Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

12 Stochastische Netzwerke

Literatur Kapitel 12

* Grimmett & Stirzaker: Kapitel 11

12.1 Einführung

Wir haben in 3.1.2 und 3.1.3 die stochastischen Netzwerke kurz angetippt. Aus Zeitgründen werden wir hier nur beispielhaft wichtige Resultate aus diesem sehr umfangreichen Gebiet anschauen. Das Standard-Werk hierzu ist Kelly, F.P. (1979), Reversibility and Stochastic Networks. Wiley, New York.

Gegeben seien eine endliche Anzahl J von Knoten. Diese Knoten können Geschäfte in einer Shopping-Mall, Stände an einem Jahrmarkt, Grossrechnereinheiten in vernetzen Systemen oder Staaten, Inseln sein.

* Wir haben Individuen (oder Computer-Jobs), welche von Aussen mit Poisson-Strömen zu den einzelnen Knoten gelangen und zwar unabhängig zu jedem Knoten. Der Zustrom zu Knoten l habe Rate λ_l.

* Diese Individuen verweilen dann eine gewisse Zeit an einem Knoten und verlassen danach entweder das System oder gehen zu einem anderen Knoten. Die Individuen wählen sich unabhängig von ihrem bisherigen Weg und dem Weg der anderen Individuen den Weg; sie gehen mit Wahrscheinlichkeit p_{jk} von Knoten j zu Knoten k und verlassen das System bei Knoten j mit Wahrscheinlichkeit p_j. Es gilt somit

$$p_j + \sum_{k=1}^{J} p_{jk} = 1 \qquad \forall j.$$

* Bei den Knoten bilden sich mit der Zeit unter Umständen Staus, und die Leistung $\phi_j(n_j)$ von Knoten j, $1 \leq j \leq J$, kann von der Anzahl der dort wartenden Individuen n_j abhängig gemacht werden. Wir nehmen an, dass der Bedienungsbedarf jedes Individuums an jedem Knoten, den er besucht, exponentialverteilt ist mit Parameter 1. Dies ist nur eine bedingte Einschränkung der Allgemeinheit: zwei Individuen werden bei jedem Knoten zwar den gleichen Bedienungsbedarf haben, aber falls wir modellieren wollen, dass bei allen Individuen der Bedienungsbedarf bei Knoten 1 doppelt so gross ist wie bei Knoten 2, setzen wir einfach $\phi_1(n) = 0.5\phi_2(n)$ für alle $n \geq 0$. Treffender ist es, sich die ϕ_j's als "Abfertigungsraten" vorzustellen.

* Um die Irreduzibilität des Zustandsraums $S = \{\mathbf{n} | n_j \geq 0, j = 1, \ldots, J\}$ zu garantieren, fordern wir $\phi_j(n) > 0$ für alle $n > 0; 1 \leq j \leq J$. Die Parameter p_{ij} sollen es zudem jedem Individuum erlauben, von jedem Ort zu einem beliebigen anderen Ort zu gelangen. Man beachte, dass der Zustandsraum sehr komplex und von unendlicher Kardinalität ist.

* Es wird an jedem Knoten immer nur ein Individuum bedient. Die Individuen sind zudem nicht unterscheidbar. Die Bedienungsvorschrift (FIFO, LIFO, etc.) spielt also keine Rolle. Dies nennt man auch ein Jackson-Netzwerk.

* Wir haben bereits in Kapitel 6 den Begriff des Gleichgewichtszustands kennengelernt (" $\mu^t P = \mu^t$ "). Falls wir nicht explizit andere Voraussetzungen machen, setzen wir immer voraus, dass die Leistungen der Knoten so hoch ist, dass es keine immer grösser werdende Staus gibt. Die erwartete Wartezeit muss endlich sein. Ein solches stochastisches Netzwerk befindet sich im Gleichgewicht, wenn es schon unendlich lange läuft. Die Resultate in Kapitel 12 gelten nur unter der Voraussetzung einer Gleichgewichtsverteilung. Wir werden in Kapitel 13 genau definieren, was darunter zu verstehen ist. Es ist aber im wesentlichen analog zum Fall in diskreter Zeit.

Typische Fragen, welche man sich in solchen Netzwerken stellt, sind:

* "Wie sieht die Gleichgewichtsverteilung aus?"
* "Wie viele Personen warten durchschnittlich vor Knoten j?" bzw. "Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Kunden vor Knoten j warten müssen?" bzw. "Wie gross ist die erwartete Wartezeit?" bzw. "Mit wie viel Leistung soll ich Knoten j ausstatten?" (Angst vor Kundenverlust)
* "Wie viele Individuen wechseln pro Zeiteinheit von Knoten i nach Knoten j?" (Wie breit muss die Gangway gebaut sein?, auch Sicherheitsfragen)

12.2 Ein-Knoten-Netzwerk

Man kann den reinen Poisson-Prozess auch als ein Null-Knoten-Netzwerk auffassen. Der nächst komplizierte Fall ist ein Ein-Knoten-Netzwerk. In Zukunft (und in der allgemeinen Theorie) wird man neben $\phi_j(0) = 0, 1 \leq j \leq J$, auch fordern, dass $p_{jj} = 0$ für $1 \leq j \leq J$. Hier werden wir der Einfachheit halber $p_{11} = 0.1$ zulassen (es folgt $p_1 = 0.9$). Der Poissonzustrom von aussen sei $\lambda_1 = 10$. Wir haben also folgendes System:

Der Bedienungsbedarf jedes Individuums sei (von 12.1) exponentialverteilt mit Parameter 1. *Dies ist nun so zu verstehen, dass ein Knoten j mit n_j KundInnen und Leistung $\phi_j(n_j) = 1$ für alle n_j genau eine exponentialverteilte Zeit mit Parameter 1 hat, bis er den Kunden abgefertigt hat. Ist die Leistung $\phi_j(n_j) = 2$ für alle n_j, so ist die Zeit exponentialverteilt mit Parameter 2. Die erwartete Zeit ist also dann 1 bzw. 0.5, bis der Kunde abgefertigt ist. Falls zu viele Kunden ankommen (λ_1!) so explodiert die Anzahl Wartender.* Wir haben jetzt aber einen Zustrom von Aussen von 10 Individuen pro Sekunde. Der Knoten muss dies bewältigen können. Aber nicht nur diesen Zustrom von Aussen: Wie gross muss die Leistung von Knoten 1 sein, damit wir keine Explosion des Systems haben?

Bei komplexen Netzwerken kann die Bestimmung der minimalen Raten sehr aufwendig sein, wir verweisen auf Kelly. Wir wählen jetzt $\phi_1(n) = 15, \forall n$. Die durchschnittliche

Ankunftsrate bei Knoten 1 (kein Poisson-Prozess!) bezeichnen wir mit α_1. Dann gilt z.B. *im Gleichgewichtszustand*, wenn X die Anzahl Wartender vor Knoten 1 ist, $\alpha_1 < \phi_1$ (mehr dazu in Kelly):

$$P[X = n] = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\phi_1}\right)\left(\frac{\alpha_1}{\phi_1}\right)^n = \frac{35}{135}\left(\frac{100}{135}\right)^n. \tag{12.1}$$

Für die durchschnittliche Anzahl Wartender gilt (Vorsicht: die (geometrische) Verteilung in (12.1) ist auf den natürlichen Zahlen *inklusive die Null* definiert und damit der Erwartungswert nicht einfach "1 durch Erfolgswahrscheinlichkeit", wie in WTS-4.2.3)

$$E[X] = \frac{\alpha_1}{\phi_1 - \alpha_1} \doteq 2.86. \tag{12.2}$$

Warum haben wir hier die Gleichgewichtsannahme gemacht?

12.3 Optimale Zuteilung von Leistung in einem Betrieb

Gegeben sei ein Produktionsprozess (eine Shopping-Mall, Kundenschalter) mit J Knoten. Wir haben als Verantwortliche für Operations-Research die verfügbare Gesamtleistung GL derart unter die Knoten aufzuteilen, dass mit $\phi_j := \phi_j(n_j)$ folgende *Nebenbedingung* erfüllt ist:

$$\sum_{j=1}^{J} \phi_j = GL \tag{12.3}$$

(keine Leistungs-Reserven). Formeln (12.1) und (12.2) gelten allgemein, und wir gehen davon aus, dass wir die durchschnittlichen Ankunftsraten bei den Knoten $1, 2, \ldots, J$, nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J$ kennen (Messung aus der Vergangenheit). Es muss gelten, dass $\phi_j > \alpha_j$ für $1 \leq j \leq J$, sonst gibt es keinen Gleichgewichtszustand. **Ziel** ist nun:

Minimierung der durchschnittlichen Anzahl Wartender im ganzen System.

Diese durchschnittliche Anzahl Wartender im ganzen System ist wegen (12.2)

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{\alpha_j}{\phi_j - \alpha_j}.$$

Minimierung/Maximierung; dazu noch Nebenbedingungen: Lagrange! Ableiten und Null setzen von

$$L := \sum_{j=1}^{J} \frac{\alpha_j}{\phi_j - \alpha_j} + M(\sum_{j=1}^{J} \phi_j - GL)$$

nach ϕ_j gibt $\forall j$

$$\phi_j = \alpha_j + \sqrt{\frac{\alpha_j}{M}}.$$

Summieren über alle j und auflösen nach M ergibt wegen (12.3)

$$\sqrt{M} = \frac{\sum_{j=1}^{J} \sqrt{\alpha_j}}{GL - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j}.$$

Die optimale Allokation ist demnach:

$$\phi_j = \alpha_j + \frac{\sqrt{\alpha_j}}{\sum_{k=1}^{J} \sqrt{\alpha_k}} \big(GL - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k\big). \tag{12.4}$$

(12.4) kann gut interpretiert werden: Man gibt jedem Knoten j erstmals die (knapp nicht genügende) Leistung α_j, welche der durchschnittlichen Ankunftsrate entspricht. Die verbleibende Leistung $(GL - \sum_{k=1}^{J} \alpha_k)$ wird dann derart aufgeteilt, dass die Knoten mit kleiner Ankunftsrate relativ zu Ihrer Ankunftsrate mehr erhalten als diejenigen mit grosser Ankunftsrate. Warum?

12.4 "Absence of Loops" $\Leftrightarrow$ Poisson-Prozesse

Wir wollen jetzt stochastische Netzwerke dahingehend untersuchen, dass wir uns fragen, von welcher Art die Ströme von Knoten i nach Knoten j sind. Sind es etwa auch Poisson-Prozesse, wie die Zuströme von Aussen? Wir werden in 12.4 nicht mehr Irreduzibilität des Zustandsraums fordern.

Dazu betrachten wir ein stochastisches Netzwerk mit $J = 3$, $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 5$; $p_{12} = p_{13} = 0.5$, $p_{23} = 0.1, p_2 = 0.9$, $p_{31} = 1$. Die Knoten sollen eine sehr hohe Leistung besitzen, nämlich alle konstant 100 pro Sekunde. Wir haben also folgendes Schema:

Was geschieht mit einem Poissonzustrom zu 1 von Rate 10? Ein Individuum aus diesem Strom wird mit Wahrscheinlichkeit 0.45 direkt entlang Link (1,2) zu Knoten 2 gehen und dann das System verlassen. Auch ein Individuum in Knoten 3 wird mit Wahrscheinlichkeit 0.45 direkt über Links (3,1) und (1,2) bei 2 das System verlassen. Man kann sich fragen, ob der Fluss entlang Link (1,2) auch ein Poisson-Prozess ist. Die Berechnung der Rate ist ein wenig umständlich: sicher ist die Rate mindestens 15, da man von Knoten 1 und Knoten 3 entweder direkt oder indirekt über Link (1,2) gehen wird. Aber auch von Knoten 2 mit Zustrom von aussen der Rate 20 wird pro einmaligem Durchgang ein Beitrag von 2 pro Zeiteinheit via Link (1,2) verkehren. Das sind dann schon 17. Des weiteren werden 10 % der Ströme entlang Link (1,2) rezykliert und kommen nochmals. Wie gross ist die durchschnittliche Anzahl Durchgänge entlang Link (1,2) im Gleichgewicht?

Kann der Fluss entlang (1,2) ein Poisson-Prozess sein? Erinnern wir uns, dass *nach Konstruktion* in Definition 8.2 der Poissonprozess die Gedächtnislosigkeit von der Exponentialverteilung erbt. Es sollte also für die Zukunft nicht von Bedeutung sein, ob gerade (dies ist bei einem Poissonprozess sehr wohl möglich!) 500 Durchgänge in einer Sekunde entlang Link (1,2) stattgefunden haben oder nicht. Normal wären ja diese 18.888888. Etwa 10 % dieser 500 werden rezykliert; das sind immerhin 50. Das ist immer noch signifikant mehr als die sonst üblichen 18.888888. Man kann also in diesem Fall von der Vergangenheit auf die Zukunft schliessen. Deshalb kann es kein Poissonprozess sein.

Wir stellen also fest, dass ein Fluss entlang einer Verbindung (i, j) nie ein Poisson-Prozess sein kann, sobald eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass die Individuen die gleiche Verbindung (i, j) nochmals passieren. Dies nennt man in der Fachsprache "*Presence of Loops*".

Es ist überraschend, dass auch gilt:

Der Fluss entlang einer Verbindung (i, j) ist ein Poisson-Prozess, falls die Wahrscheinlichkeit 0 ist, dass ein Individuum dieselbe Verbindung (i, j) nochmals passiert. Dies nennt man in der Fachsprache "*Absence of Loops-Condition*".

Theorem 12.1 [**"Absence of Loops" $\Leftrightarrow$ Poisson-Prozesse**] *Mit obigen Voraussetzungen gilt: Der Fluss entlang einer Verbindung (i,j) ist genau dann ein Poisson-Prozess, wenn die Wahrscheinlichkeit 0 ist, dass ein Individuum die Verbindung mehr als einmal passiert.*

Beweis von Theorem 12.1: "Characterizations of Poisson Traffic Streams in Jackson Queueing Networks", B. Melamed, *Adv. Appl. Prob.* **11**, 422-438 (1979).

□

Bemerkung: Melamed schreibt in obigem Artikel selber: "The positive Poisson traffic results are intuitively "surprising", but their proof presents relatively little combinatorial difficulties. On the other hand, the non-Poisson conjecture is intuitively "obvious" - the non-exit property provides for recycling of customers and therefore should preclude independent increments; its formal proof, however, is apparently more difficult due to sheer combinatorial complexity."

Korollar 12.2 [Austrittsströme sind Poisson-Prozesse] *Mit obigen Voraussetzungen gilt: Die Austrittsströme sind bei jedem Knoten Poisson-Prozesse.*

Beweis von Korollar 12.2:

□

Relativierungen von und Approximationen an Melamed's Resultat

* Man könnte ein **System so hochkomplex** machen (mit sehr vielen Knoten und massenweise Verbindungen), dass man wieder erwarten könnte, das Ströme entlang einzelnen Verbindungen (trotz "Presence of Loops") doch wieder Poisson-Ströme werden. Die Gesetzmässigkeiten, welche durch die "Loops" entstehen, könnten sich ja gegenseitig aufheben, kompensieren oder zur Unkenntlichkeit vermischen. Unter gewissen einschränkenden Annahmen sind derartige (approximativen) Resultate möglich; aber ganz zu einem Poisson-Prozess kann man Gesetzmässigkeiten in einem *endlichen* Netzwerk nicht herauskorrigieren.

* Wenn zudem ein **Knoten praktisch immer ausgelastet** ist - die Wahrscheinlichkeit für keine wartende Kunden sei fast 0, ohne dass das System explodiert - so hat man beinahe wieder ein Poissonprozess als Abgangsprozess von diesem Knoten. Warum?

* Wir haben oben zwei Situationen beschrieben, in denen ein Fluss entlang einer Verbindung beinahe Poissonsch ist. Was heisst aber "beinahe Poissonsch"? Wegen Satz 8.3 a) ist bei einem Poissonprozess X_t die Anzahl der Durchgänge in einer fixen Zeiteinheit von z.B. $[4, 5]$ Poisson-verteilt. Wie wird das beim tatsächlichen Prozess Y_t in der Zeitspanne $[4, 5]$ sein? Wie wird gemessen, wie gross der Abstand zwischen zwei Verteilungen ist? Dazu gibt es mehrere Methoden. Eine gängige ist die

Definition 12.3 [Totalvariationsdistanz d_{TV}] *Seien P und Q Wahrscheinlichkeitsmasse auf den natürlichen Zahlen inklusive die Zahl 0 ($\mathbb{N}_0$). Dann definieren wir die Totalvariationsdistanz zwischen P und Q als*

$$d_{TV}(P, Q) := \sup_{A \subset \mathbb{N}_0} |P(A) - Q(A)|.$$

Um zu messen, wie weit der Prozess Y_t von einem Poissonprozess X_t entfernt ist, kann man also bei Y_t in der Zeitspanne [4,5] die Verteilung der Anzahl Durchgänge entlang einem Link simulieren, von dieser Verteilung den Mittelwert berechnen und dann eine Poisson-Verteilung mit dem gleichen Mittelwert nehmen und mit diesen beiden Verteilungen die d_{TV} berechnen. Es gibt jedoch auch ausgeklügeltere Methoden.

Wir schliessen damit Kapitel 12 ab. In Kapitel 13 werden wir die Markov-Ketten in stetiger Zeit anschauen. Der Poisson-Prozess, die Epidemienmodelle und die stochastischen Netzwerke waren übrigens bereits solche Markov-Prozesse in stetiger Zeit. Sie werden wichtige Beispiele für Kapitel 13 sein.