Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

9 Lehren für's Management & das tägliche Leben I: Einsatz von Poisson-Prozessen und Poisson-Verteilung

9.1 Beispiele

Wir haben bei der Konstruktion von Poisson-Prozessen in Definition 8.2 gesehen, dass dazu lediglich iid exponentialverteilte Übergangszeiten von konstanter Rate notwendig sind. Es kann gezeigt werden, dass die Exponentialverteilung die einzige stetige Zufallsgrösse ist, welche gedächtnislos ist (siehe z.B. Ross, Stochastic Processes, Kapitel 1). Wenn wir Phänomene der realen Welt untersuchen, müssen wir uns also lediglich fragen, ob

* Unabhängigkeit und Gedächtnislosigkeit und
* konstante Rate

angenommen werden können.

Mathematischen Edelneurotikern sei versichert, dass PraktikerInnen sich *auch* bewusst sind, dass die nachfolgenden Überlegungen von der konkreten Anwendung abhängen und mathematisch unpräzise sind.

Falls die Rate nicht konstant ist (z.B. *Strassen*verkehrstote in der Schweiz innert eines Jahres, warum?), können wir immer noch die gesamte Anzahl Ereignisse in einer Zeitperiode mit einer Poisson-Verteilung modellieren. Es gibt eben auch verallgemeinerte Poissonprozesse mit Rate $\lambda(t)$. Die Verteilung der Anzahl Ereignisse über ein gesamtes Intervall bleibt Poisson.

Falls die Unabhängigkeit leicht verletzt ist (*Strassen*verkehrstote in der Schweiz innert eines Jahres, warum?), so kann man bei grösserer Anzahl Ereignisse (etwa 500 Tote pro Jahr ist problemlos) immer noch die gesamte Anzahl Ereignisse am Schluss der Zeitperiode mit einer Poisson-Verteilung modellieren. Dies ist dann aber auch in der Theorie nur eine Approximation.

Wir besprechen jetzt die folgenden Situationen im Hinblick darauf, ob wir sie - wenn überhaupt - eher in 9.1.1 (ganzer Prozess) oder in 9.1.2 (nur Verteilung) oder in 9.1.3 (Rest) ansiedeln wollen. Zuerst jede/r für sich oder in Gruppen, dann zusammen. Diese Diskussionen finden in Versicherungen, Banken und anderen Institutionen tagtäglich statt.

* Radioaktiver Zerfall (kurze Zeitspanne)
* Strassenverkehrstote in der Schweiz innert eines Jahres
* Erdbeben
* Flugzeug*tote* in der Schweiz pro Jahr / Flugzeug*unfälle* in der Schweiz pro Jahr (Terror?)
* Schiffsunfälle
* Brände von Gebäuden in der Schweiz
* Wirbelstürme
* Umsatz einer Firma pro Jahr mit Poisson-Verteilung?
* Besucher/innen einer Ausstellung pro Tag mit Poisson-Verteilung?
* Skifahrer/innen in einem Skiort pro Tag mit Poisson-Verteilung?
* BSE-Fälle pro Jahr mit Poisson-Verteilung?
* Fussballspiele; Anzahl der Tore; Zeitpunkte der Tore?

9.1.1 Beispiele für Prozess (mit konstanter Rate)

9.1.2 Beispiele nur Verteilung

9.1.3 Weder noch

9.2 Schnelltest für statistische Signifikanz

NZZ, 18. Februar 2004, p 13/14 (BfU): Anstieg der Strassenverkehrstoten um 7 %: 513 [2002] auf 549 [2003].

Wie sieht ein Schnelltest für die Frage aus, ob dies ein signifikanter Anstieg (einseitig) oder eine signifikante Änderung (zweiseitig) ist? Das folgende Vorgehen wird in Stahel, 8.1.n, kritisiert. Als *Schnelltest* finde ich es aber trotzdem gut.

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

$\lambda := 513$ (das wird in Stahel kritisiert!)

$E[X] = V[X] = \lambda$, also $sd[X] = \sqrt{\lambda}$

CLT (da "$\sum_{i=1}^{500} Po(1) = Po(500)$", siehe WTS-4.4.2): approximativ $X \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

$1.96 \doteq 2$

Zentrale Regel (zweiseitig): $X \doteq \lambda \pm 2\sqrt{\lambda}$ mit W'keit 95 %

Einseitig nach oben: $X \leq \lambda + 2\sqrt{\lambda}$ mit W'keit 97.5 %

Zahlenbeispiel BfU: $513 + 2\sqrt{513} \doteq 558$, also kein signifikanter Anstieg bei $\alpha = 2.5\%$, bei $\alpha = 5\%$: $513 + 1.64\sqrt{513} \doteq 550$, also auch knapp nicht signifikant wenn nur zwei Jahre verglichen.

9.3 Eine Wurzel mit gewaltigen Konsequenzen und Interpretationsproblemen

Wir repetieren nochmals die zentrale Regel (zweiseitig) von 9.2: Mit 95 % Wahrscheinlichkeit gilt:

$$X \doteq \lambda \pm 2\sqrt{\lambda}.$$

Die nachfolgenden Überlegungen beziehen sich nicht nur auf die Poisson-Verteilung - in diesem Setting tritt das Problem aber sehr häufig auf. Machen wir dazu ein paar Zahlenbeispiele:

* 100 ± 20, also $\pm 20\%$
* $10'000 \pm 200$, also $\pm 2\%$
* $1'000'000 \pm 2'000$, also $\pm 0.2\%$

Diese Aussagen sind alle mit dem gleichen Signifikanzniveau von 5% gemacht worden. Offenbar kann man nicht sagen, eine Abnahme von z.B. 7% ist sicher eine signifikante Abnahme. **Es kommt auf die absoluten Zahlen an**. Anderes Extrem: Wenn Sie bei einer Zahl von $1'000'000$ sind, dann ist bereits eine Zahl wie $995'000$ - eine Abnahme um 0.5% - eine signifikante Abnahme.

Eine deprimierende Folge für KMU: Wenn Sie Kurse von durchschnittlich 4 Personen durchführen wollen, so müssen Sie damit rechnen, dass die Schwankungen im Vergleich zum Durchschnitt gewaltig sind. Es wird vorkommen, dass Sie einmal nur 1 Person haben und danach 8 auf's Mal, ohne dass sich das Umfeld, Qualität, Werbung geändert hätten, eben per Zufall. Ihr grosser Konkurrent mit 40 durchschnittlichen Teilnehmer/innen wird in absoluten Zahlen sogar noch grössere Schwankungen haben: vielleicht von 28 bis 52 (Zahlen aus dem hohlen Bauch heraus). Aber im Verhältnis zur durchschnittlichen Zahl ist dies harmlos im Vergleich zu Ihnen als KMU.