Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

18 Lehren für's Management & das tägliche Leben IV: "Klotzen, nicht Kleckern!"

Ich danke hiermit noch Prof. Dr. Albert A. Stahel für kritische Durchsicht dieses Kapitels.

Die Mathematik und ihre Anwendungen haben schon immer im Krieg eine grosse Rolle gespielt. Beispiele:

* Ballistik: mindestens seit es Kanonen gibt
* Kryptologie
* vielfältige Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften und Computertechnik
* Methoden des Operations-Research in Logistik (v.a. US-Army in WW II)
* Spieltheorie zur Zeit des kalten Krieges
* Mathematische Modelle für Simulation von Konflikten und Kriegen

Pazifisten seien ermuntert, sich diese Aspekte auch anzuschauen. Manche militärische Führer waren nicht besonders intelligent - wenn man ein wenig von Militärwissenschaften versteht, kann das also auch für die politische Debatte nicht schaden; es eröffnet ein neues "Angriffsfeld".

Ich greife an Literatur ein paar wenige Bücher heraus:

1. "Mathematics and War", Hrsg. von B. Booss-Bavnbek und J. Hoyrup, Birkhäuser, ISBN 3-7643-1634-9, 2003
2. "Klassiker der Strategie - eine Bewertung", von A. A. Stahel, vdf, ISBN 3-7281-2861-9, 2003
3. "Simulation von Konflikten und Kriegen", Hrsg. A. A. Stahel und andere, vdf, ISBN 3-7281-2785-X, 2002

Zum Gebiet DGL und Stochastik passt am ehesten Buch 3. Historisch ist sicher das 2. Buch am interessantesten. Ein axiomatischer Aufbau von Militärstrategie gibt es weder in einem dieser 3 Bücher, noch kenne ich ein Buch, welches dies so anbietet - glaube auch nicht, dass dies existiert. Es ist auch nicht so, dass diese Wissenschaft eine exakte Wissenschaft ist. Ich erlaube mir in diesem Zusammenhang Helmut von Moltke (1800-1891, dt. Generalstabschef) zu zitieren (in 2. auf Seite 192): "Die Lehren der Strategie gehen wenig über die ersten Vordersätze des gesunden Verstandes hinaus; man darf sie kaum eine Wissenschaft nennen; ihr Werth liegt fast ganz in der konkreten Anwendung. ... So wird der Krieg zur Kunst, einer solchen freilich, der viele Wissenschaften dienen. Diese letzteren machen bei Weitem noch nicht den Feldherrn, aber wo sie demselben fehlen, müssen sie durch andere ersetzt werden." Wir werden jetzt ein mathematisches Modell vorstellen, aus dessen Schlussfolgerungen sich viele praktische Regeln ableiten lassen.

18.1 Theorie

18.1.1 Das deterministische Modell

Wir haben in 3.1.6 kurz ein Modell für sich gegenseitig bekämpfende Populationen angetippt. Dieses Modell kann in der Biologie und in den Militärwissenschaften eingesetzt werden. Wir repetieren die Problembeschreibung: Gegeben sind zwei Populationen zur Zeit t (stetige Zeit); $x(t) \geq 0$ und $y(t) \geq 0$ ist die Menge oder Anzahl der einzelnen Populationen (z.B. Bakterien oder Mann Infanterie). Diese Populationen bekämpfen sich derart, dass folgendes System von deterministischen Differentialgleichungen erfüllt ist (solange $x(t) \geq 0$ und $y(t) \geq 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta y \\ \dot{y} &= -\alpha x. \end{aligned} \tag{L – DGL}$$

Offenbar ist α der Parameter, welcher angibt, wie stark die x-Population pro x-Einheit der y-Population zusetzt und β gibt an, wie stark die y-Population pro y-Einheit der x-

Population schadet. Dies ist noch ein deterministisches Modell, welches ein stochastisches Analogon hat (vgl. 18.1.2). Fragestellungen sind:

* Wer gewinnt bei gegebenen Anfangswerten?
* Welche Kombination von $x(0), \alpha, y(0), \beta$ entscheidet über Sieg und Niederlage?
* Wieviel hat die Siegerpopulation am Schluss noch übrig?

In "Lehrbuch der Analysis I" von H. Heuser, Teubner Verlag, ISBN 3-519-42221-2, 1988, Seite 344 und folgende findet man die Rechnungen, welche zu folgenden Resultaten führen: Das Anfangswertproblem (L-DGL) hat genau eine Lösung. Mit $a := \sqrt{\alpha\beta}$ ist es

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}[(\sqrt{\alpha}x(0) - \sqrt{\beta}y(0))e^{at} + (\sqrt{\alpha}x(0) + \sqrt{\beta}y(0))e^{-at}],$$

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}[(\sqrt{\beta}y(0) - \sqrt{\alpha}x(0))e^{at} + (\sqrt{\beta}y(0) + \sqrt{\alpha}x(0))e^{-at}].$$

Entscheidend für die Frage, wer gewinnt, ist offenbar die Grösse

$$\Delta := \alpha x(0)^2 - \beta y(0)^2.$$

Deshalb nennt man diese Schlussfolgerung auch das N^2-Gesetz von Lanchester (1868-1946). Im Fall $\Delta = 0$ gehen beide Populationen exponentiell gegen 0. O.B.d.A nehmen wir jetzt an, dass $\Delta > 0$ (der Fall $\Delta < 0$ geht analog mit vertauschten Rollen). Im Fall $\Delta > 0$ wird die x-Population siegen, genauer wird ab Zeit

$$T := \frac{1}{2a} \ln \frac{\sqrt{\beta}y(0) + \sqrt{\alpha}x(0)}{\sqrt{\alpha}x(0) - \sqrt{\beta}y(0)}$$

die y-Population verschwunden sein. Die x-Population hat dann noch

$$x(T) = \sqrt{x(0)^2 - \frac{\beta}{\alpha}y(0)^2} > 0 \tag{18.1}$$

Einheiten, welche überlebt haben. Wir werden das in 18.2 ausdiskutieren.

18.1.2 Das stochastische Modell

(L-DGL) wird man sinnvollerweise dann einsetzen, wenn wegen des LLN der Zufall kaum mehr eine Rolle spielt (vgl. Diskussion in 10.3). Wenn wir aber kleine, natürliche Zahlen haben, so sollten wir ein stochastisches Modell in stetiger Zeit und mit abzählbarem Zustandsraum wählen. Auf Aufgabenblatt 10 galt es das stochastische Analogon zu entwickeln ("g" good guys und "b" bad guys):

$$\begin{aligned} g(t) \to&\ g(t) - 1 \text{ mit Rate } \beta b(t) \\ b(t) \to&\ b(t) - 1 \text{ mit Rate } \alpha g(t). \end{aligned} \tag{L − Stochas}$$

Bei kleineren Zahlen spielt der Zufall eher eine Rolle und das N^2-Gesetz kommt nicht so klar zum Vorschein.

18.1.3 Mathematische Voraussetzungen und Schlussfolgerungen

Wir führen die (impliziten) **Voraussetzungen** auf, welche erfüllt sein müssen, damit man diese Modelle anwenden darf:

1. Personen verhalten sich stochastisch unabhängig voneinander.
2. Jeder kann auf jeden schiessen.
3. Jeder schiesst (in L-Stochas) mit einem Poisson-Prozess (bis selber getroffen). Aber nicht jeder Schuss ist ein Treffer. Wegen Lemma 8.5 b) haben wir aber wieder einen Poisson-Prozess, einfach mit kleinerer Rate.

Punkt 3 sollte in Worten ausformuliert werden: wenn zum Beispiel die y-Population eine sehr gute Deckung hat (und z.B. nur der Kopf und die Waffe herausschauen), dann ist einfach das *relevante* α der x-Population kleiner als die tatsächliche Kadenz der Schussabgabe.

Man kann dann folgende **Schlussfolgerungen** ableiten:

I Die Populationsgrösse fliesst - im Gegensatz zu den Parametern - quadratisch in die relevante Gleichung ein, welche über Sieg und Niederlage entscheidet.

II Wenn die x-Population viel stärker ist als die y-Population, geht die y-Population fast linear gegen 0, weil sie selber der x-Population kaum mehr zusetzen kann. Damit bleibt x praktisch konstant und damit auch die Abnahmerate von y.

18.2 Praxis

Die folgenden Resultate werden hier einfach "kalt" formuliert. Ich werde nicht jedes Mal sagen, wie schlimm Krieg ist. Mathematisch geht es immer wieder um die beiden Schlussfolgerungen (I) und (II) von vorhin. Des weiteren sollte man beachten, dass mit den heutigen Massenvernichtungswaffen viele Schlussfolgerungen in Frage gestellt sind. Das gleiche gilt auch in Bezug auf den Einsatz modernster Informationstechnologie.

Dass die Anzahl sehr wichtig ist (N^2-Gesetz), wusste schon der deutsche Kriegsphilosoph Carl von Clausewitz (1780-1831, "Vom Krieg"). Im Grundsatz "Konzentration der Kräfte" ist diese Idee mit enthalten. Der deutsche Panzergeneral Guderian brauchte dazu die Formulierung "klotzen, nicht kleckern". Diese Formulierung ist in die deutsche Sprache eingeflossen - meist ohne zu wissen, woher sie kommt. Machen wir dazu ein Beispiel, wie man es nicht machen sollte: A hat 10'000 Mann Infanterie, B hat ebenfalls 10'000 Mann Infanterie, die Qualität sei gleich ($\alpha = \beta$). B entschliesst sich jetzt, die Truppen in 2 Tranchen von je 5'000 einzusetzen ("mal schauen wie es geht - wir riskieren nicht gleich alle auf's mal"). Zuerst treten also 10'000 A gegen 5'000 B an und danach (falls notwendig) die restlichen 5'000 B gegen die verbleibenden A. Dieses Vorgehen hat fatale Folgen: Mit (18.1) berechnen wir, dass A nach der ersten Phase noch etwa 8'660 Einheiten hat (und nicht etwa 5'000, wie man naiv denken könnte). Danach treten also 8'660 Einheiten von A gegen 5'000 Einheiten von B an. Am Schluss bleiben etwa 7'070 Einheiten von A übrig (und keine von B). Das spricht sehr dafür, gleich alle Einheiten einzusetzen.

Obiges Beispiel mit der Infanterie scheint zu trivial und theoretisch. In der Tat hat sich jedoch bei der Landung in der Normandie am 6.6.1944 am amerikanischen Landungsabschnitt Omaha-Beach ("Saving Privat Ryan") genau dies ereignet: einerseits waren die Deutschen relativ gut vorbereitet. Sie lagen zum Teil in Bunkern und Unterständen, welche zudem weder von alliierten Bombern noch von der alliierten Schiffsartillerie gross getroffen worden waren. Damit waren also bereits die Parameter α und β massiv gegen die Amerikaner gerichtet. Andererseits kommt aber noch dazu, dass die Amerikaner immer nur einzelne Landungswellen anlanden konnten. Diese waren also - am Anfang - auch zahlenmässig massiv unterlegen. Die grossen amerikanischen Verluste können also damit erklärt werden. Warum wurde Omaha-Beach trotzdem genommen? Entscheidend war die alliierte Luftüberlegenheit: die deutsche Verteidigung bestand aus einem statischen (Festungen) und einem beweglichen Element (Panzer). Das bewegliche Element wurde durch die alliierten Bomber zerstört (siehe die Wirkung auf die Stadt Caen), so dass am Schluss den Deutschen nur die Festungen übrig blieben. Wegen der alliierten Luftüberlegenheit kam auch deutscher Nachschub aus dem Hinterland kaum bis an die Küste durch. Omaha-Beach wurde (Teilnehmerberichten zufolge) letztendlich nur genommen, weil *immer wieder* amerikanische Landungswellen kamen. Das amerikanische "x" wurde also immer wieder ersetzt, nicht aber das deutsche "y". Eisenhower hätte in Kenntnis der Schwierigkeiten diese Landung dort sicher nicht *so* befohlen.

Weiter spricht das N^2-Gesetz auch dafür, wenig Urlaub zu gewähren.

Dieses Prinzip spricht auch dafür, bei einem Sturmangriff alle sofort und voll einzusetzen (nicht "ich komme ja schon, einfach ein bisschen später"). Sturmangriffe sind in der heutigen Kriegsführung kaum mehr relevant.

Wenn sich an einer Front zwei etwa gleich starke Armeen A und B gegenüberliegen, so ist die Spionage (Aufklärung) zentral wichtig. Wenn es A gelingt, von B unbemerkt Truppen derart zu verschieben, dass ein Schwerpunkt an einer Stelle entsteht, so ist dort ein Durchbruch zu erwarten.

Es gibt den Grundsatz, dass man nur mit etwa dreifach überlegenen Kräften angreifen sollte. Damit sind jetzt die Populationsgrössen gemeint. Mathematisch ist dies begründbar in der Überlegung, dass der Angegriffene nicht aus der Deckung kommen muss und das Gelände besser kennt. Deshalb sind die Parameter (α und β) bei sonst gleicher Ausrüstung und Ausbildung zu Ungunsten der angreifenden Armee. Mit dreifacher Überlegenheit kann man dann Parameterverhältnisse bis 1 : 9 doch egalisieren. Vergleiche auch mit dem Fall "Omaha Beach" weiter oben: Die Amerikaner waren pro Angriffswelle, zumindest am Anfang, massiv zahlenmässig unterlegen - und dies noch bei massiv schlechteren Parametern.

In Spielfilmen, in denen die Fremdenlegion in der Wüste vorkommt, gibt es ein bekanntes Angriffsmuster, welches mit dem N^2-Gesetz erklärt werden kann: Wenn die Fremdenlegion in einer langen Kolonne marschiert, dann greift man diese als Aufständischer nicht auf der ganzen Linie an, sondern konzentriert die Kräfte. Zum Beispiel wird an genau einer Stelle von beiden Seiten angegriffen. An dieser kleinen Stelle sind dann die Aufständischen kurz überlegen. Die Fremdenlegionäre, welche ein bisschen ab vom Schuss sind, eilen dann den Kameraden, welche angegriffen werden, zu Hilfe. Ab einem gewissen Kräfteverhältnis ist es für die Aufständischen sinnvoll, sich wieder zurückzuziehen. Dies hat dann also nichts mit Feigheit zu tun, sondern ist sehr intelligent. Auch ist das Ziel der Aufständischen nicht, die ganze Kolonne zu vernichten, sondern verhältnismässig grosse Verluste zuzufügen. Dazu kommt noch die Zermürbung der Legionäre.

In Wild-West-Filmen beobachtet man manchmal, dass zum Beispiel Siedler von zahlenmässig weit überlegenen Indianern verfolgt werden. Wenn es dann zum Beispiel eine Passstrasse oder eine enge Schlucht hat, ist es für die Siedler sinnvoll, sich dort zu stellen. Der Grund liegt darin, dass dann nicht alle Indianer auf's mal kommen können - es ist zu eng. Mit den besseren Waffen haben dann die Siedler durchaus gute Chancen, die Indianer zu stoppen - ohne massive Verluste.

Wenn Sie einen Blitzkrieg planen, sollten Sie aus dem selben Grund Pässe im Handstreich gleich zu Beginn nehmen. Später kann das sehr aufwendig sein.

Wegen Schlussfolgerung (II) ist es auch *militärisch* sinnvoll, ab einer gewissen Unterlegenheit zu kapitulieren!

Hoffen wir, dass die obigen Schlussfolgerungen für uns nur noch historisch von Interesse sind!