Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

14 Lehren für's Management & das tägliche Leben III: Zins und exponentielles Wachstum

Zur Erinnerung: mit grossen n gilt:

$$n! > c^n > n^c > \log n.$$

Aus der Analysis I repetieren wir:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$$

für $|x| < 1$. Wir benutzen für kleine x meist $\ln(1+x) \doteq x$ oder für y nahe bei 1: $\ln(y) \doteq y - 1$.

14.1 Warum gibt es geometrisches/exponentielles Wachstum?

In vielen Prozessen der Natur (Zellteilung), Technik (chemische Reaktionen) und Gesellschaft (Wirtschaftswachstum) ist das Wachstum in einer Zeitperiode ein bestimmter Anteil des bis jetzt erreichten Niveaus. In der Sprache der Mathematik (z.B. DGL) können wir hierzu das Modell

$$\dot{y} = \lambda y \tag{14.1}$$

aufstellen. Man bezeichnet dann λ als Wachstumsrate - λ darf aber auch negativ sein. Die Lösung dieser DGL ist

$$y(t) = Ke^{\lambda t}. \tag{14.2}$$

Damit sind wir beim exponentiellen Wachstum angelangt. Dies ist ein Modell für stetige Zeit. Will man aber zum Beispiel die Zellteilung in der Natur derart modellieren, dass die Zeiteinheit Generationen von Zellen sind, dann wird man pro Generation eine Verdopplung haben und folgendes diskrete Modell aufstellen:

$$Z(n) = 2Z(n-1)$$

oder analog (14.1)

$$\Delta Z(n) := Z(n) - Z(n-1) = 1 * Z(n-1).$$

Dies führt zur analogen Form von (14.2) mit $\alpha = 2$

$$Z(n) = K\alpha^n = Ke^{(\log \alpha)n}.$$

14.2 Approximative Formel für die Verdopplungszeit für's tägliche Leben

Zur Zeit (2004) beeindrucken uns Volkswirtschaften wie China oder Russland mit Wachstumszahlen von 7% oder gar 9-10 %. Wir wissen, dass der Lebensstandard in diesen Ländern sehr tief ist. Es wird also trotz solchen Zahlen länger dauern, bis diese Länder einen mit uns vergleichbaren Wohlstand haben. Doch wie lange? Dazu gibt es eine einfache approximative Formel für die Verdopplungszeit, welche umso besser ist, je kleiner die Wachstumszahlen sind:

Regel 14.1 [70/Rate$\doteq$Verdopplungszeit] *Bei einer Wachstumsrate von r Prozent pro Zeiteinheit dauert es etwa* $70/r$ *Zeiteinheiten bis zur Verdopplung. Exakt ist übrigens*

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log(1 + \frac{r}{100})}.$$

Ebenfalls gut zu wissen: $2^{10} = 1024 \doteq 1000$.

Beweis:

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{T_2} = 2 \Leftrightarrow T_2 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2 \Rightarrow T_2 \frac{r}{100} \doteq 0.7 \Leftrightarrow T_2 r \doteq 70 \Leftrightarrow T_2 \doteq 70/r.$$

$\square$

Wenn die russische Wirtschaft also um 7 % pro Jahr wächst, so dauert es gemäss unserer Regel etwa 10 Jahre bis zu einer Verdopplung. Der genaue Wert ist etwa 10.24 Jahre. Ich erwähne hier im Zusammenhang mit der Diskussion um die Altersvorsorge auch, dass es sehr wohl darauf ankommt, ob CHF 1.- mit 2 % oder mit 4 % verzinst wird: die Verdopplungszeit ist etwa halb so gross beim zweiten Zinssatz.

Es gibt bei komplexen sozialen Systemen (Firmen oder ganzen Volkswirtschaften) eine Regel des "gesunden Menschenverstandes", die besagt, dass derart komplexe Systeme nicht "gesund" während einer sehr langen Zeitperiode mit mehr als 10 % pro Jahr wachsen können. Die Geschichte gibt dieser Regel meines Erachtens Recht. Bei einem Wachstum von mehr als 10 % pro Jahr während einer längeren Zeitperiode gibt es unter anderem Probleme mit der Effizienz und ungesunde Verhaltensänderungen der Wirtschaftssubjekte.

14.3 Vorteil der "Log-Returns"

In der Praxis rechnet man (bei kleinen Zahlen) gerne: $(1 + 2\%) - 2\% \doteq 1$. Ich muss hier wohl nicht darauf aufmerksam machen, dass diese Formel so nicht exakt stimmt. Um solche Rechenschritte doch zu erlauben, hat man in der modernen Finanzmathematik ein anderes Untersuchungsobjekt als die Renditen (Zinsen) gewählt.

In der modernen Finanzmathematik werden nicht die Zinsen (Renditen) r pro Jahr intensiv studiert, sondern die sogenannten Log-Returns. Was ist dabei der Unterschied und wie gross ist er? Seien dazu $S_0, S_1, \ldots, S_t$ Aktienkurse einer Firma zur Zeit t (zum Beispiel mit Jahren als Zeitperiode). Die Rendite (der Zins) ist dann von Jahr zu Jahr

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}. \tag{14.3}$$

In der Finanzmathematik betrachtet man dazu lieber die Log-Returns:

$$\log(S_t/S_{t-1}) = \log(S_t) - \log(S_{t-1}). \tag{14.4}$$

Auf dem Übungsblatt ist die Verteilung dieser Log-Returns im Modell von Samuelson (Modell von Black-Scholes) zu berechnen. Bei kleinen Renditen (also $S_t \doteq S_{t-1}$) ist der Unterschied zwischen (14.3) und (14.4) klein, denn mit $x := S_t/S_{t-1}$ haben wir

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = x - 1 \doteq \log x = \log(S_t/S_{t-1}).$$

Wegen (14.4) ist jetzt übrigens auch klar, dass man bei Log-Returns sehr wohl die Rechnungen am Anfang machen darf:

$$\begin{aligned}\log(S_t/S_{t-2}) &= \log(S_t) - \log(S_{t-2}) = \log(S_t) - \log(S_{t-1}) + \log(S_{t-1}) - \log(S_{t-2}) \\ &= \log(S_t/S_{t-1}) + \log(S_{t-1}/S_{t-2}).\end{aligned}$$

Die Probleme mit Zins *und Zinseszins* haben wir hier also nicht! Man darf die Log-Returns einfach addieren oder subtrahieren.

14.4 Warum viele Zahlen mit einer "1" beginnen

Das exponentielle oder geometrische Wachstum hat eine weitere Konsequenz, die einmal beachtet und begriffen trivial ist: Wenn Sie Aktienkurse in der Zeitung studieren, werden Sie feststellen, dass signifikant mehr Kurse mit einer "1" als führender Ziffer beginnen als jede 9te Zahl, wie naiv zu erwarten. Der Grund ist das exponentielle Wachstum. Es dauert länger, von 1 nach 2 zu kommen als von 2 nach 3 und so weiter (der Spruch "Die erste Million verdienen war am schwierigsten" hat auch ein bisschen damit zu tun... - kann's aber noch nicht selber bestätigen). Sie berechnen bitte in einer kleinen Übungsaufgabe auf Blatt 11 wie die Verteilung der Ziffern 1 bis 9 ist. Hat man dann diese theoretische Verteilung, kann man diese einsetzen, um zu prüfen, ob Personen, welche dieses Phänomen nicht kennen, zum Beispiel bei der Steuererklärung schummeln oder nicht. Wenn unter anderem zu wenig "1" vorkommen, sollte man einen genaueren Blick auf die Steuererklärung werfen. Solche Tests werden übrigens in der Tat eingesetzt.

14.5 Stetige und diskrete Verzinsung, Diskontieren

Wenn Sie Ihr Geld auf die Bank bringen, erhalten Sie bekanntlich einen Zins r (meist etwa 1-4 % pro Jahr). In der Finanzmathematik will man den Zins nicht nur Ende Jahr dazuschlagen, sondern stetig verzinsen. Damit kann man dann auch innerhalb des Jahres beliebige Zeit-Intervalle (problemlos) verzinsen. Dazu benutzt man die Exponentialfunktion. Wir haben also **diskret** nach einem Jahr bei Startkapital K_0:

$$K_0(1+r)$$

und nach n Jahren $K_0(1+r)^n$. In **stetiger** Zeit haben wir analog

$$K_0 e^R$$

und nach n Jahren $K_0 e^{Rn}$; meist braucht man stetig "t" für die Zeit (statt "n"). Natürlich sind bei gleichem Jahres-Zins R und r nicht gleich: damit $e^R = (1+r)$, muss

$$R = \ln(1+r)$$

gelten (wieder ist damit bei kleinen Zinsen R fast gleich r).

***

Wenn wir 1.- in 2.5 Jahren erhalten und der risikolose Zinssatz (Bankkonto) ist R (stetig), dann werden wir diesen Franken **abdiskontieren**: er hat für uns heute nur

$$e^{-2.5R} * 1.-$$

wert. Wir könnten nämlich diesen Betrag heute einfach auf ein Bankkonto einzahlen und haben dann in 2.5 Jahren 1 Franken.

Bitte addieren Sie nicht einfach Franken Heute und Franken in der Zukunft (oder Vergangenheit), ohne die Verzinsung (oder Diskontierung) zu berücksichtigen. Zu *welchem* Zinssatz Sie dies machen, darüber können wir diskutieren, aber nicht ob es gemacht wird oder nicht. Hingegen ist es didaktisch oftmals sehr klug, einfach den Zinssatz 0 zu setzen, weil damit gewisse Formeln in der Finanz- und Versicherungsmathematik sehr elegant werden. Aber dann sagt man immer "vorerst mal mit Zins=0".

14.6 Für ÖkonomInnen: Regression mit logarithmierten Daten und die Preiselastizitäten

In der Makro-Ökonomie versucht man manchmal mit ökonometrischen Methoden diverse volkswirtschaftliche Grössen zueinander in Beziehung zu bringen. Beispielsweise sei $D(t)$ die Nachfrage eines Gutes (**D**emand), $P(t)$ der **P**reis des Gutes jeweils zur Zeit t. Da diese Grössen exponentiellen Charakter haben, kann man (nicht zwingend) folgenden Regressionsansatz wählen:

$$\log(D(t)) = \alpha + \beta \log(P(t)) \tag{14.5}$$

Ohne viel von Wirtschaftswissenschaften zu verstehen, vermuten wir eine negative Korrelation: je höher der Preis, desto kleiner die Nachfrage (dies muss übrigens nicht so sein - es gibt zum Beispiel den "Snob"-Effekt). Wir wollen unser Augenmerk auf einen anderen Punkt richten, nämlich auf das β. Dieser Koeffizient hat nämlich in Modell (14.5) eine grosse theoretische Bedeutung. Dazu definieren wir kurz:

Definition 14.2 [Direkte Preiselastizität] *Sei dP die Preisänderung, dD die Mengenänderung, P der bisherige Preis, D die bisherige Menge. Dann bezeichnet man*

$$El := \frac{dD}{dP}\frac{P}{D}$$

als direkte Preiselastizität. In der Theorie können wir hierzu die Differenzialrechnung einsetzen und definieren:

$$El := \frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dP}{P}}.$$

Die direkte Preiselastizität ist das Verhältnis einer prozentualen Nachfrageänderung zu einer prozentualen Preisänderung.

In (14.5) können wir jetzt folgendermassen fortfahren:

$$\frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dP}{P}} = \frac{d\log D}{d\log P} = \beta.$$

Also haben wir bei logarithmierten Daten in (14.5) als Koeffizienten der Regression stets die direkte Preiselastizität.