von Parasiten mit konstanter Rate $\eta > 0$
4. Geben Sie Übergangsraten und Simulationsstrategie an.
5. Geben Sie auch das deterministische Analogon (DGL) an.

Geburts- und Todesprozess

1. Am Anfang haben wir 1 Parasit $[X_0 = 1]$
2. Alle Parasiten erzeugen iid Nachkommen mit Rate λ
3. Parasiten sterben iid mit Rate $\mu > 0$ - der Sterbeprozess ist $\coprod$ vom Geburtsprozess
4. Geben Sie Übergangsraten und Simulationsstrategie an.
5. Geben Sie auch das deterministische Analogon (DGL) an.

"Kleine Nebenbemerkung": Man beachte, dass es wie immer sehr einfach ist, solche Systeme zu *simulieren* - die theoretische Untersuchung kann beliebig schwierig werden... .