Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

16 Crash Course Optionen: Pricing & Hedging in diskreter Zeit

Literatur Kapitel 16

* Uszczapowski: Kapitel 2, 3, 6
* Pliska: Kapitel 1.4
* Lamberton & Lapeyre: Kapitel 1
* Baxter & Rennie: Kapitel 1, 2

In diesem Kapitel werden diskrete Modelle vorgestellt. Im engeren Sinne wird es um das sogenannte Pricing und Hedging von Optionen gehen. StudentInnen erleben diese Modelle immer wieder als sehr unrealistische Abbilder der Realität. Es gibt aber zwei gute Gründe, weshalb diese Modelle doch besprochen werden sollten:

1. In einem sehr einfachen mathematischen Umfeld können praktisch alle Prinzipien bereits erklärt werden, welche in stetiger Zeit einen enormen mathematischen Apparat benötigen.
2. Diese Methoden werden zum Teil bei ganz bestimmten Problemen auch eingesetzt.

16.1. Optionen; Call und Put, Long und Short

Wer eine **Kaufoption** (=Call Option) besitzt, hat das Recht (aber nicht die Pflicht!)

* einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert** (Aktie, Währung, Edelmetall, Liegenschaft)
* zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,
* während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option) der Option zu **kaufen**.

Wer eine **Verkaufsoption** (=Put Option) besitzt, hat das Recht (aber nicht die Pflicht!)

* einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert**
* zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,
* während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option) der Option zu **verkaufen**.

Wer eine Option kauft, der hat eine **Long-Position** oder, wie man auch sagen kann: Er ist die Option long. Wer eine Option verkauft, der hat eine **Short-Position** oder wie man sagt: Er ist die Option short.

Es werden vorwiegend amerikanische Optionen gehandelt!

16.2 Futures und Forwards

Ein **Future**-Kontrakt ist eine verbindliche Vereinbarung zwischen zwei Kontrahenten,

* eine bestimmte Anzahl oder Menge und
* eine bestimmte Art eines zugrundeliegenden Objekts
* bei Fälligkeit des Kontrakts
* zu einem im voraus vereinbarten Preis

zu kaufen und abzunehmen - wenn der Future gekauft wurde

oder

zu verkaufen und zu liefern - wenn der Future verkauft wurde.

Eine sogenannte Long-Position verpflichtet dazu, bei Fälligkeit des Future-Kontrakts den vereinbarten Preis zu zahlen und die Lieferung des zugrundeliegenden Objekts abzunehmen. Die korrespondierende Short-Position verpflichtet zur Lieferung des zugrundeliegenden Objekts gegen Erhalt des vereinbarten Preises. Im Gegensatz zu Futures, welche über eine Börse handelbar sind, zeichnen sich sogenannte **Forwards** dadurch aus, dass sie individuelle Vereinbarungen, gleichsam massgeschneiderte Spezialabsprachen zwischen Käufer und Verkäufer darstellen. Das Ziel sowohl von Futures wie auch von Forwards ist es, die Ungewissheit zukünftiger Preisentwicklungen zu eliminieren und somit Geschäftsvorhaben auf eine sichere Kalkulationsgrundlage zu stellen.

Damit unterscheiden sich Futures von Optionen. Bei Optionen geht nur der Inhaber einer Short-Position eine Verpflichtung ein, nicht aber, wie bei den Futures, auch der Inhaber einer Long-Position. Im Gegenteil, die Erfüllung des Geschäfts wird bei Optionen gerade durch die freie Entscheidung des Optionsinhabers, auf Ausübung entweder zu verzichten oder aber zu bestehen, bedingt; bei Futures hat die Erfüllung unbedingt zu erfolgen. Bei Futures sind eher Rohstoffe, landwirtschaftliche Produkte und Währungen die zugrundeliegenden Basiswerte, bei Optionen hauptsächlich Aktien.

Wir werden uns in diesem Skript nur mit Optionen und nicht weiter mit Futures/Forwards befassen.

16.3 Warum aber gibt es derivative (=abgeleitet, vom Basiswert) Finanzprodukte (Optionen und Futures)?

* Spekulation wird vereinfacht
* risikoaverse Menschen können ihre Risiken los werden, genauer:
* persönliches Risikoprofil kann eher getroffen werden
* sichere Kalkulationsgrundlage
* Risiken können (fast) beliebig aufgespalten werden
* negative Korrelationen können besser ausgenutzt werden.

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Lebenslage, Vermögensstruktur, Risikotoleranz und vielfältiger sonstiger Umstände haben Teilnehmer am Wirtschaftsleben oft einander ergänzende Bedürfnisse, Interessen und Fähigkeiten. Es ist Aufgabe der Finanzmärkte, diese Menschen auf effiziente und kostengünstige Weise zusammenzubringen, so dass die Ersparnisse/Gelder einer Gruppe (Investoren) anderen Gruppen (Kapitalnehmern) zur Finanzierung von Vorhaben zugänglich gemacht werden. Dabei ist es von grossem volkswirtschaftlichem Nutzen, wenn diese Vermittlungswirkung der Finanzmärkte dafür sorgt, dass investibles Kapital nicht brachliegt und zur Leistungserstellung bereitstehende Menschen und Ressourcen nicht wegen unzureichender Finanzierung unproduktiv bleiben müssen.

Wir werden in diesem Skript der Einfachheit halber Dividenden, Steuerfragen und Kommissionen nicht berücksichtigen. Letztere sind auch sehr stark vom Börsenplatz und Bankhaus abhängig.

16.4 Arbitrage

Eine zentrale Voraussetzung, welche in der Finanzmathematik häufig gemacht wird, ist, dass es keine **Arbitragemöglichkeiten** gibt. Die genaue mathematische Ausformulierung des Begriffs "Arbitrage" findet man in der oben angegebenen Literatur. Arbitrage bedeutet, dass man mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn machen kann, ohne Risiko eines Verlustes. Wir werden kurz zwei Beispiele anführen (Währungen und in 16.5 die sog. Put-Call-Parität):

Wenn man (unendlich schnell) CHF in \$, \$ in Euro und dann wieder Euro in CHF wechseln kann und dabei Gewinn macht, dann ist das Arbitrage. Wenn viele Marktteilnehmer diese Diskrepanz bemerken und ausnützen, werden sich die Preisrelationen aber wegen den Gesetzen von Angebot und Nachfrage auf dem fairen Niveau einpendeln.

16.5 Put-Call-Parität

Betrachten wir eine europäische Call-Option, der eine Aktie als Basiswert zugrundeliegt. Den Preis der Aktie zur Zeit t bezeichnen wir mit S_t. Sei T die Laufzeit und K der Ausübungspreis. Jetzt ist es klar, dass wenn (zum Ausübungszeitpunkt) $K > S_T$, der Inhaber der Kaufoption wohl kaum seine Option einlösen wird. Wenn er die Aktie kaufen will, tut er dies direkt am sogenannten Kassamarkt und lässt die (wertlose) Option uneingelöst verfallen. Ist aber $S_T > K$, so macht der Besitzer der Option einen Gewinn von $S_T - K$; er wird die Option einlösen und dann die Aktie wieder verkaufen. Der Wert der Option ist also bei Verfall

$$(S_T - K)_+ := \max(S_T - K, 0). \tag{16.1}$$

Wenn die Option ausgeübt wird, muss der ehemalige Verkäufer der Option fähig sein, die Aktie zum Preis K zu verkaufen. Es wäre sehr praktisch für den Verkäufer der Option, wenn er bis zum Zeitpunkt T einen Betrag von genau $(S_T - K)_+$ besitzt. Die Option wird aber zum Zeitpunkt 0 herausgegeben. Man kennt dann S_T natürlich nicht. Daraus ergeben sich 2 Fragen:

1. Wieviel soll die Option kosten? Welchen Preis (=Prämie) geben wir zur Zeit 0 einem Wertpapier, welches zur Zeit T den Wert $(S_T - K)_+$ besitzt? Dies ist das Problem der **Optionspreisbewertung**.
2. Wie sollte der Verkäufer der Option, welcher die Prämie zur Zeit 0 erhält, sich verhalten, damit er am Schluss, zur Zeit T (ohne Risiko!) einen Betrag von $(S_T - K)_+$ besitzt? Das ist das Problem des **Hedgings** einer Option.

Um die obigen Fragen (in Vorlesungen der Finanzmathematik) beantworten zu können, muss man Modellannahmen machen: die zentrale Annahme ist die, dass in liquiden Finanzmärkten keine Arbitragemöglichkeiten bestehen. Es soll also nicht möglich sein, risikolos Gewinne zu machen. Diese Annahme ist wenig umstritten. Wir werden mit dieser Annahme nebenbei nachfolgend eine einfache Relation zwischen den Preisen von europäischen Call- und Put-Optionen herleiten:

Sowohl der Put wie auch der Call sollen Laufzeit T haben (und bei 0 beginnen), Ausübungspreis K haben und den selben Basiswert (zum Beispiel eine Aktie) mit Wert S_t zur Zeit t besitzen. Des weiteren nehmen wir an, dass man beliebig Kredit aufnehmen kann oder ein Guthaben haben kann und zwar zu einem konstanten Zinssatz r. Seien nun C_t und P_t die Preise der Call- und Put-Option zur Zeit t, wo $t \in [0, T]$. Wir werden zeigen, dass wegen der Absenz von Arbitragemöglichkeiten die folgende sogenannte "Put-Call-Parität" erfüllt sein muss $\forall\, t \in [0, T]$:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{16.2}$$

Bemerkung: Dank dieser Relation reicht es im wesentlichen, sich auf die Berechnung der Preise von Call-Optionen zu konzentrieren!

Ist diese Relation verletzt, so gibt es Arbitragemöglichkeiten: Wir werden hier nur die eine Richtung zeigen: Nehmen wir doch mal an, zur Zeit t haben wir folgende Relation (der andere Fall ist als Übung gestellt: Blatt 11):

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Wir stellen also diese Verletzung der Put-Call-Parität fest und wollen dies ausnützen. Dies geschieht in der folgenden Weise: Wir kaufen zur Zeit t einen Put und eine Aktie und verkaufen einen Call. Damit haben wir zur Zeit t einen Bargeldbestand (eventuell negativ, also eine Schuld) von

$$C_t - P_t - S_t.$$

Falls dieser Wert positiv ist, investieren wir ihn zum Zinssatz r bis zur Zeit T; andernfalls mussten wir soviel Geld zum Zinssatz r aufnehmen, um diese Transaktion zu finanzieren. Zur Zeit T sind zwei Fälle möglich:

* $S_T > K$: Der Call wird ausgeübt, wir liefern die Aktie zum Preis K und lösen unser Konto auf. Wir haben am Schluss also einen Betrag von

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

* $S_T \leq K$: Wir üben den Put aus und lösen unser Konto auf. Wir haben am Schluss also einen Betrag von

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

Somit haben wir also ohne Risiko, deterministisch, einen Gewinn erwirtschaftet. Dies ist ein klarer Fall von Arbitrage.

Derartige Arbitrage-Überlegungen führen zwar zu vielen interessanten Gleichungen, welche erfüllt sein müssen. Sie reichen aber für sich nicht aus, um den Wert einer Option genau angeben zu können. Dazu ist (im stetigen Fall) die Black-Scholes-Formel da! In vielen ökonomischen Lehrbüchern wird die Herleitung der Black-Scholes-Formel aus Arbitrage-Überlegungen allein durchgeführt. Dies ist unmöglich!

Wir haben die Put-Call-Parität gleich in stetiger Zeit bewiesen. Der Beweis für diskrete Zeit geht genau gleich; die Formel lautet dort: $\forall\, n \in \{0, \ldots, N\}$:

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

16.6 Hedging (und Pricing) im einfachsten Fall

Zur Motivation eines zentralen Punktes der Finanzmathematik entwickeln wir in der Stunde ein schönes Beispiel aus dem Buch von Martin Baxter und Andrew Rennie.

16.7 Wie geht es in einer Vorlesung zur Finanzmathematik weiter

Wenn man zum ersten Mal das Problem des Pricing's einer Option hört, so wird man als MathematikerIn wohl zuallererst folgenden Vorschlag machen, welcher sich an einer Versicherungslösung orientiert und auf das Gesetz der grossen Zahlen hofft (der Zufall sei uns bitte gnädig gesinnt...): Man verkaufe sehr viele Optionen mit diversesten Basiswerten, Laufzeiten, Ausübungspreisen und das über Jahre hinweg. Man addiere noch ein $\epsilon > 0$ auf die Prämie. Jetzt kann man hoffen, dass man im Durchschnitt dann schon einen Gewinn macht. Diejenigen Male, wo man sehr viel zahlen muss und wo man sehr viel einnimmt, sollten sich zu Gunsten des Bankhauses bitte mehr als aufheben.

Diese "Methode" wird wohl früher in der einen oder anderen Form tatsächlich eine Rolle gespielt haben. Wir haben aber bereits in 16.6 anhand eines Beispiels gesehen, dass wir viel ambitiöser sind: Wir wollen jedes *einzelne* Geschäft (mit jedem Basiswert, Laufzeit, Ausübungspreis) ohne Risiko abwickeln können - und nicht etwa erst im Durchschnitt mit Gewinn abschliessen! Um das genau zu verstehen und zu glauben, muss man viel mathematische Vorarbeit leisten.

Wir werden lediglich in Kapitel 17 (einem weiteren Crash Course) die Brownsche Bewegung anschauen und kurz antippen, wie damit Finanzmathematik gemacht wird. Für Personen, welche sich danach weiter in diesem Gebiet vertiefen wollen, empfehle ich als erste Lektüre den Baxter & Rennie. Personen, welche gute Kenntnisse in Funktionalanalysis haben und eine bessere Fundierung der Wahrscheinlichkeitstheorie genossen haben als bei mir (ich mache so wenig Masstheorie und Abstraktion wie möglich und so viel wie nötig), empfehle ich danach noch den Lamberton & Lapeyre.