Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

17 Crash Course Brownsche Bewegung (stetige Zeit, stetiger Zustandsraum); Pricing & Hedging von Optionen in stetiger Zeit

Literatur Kapitel 17

* Uszczapowski: Kapitel 3
* Lamberton & Lapeyre: Kapitel 3, 4, 8
* Baxter & Rennie: Kapitel 3

Wir geben in diesem Kapitel nur einen Crash-Course in Brownsche Bewegung (BB). Begriffe wie "Filtration" und genaue masstheoretische Formulierungen lassen wir weg. Die Aussagen in diesem Kapitel sind also mit Vorsicht zu geniessen. Normalerweise braucht man mehr als zwei Semester vierstündige Vorlesungen in diesem Gebiet, um mathematisch sauber zu diesen Resultaten zu gelangen. Literatur dazu findet man auf www.math-jobs.com/lit.html $---->$ z.B. unter "Options & Futures" das Buch "Brownian Motion and Stochastic Calculus by I. Karatzas and S.E. Shreve. Springer 1997". Dort findet man auch die Beweise, welche wir hier auslassen.

Die Brownsche Bewegung wird in der Finanzmathematik in Modellen für Aktien, Wechselkurse und Obligationen gebraucht. In der Physik wird die BB zur Modellierung der Bewegung eines Teilchens (Molekül) in einer Flüssigkeit oder einem Gas eingesetzt; die Bewegung kommt dann durch Zusammenstösse von Molekülen zustande. In dem Fall hat man eine Bewegung im $\mathbb{R}^3$. Die Brownsche Bewegung nennt man auch Wiener-Prozess. Der Name "Brownsche Bewegung" stammt vom schottischen Botaniker Robert Brown (1773-1858). Die Herkunft des Namens wird zwar korrekterweise meist mit Herrn Brown in Verbindung gebracht aber mit falscher Begründung. Die Geschichte der Herkunft des Namens findet man auf www.sciences.demon.co.uk/wbbrowna.htm.

17.1 Anschauliche Motivation: Konvergenz von "S_n" gegen die BB

Sei $(Y_i)_{i\geq 1}$ eine iid Folge von Zufallsgrössen mit $P[Y_1 = 1] = P[Y_1 = -1] = 0.5$. Wir definieren für $n \geq 0$: $S_0 := 0$ und

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Wir wissen, dass sich dieses S_n innerhalb des Intervalles $[-n, n]$ bewegt. $E[S_n] = 0$ und $V[S_n] = n$ für alle $n \geq 0$. Für die Standardabweichung gilt somit $sd[S_n] = \sqrt{n}$. Der Prozess (S_n) macht bei allen Zeitpunkten n einen Sprung von Absolutbetrag 1. Wir wollen jetzt einen Prozess haben, der $P-fs$ keine Sprünge hat und sich nicht nur bei den natürlichen Zahlen bewegt. Dies könnte erreicht werden, indem wir den Prozess zusammenstauchen (die Zeiteinheit immer kleiner wählen); wir betrachten exemplarisch und Œ das Intervall $t \in [0, 1]$, alles Nachfolgende gilt aber auch für $t > 1$:

$$X_t^{n,vorl.} := S_{[nt]}. \tag{17.1}$$

Das Intervall $[0, 1]$ ist jetzt in n Teile unterteilt, und immer bei $t = i/n, 1 \leq i \leq n$, gibt es einen Sprung mit Absolutbetrag 1. Das Problem an (17.1) ist:

$$sd[X_1^{n,vorl.}] = \sqrt{n}.$$

Wir wollen, wie im Titel zu 17.1 angegeben, zu einer Konvergenzaussage kommen. Dann darf der Limes-Prozess nicht explodieren. Deshalb arbeiten wir mit

$$X_t^n := \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}. \tag{17.2}$$

Auf dem Handout sehen Sie Realisationen mit diversen n. Mathematisch nicht ganz präzise ausgedrückt: wenn jetzt $n \to \infty$, so konvergiert dieses $(X_t^n)_{t\geq 0}$ gegen ein $(X_t)_{t\geq 0}$, welches wir die BB nennen. Wir können von (17.2) mit endlichem n einige Resultate herleiten, welche für X_t dann auch gelten werden (siehe nachfolgende Theoreme):

1. Unabhängigkeit der Zuwächse: Mit $t > s$ gilt: $X_t^n - X_s^n$ ist unabhängig von X_s^n.

2. Stationarität der Zuwächse: Wenn $t \geq s$, dann haben $X_t^n - X_s^n$ und $X_{t-s}^n - X_0^n$ die gleiche Verteilung.

3. X_t^n ist (verschoben, nicht-normiert) binomial-verteilt.

Wir wollen beim 3. Punkt noch ein wenig verweilen. Es gilt ja mit $t = 1$

$$X_1^n := \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}}. \tag{17.3}$$

Dieser Ausdruck konvergiert in Verteilung wegen WTS-Theorem 5.4 (CLT) gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse.

17.2 Definition der BB

Definition 17.1 [Brownsche Bewegung (BB)] *Eine Brownsche Bewegung (BB) ist ein reellwertiger, stetiger stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\geq 0}$ *mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Mathematischer:*

1. *Stetigkeit: P-f.s. gilt: die Abbildung $s \mapsto X_s(\omega)$ ist stetig.*
2. *Unabhängigkeit der Zuwächse: Wenn $s \leq t$, so ist $(X_t - X_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u | u \leq s\}$.*
3. *Stationarität der Zuwächse: Wenn $s \leq t$, dann haben $X_t - X_s$ und $X_{t-s} - X_0$ die gleiche Verteilung.*

Ist $(S_n)_{n\geq 0}$ selber eine BB?

Ist ein Poisson-Prozess der Rate $\lambda > 0$ eine BB?

Wenn man obige Definition liest, so denkt man sich vielleicht, eine BB sei "ein ziemlich beliebiger Prozess; praktisch alle Prozesse in stetiger Zeit seien demnach BB". Es ist ein ziemlich überraschendes Resultat, dass mit obiger Definition nicht irgendein beliebiger Prozess beschrieben ist, sondern dass er im Gegenteil sehr genaue Konturen hat. Es gilt nämlich folgendes Theorem:

Theorem 17.2 [Verteilungsgesetz der BB] *Wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ eine BB ist, so gilt: $(X_t - X_0)$ ist eine $\mathcal{N}(rt, \sigma^2 t)$-Zufallsgrösse. Dabei sind r und $\sigma, \sigma > 0$, reelle Konstanten.*

Beweis von Theorem 17.2 Der Beweis findet sich in "Gihman, I.I. und Skorohod, A.V., *Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires*, Mir, 1980."

Bemerkung 17.3 Wir nennen eine BB die Standard-Brownsche Bewegung, wenn gilt: $X_0 = 0$ P-f.s., $E[X_t] = 0$ und $E[X_t^2]) = t$. In obigem Theorem ist damit einfach $r = 0$ und $\sigma = 1$ zu setzen. Wir werden unter BB immer diese Standard-Brownsche Bewegung verstehen, ausser wir definieren explizit eine andere BB.

17.3 Weitere Resultate, Rekurrenz/Transienz der BB im $\mathbb{R}^k$

Die folgenden Resultate müssten mathematisch genauer ausformuliert werden. Mit den bisherigen Vorkenntnissen lassen sie sich jedoch gut nachvollziehen. Man orientiere sich dabei v.a. an Teil 17.1.

Theorem 17.4 [Weitere Eigenschaften der BB] *Die BB hat folgende weitere Eigenschaften:*

a) Ein Pfad der BB ist P-fs stetig, aber nirgends differenzierbar.

b) BB ist Rekurrent auf $\mathbb{R}$ (kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 zurück zum Nullpunkt, und geht ebenso mit Wahrscheinlichkeit 1 zu jedem vorgegebenen Punkt hin; vgl. RW).

c) Sobald die BB an einem Punkt ankommt (z.B. 0), wird sie innert (beliebig kleiner, positiver) endlicher Zeit diesen Punkt gleich unendlich oft verlassen und wieder besuchen.

d) Seien $X_t^{(1)}$, $X_t^{(2)}$ zwei unabhängige BBs. Dann nennen wir $X_t^{(due)} := (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ eine zweidimensionale BB. Diese wird mit Wahrscheinlichkeit 1 jeden noch so kleinen, vorgegebenen ϵ-Ball im $\mathbb{R}^2$ besuchen (Rekurrenz im $\mathbb{R}^2$; vgl. RW). Einen vorgegebenen Punkt z.B. $(0,0)$ wird dieses $X_t^{(due)}$ nach Zeit 0 nie (wieder) besuchen mit Wahrscheinlichkeit 1.

e) Seien $X_t^{(1)}$, $X_t^{(2)}, X_t^{(3)}$ drei unabhängige BBs. Wir nennen $X_t^{(tre)} := (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)})$ eine dreidimensionale BB. Diese wird nur noch mit Wahrscheinlichkeit kleiner 1 einen vorgegebenen "ϵ"-Ball im $\mathbb{R}^3$ (wieder) besuchen, wenn die BB ausserhalb dieses Balls ist (nicht auf dem Rand) (Transienz im $\mathbb{R}^3$; vgl. RW). Einen vorgegebenen Punkt z.B. $(0,0,0)$ wird dieses $X_t^{(tre)}$ nach Zeit 0 nie (wieder) besuchen mit Wahrscheinlichkeit 1.

f) Die BB ist selbstähnlich.

17.4 Modellierung von Aktienkursen

Gleichung (17.4) ist eine sogenannte stochastische Differentialgleichung:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dX_s). \tag{17.4}$$

Dabei ist X_s eine BB. Diese stochastische Differentialgleichung (17.4) wird häufig (fast immer) in *symbolischer* Form folgendermassen geschrieben:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dX_t),\ S_0 = x_0. \tag{17.5}$$

Nochmals: dies ist nur eine Schreibweise! Es geht nicht darum, dass man eine Funktion, welche nirgends differenzierbar ist (Theorem 17.4 a)), doch irgendwie ableiten kann. Mit Gleichungen wie (17.5) ist *immer* die Integralform (17.4) gemeint.

Wie bei deterministischen Differentialgleichungen gibt es Sätze zu Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen; die eindeutige Lösung hier ist

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t). \tag{17.6}$$

Im Gegensatz zu obigen beiden Formeln (17.4, 17.5) kann man diesen Ausdruck verstehen, sobald man weiss, was eine BB ist. μ nennt man die Drift und σ ist die Volatilität. Modell (17.6) ist das Modell von Samuelson für die Modellierung von Aktienkursen S_t (vgl. Handout). Es wird fälschlicherweise auch Modell von Black-Scholes genannt, weil in Modell (17.6), und *nur* dort, die Nobelpreis-Formel von Black-Scholes gilt. Diese Formel wollen wir hier ohne Erklärungen angeben: Für eine europäische Call-Option mit Strike K, Restlaufzeit θ, momentanem Preis des Basiswerts von x, risikolosem Zinssatz von r und Volatilität σ definieren wir

$$d_1 := \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

und $d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$.

Die Formel von Black-Scholes lautet dann

$$C_t = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2),$$

wobei $N(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-u^2/2} du$. In einer Übung auf Blatt 13 werden wir sehen, wie man dann Pricing und Hedging hier anwendet. Damit ist dann die Finanzmathematik in dieser Vorlesung abgeschlossen.