Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Repetition WT

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 11

Must

Aufgabe 1 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten]

Zeigen Sie: bedingte Wahrscheinlichkeiten $P[.|B]$ sind (auch) Wahrscheinlichkeiten. Setzen Sie voraus, dass $P[B] > 0$.

Aufgabe 2 [Summe Geometrisch]

Angenommen, ein Motor springt mit Wahrscheinlichkeit 0.99 beim Starten an. Wie gross ist die erwartete Zeit (von jetzt an), bis der Motor zum dritten Mal nicht anspringt. Setzen Sie Unabhängigkeit der Ereignisse voraus.

Standard

Aufgabe 3 [Z-Transform] [1 Punkt]

X sei $\mathcal{N}(3, 16)$-verteilt. Berechnen Sie $P[-2 < X < 4]$.

Aufgabe 4 [Unabhängigkeit] [1 Punkt]

Geben Sie eine Folge von Zufallsgrössen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, sodass jeweils gilt $X_i \coprod X_{i+1} \forall i \geq 0$ *und* für kein $i \geq 0$ gilt $X_i \coprod X_{i+2}$.

Aufgabe 5 [Exponentialverteilung] [1 Punkt]

Das verliebte Paar Seppli und Trudi verbringen einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche sie für die eine Lampe mitnehmen sollten - diese eine Lampe muss dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 3 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$-Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis den beiden das Licht ausgeht? Setzen Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.

Aufgabe 6 [Exponentialverteilung] [2 Punkte]

Das verliebte Paar Fritz und Vreni verbringen auch einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche sie für die *zwei Lampen* mitnehmen sollten - diese beiden Lampen müssen dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 4 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$-Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis sie nur noch eine der Lampen brennen haben? Setzten Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.

Aufgabe 7 [Bayes] [1 Punkt]

Karl liebt den Alkohol (wer nicht). Die Wahrscheinlichkeit, dass er nach Büroschluss trinkt, ist 0.8. Karl ist auch vergesslich. Die Wahrscheinlichkeit, dass er seinen Schirm stehen lässt wenn er nüchtern ist, ist 0.7. Die Wahrscheinlichkeit, dass Karl seinen Schirm stehen lässt, wenn er getrunken hat, ist sogar 0.8. Karl kommt ohne Schirm nach Hause. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diesmal nicht getrunken hat?

Aufgabe 8 [Dichte, Erwartungswert, Transformation] [2.5 Punkte]

X habe Dichte $f(x) = Kx^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie

a) die Normierungskonstante K

b) $E[X]$

c) $E[1/X]$

d) die Verteilungsfunktion von $Y := 1/X$

e) die Dichte von $Y := 1/X$.

Aufgabe 9 [Transformation von Zufallsgrössen] [2 Punkte]

Sei X eine $U[0, 1]$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Dichte von $Y := -\log(X)$. Wie heisst diese Verteilung (ganz genaue Angabe mit Parameter)?

Aufgabe 10 [$(\Omega, \mathcal{A}, P)$] [1 Punkt]

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und 2 Zufallsgrössen X, Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, sodass gleichzeitig gilt: $P[X = 0] = P[Y = 0] = (1 - p); P[X = 1] = P[Y = 1] = p; P[X + Y = 1] = 1$. Sie dürfen p frei wählen.

Honours

Aufgabe 11 [$n \longrightarrow \infty$; Verallgemeinerung LLN] [2 Punkte]

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsgrössen mit $E[X_i] = \mu_i$ und $V[X_i] = \sigma_i^2$ und $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$. Sei $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{\sigma}_n^2 := n^{-1} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ und $\bar{\mu}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\bar{\sigma}_n^2 = 0$. Zeigen Sie: für vorgegebenes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| > \epsilon] = 0.$$

Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Olivier Warin

5. März 2013

Aufgabe 1 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten]
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P[B] > 0$.

Behauptung: Die Funktion $A \in \mathcal{A} \mapsto P[A|B] \in \mathbb{R}$ definiert auch eine Wahrscheinlichkeit.

Beweis:

a) Es sei A ein Ereignis. Nun gilt offenbar $A \cap B \subset B$ und daher nach WTS-Lemma 1.3 d) und WTS-Definition 1.2 $0 \leqslant P[A \cap B] \leqslant P[B]$ und damit

$$0 \leqslant \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \leqslant 1.$$

Wir schliessen $0 \leqslant P[A|B] \leqslant 1$.

b) Es gilt $P[\Omega|B] = \frac{P[\Omega \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B]}{P[B]} = 1$, da $B \subset \Omega$.

c) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von disjunkten Ereignissen. Offensichtlich ist die Folge $(A_i \cap B)_{i=1}^{\infty}$ ebenfalls disjunkt. Somit folgt mit WTS-Definition 1.2 (für P):

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B] = \frac{P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B]}{P[B]} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P[A_i \cap B]}{P[B]} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i|B].$$

Die Punkte a), b) und c) beweisen die Behauptung aufgrund von WTS-Defintion 1.2.

■

Aufgabe 2 [Summe Geometrisch]
Angenommen, ein Motor springt mit Wahrscheinlichkeit 0.99 beim Starten an. Wir interessieren uns jetzt für die erwartete Zeit (bzw. Anzahl Versuche) bis der Motor zum dritten Mal nicht anspringt. „Erfolg" heisst also, dass das Gerät nicht anspringt (Erfolgswahrscheinlichkeit $= 1 - 0.99 = 0.01$). Wir nehmen Unabhängigkeit der einzelnen Versuche an. Die Zeit bis der Motor drei Mal nicht anspringt ist nach WTS-4.2.4 $\mathrm{NB}(3, 0.01)$-verteilt. Der gesuchte Erwartungswert lautet also (siehe WTS-4.2.4):

$$\frac{3}{0.01} = 300.$$

Aufgabe 3 [Z-Transform]
Eine Zufallsgrösse X sei $\mathcal{N}(3, 16)$-verteilt. Nun gilt

$$\begin{aligned} P[-2 < X < 4] = P[X < 4] - P[X \leqslant -2] &\underset{\mathbb{R}}{\doteq} \texttt{pnorm(4,3,sqrt(16)) - pnorm(-2,3,sqrt(16))} \\ &\underset{\mathbb{R}}{\doteq} 0.4930566. \end{aligned}$$

Alternativ können wir die Z-Transformation und eine Tabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung benutzen und erhalten so

$$\begin{aligned} P[-2 < X < 4] = P\left[\frac{-2-3}{\sqrt{16}} < \frac{X-3}{\sqrt{16}} < \frac{4-3}{\sqrt{16}}\right] &= P[-1.25 < \mathcal{N}(0,1) < 0.25] \\ &= P[\mathcal{N}(0,1) < 0.25] - P[\mathcal{N}(0,1) < -1.25] = \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) \\ &\underset{\text{Tabelle}}{\doteq} 0.5987 - 0.1056 = 0.4931. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 [Unabhängigkeit]
Es seien X_0 und X_1 zwei unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgrössen. Weiter definiere für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i > 1$

$$X_i = \begin{cases} X_0, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ X_1, & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$ $X_i = X_{i+2}$ und somit sind diese klar abhängig. Desweiteren gilt offenbar für alle i $X_i \perp\!\!\!\perp X_{i+1}$.

Aufgabe 5 [Exponentialverteilung]
Das verliebte Paar Seppli und Trudi verbringen einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderm auch an die Anzahl Glühbirnen, welche Sie für die eine Lampe mitnehmen sollten - diese eine Lampe muss dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 3 Glühbirnen.

Wir modellieren die Zeitdauer bis eine solche Glühbirne kaputt geht mit einer Exp(λ)-Zufallsgrösse mit $\lambda = 1000^{-1}$, wobei wir die Zeiteinheit Stunden verwenden.

Jeder der drei Glühbirnen 1,2 und 3 entspricht also eine Exp(λ)-verteilte Zufallsgrösse X_1, X_2 bzw. X_3. Die erwartete Glühdauer beträgt also nach WTS-4.3.2 (bzw. WTS-4.3.3):

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + X_3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] \; &= \; \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \; = \; \frac{3}{\lambda} \; = \; \frac{3}{1000^{-1}}\,\mathrm{h} \; = \; 3000\,\mathrm{h} \\ &= 125 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 [Exponentialverteilung]
Das verliebte Paar Fritz und Vreni verbringen auch einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche Sie für die *zwei* Lampen mitnehmen sollten - diese beiden Lampen müssen dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 4 Glühbirnen.

Wie in Aufgabe 5 modellieren wir die Zeitdauer bis eine solche Glühbirne kaputt geht mit eine Exp(λ)-Zufallsgrösse X_i mit $\lambda = 1000^{-1}$, wobei wir die Zeiteinheit Stunden verwenden.

Die Zeit wird dann gestoppt, wenn die insgesamt 3 Glühbirnen kaputt gegangen sind, da Vreni und Fritz dann nur noch eine intakte Glühbirne übrig haben, die nicht für beide Lampen reicht. Es ist dabei jeweils irrelevant, welche von beiden gerade in Betrieb stehenden Glühbirnen kaputt geht. Somit interessieren wir uns für Zufallsgrössen der Form

$$Y_k = \min\{X_i, X_j\}, \; k = 1, 2, 3.$$

Nach dem Beispiel 2 im Abschnitt 2.6 aus Kapitel 2 der Vorlesung WTS hat Y_k eine Exp(2λ)-Verteilung. Somit gilt für den gesuchten Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E[Y_1 + Y_2 + Y_3] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3] \; &= \; \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \; = \; \frac{3}{2 \cdot 1000^{-1}} \; = \; 1500\,\mathrm{h} \\ &= 62.5 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 [Bayes]
Karl liebt den Alkohol (wer nicht). Wir definieren nun zwei Ereignisse: $T =$ „Karl hat nach Büroschluss getrunken“ und $S =$ „Karl hat seinen Schirm stehen gelassen“.

Aus dem Aufgabentext geht hervor, dass gilt $P[T] = 0.8$, $P[S|T^c] = 0.7$ und $P[S|T] = 0.8$.

Karl kommt nun ohne Schirm nach Hause. Wir interessieren uns jetzt für die Wahrscheinlichkeit, dass er diesmal nicht getrunken hat, also für $P[T^c|S]$.

Mit der Formel von Bayes (WTS-1.4.7) und WTS-Lemma 1.3 schliessen wir aus den gegebenen Daten:

$$\begin{aligned} P[T^c|S] &= \frac{P[S|T^c]P[T^c]}{P[S|T^c]P[T^c] + P[S|T]P[T]} \; = \; \frac{P[S|T^c](1 - P[T])}{P[S|T^c](1 - P[T]) + P[S|T]P[T]} \\ &= \frac{0.7 \cdot (1 - 0.8)}{0.7 \cdot (1 - 0.8) + 0.8 \cdot 0.8} \; = \; \frac{7}{39} \; \doteq \; 17.95\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 [Dichte, Erwartungswert, Transformation]
Die Zufallsgrösse X habe als Dichtefunktion $f(x) = Kx^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und sei 0 sonst.

a) Da f eine Dichte ist, muss nach WTS-Definition 2.4 gelten

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 Kx^2 dx = \frac{K}{3}$$

und damit $K = 3$.

b) Nach WTS-Definition 3.1 und Teilaufgabe a) gilt

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

c) Mit WTS-Definition 3.2 und Teilaufgabe a) schliessen wir

$$E[1/X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x dx = \frac{3}{2}.$$

d) Für die Verteilungsfunktion F_Y von $Y = 1/X$ gilt nach WTS-Definition 2.2

$$F_Y(a) = P[Y \leqslant a] = P[1/X \leqslant a].$$

Da $0 = P[X \geqslant 1] = P[1/X \leqslant 1]$ folgt $F_Y(a) = 0$ für $a \leqslant 1$.
Falls $a > 1$ folgt

$$F_Y(a) = P[1/X \leqslant a] = P[X \geqslant 1/a] = 1 - P[X < 1/a] = 1 - \int_{-\infty}^{1/a} f(x)dx$$
$$= 1 - \int_0^{1/a} 3x^2 dx = 1 - \frac{1}{a^3}.$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \leqslant 1 \\ 1 - a^{-3}, & \text{falls } a \geqslant 1. \end{cases}$$

e) Nach der Eigenschaft Nummer 4 zur WTS-Definition 2.4 (Seite 9 unten im Skript) gilt für eine Dichtefunktion f_Y von Y:

$$f_Y(a) = F_Y'(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \leqslant 1 \\ 3a^{-4}, & \text{falls } a \geqslant 1. \end{cases}$$

Aufgabe 9 [Transformation von Zufallsgrössen]
Sei X eine $U[0,1]$-Zufallsgrösse. Nun definieren wir $Y = -\log X$. Für die Verteilungsfunktion F_Y gilt nun nach WTS-Definitionen 2.2 und 4.3.1

$$F_Y(a) = P[Y \leqslant a] = P[-\log X \leqslant a] = P[\log X \geqslant -a] = P[X \geqslant e^{-a}] = 1 - P[X \leqslant e^{-a}]$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-a}, & \text{falls } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Nach der Eigenschaft Nummer 4 zur WTS-Definition 2.4 (Seite 9 unten im Skript) gilt für eine Dichtefunktion f_Y von Y:

$$f_Y(a) = F_Y'(a) = \begin{cases} e^{-a}, & \text{falls } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Mit WTS-4.3.2 folgt daraus, dass Y eine Exp(1)-Verteilung besitzt.

Aufgabe 10 [$(\Omega, \mathcal{A}, P)$]
Wir definieren $p = 0.5$, $\Omega = \{☺, ☹\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P[\{☺\}] = P[\{☹\}] = p$. Weiter setzen wir

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega = ☺ \\ 1, & \text{falls } \omega = ☹ \end{cases}$$

und

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega = ☹ \\ 1, & \text{falls } \omega = ☺. \end{cases}$$

Nun gilt für alle $\omega \in \Omega$ $X(\omega) + Y(\omega) = 1$ und damit $P[X + Y = 1] = 1$. Ausserdem haben wir

$$\begin{aligned} p \;=\; 1 - p \;=\; 0.5 = P[\{☹\}] \;=\; P[X = 1] \;=\; P[Y = 0] \\ p \;=\; 1 - p \;=\; 0.5 = P[\{☺\}] \;=\; P[X = 0] \;=\; P[Y = 1], \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Aufgabe 11 [$n \to \infty$; Verallgemeinerung LLN]
Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen mit $\mu_i = E[X_i] < \infty$ und $\sigma_i^2 = V[X_i] < \infty$ und $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$. Weiter seien $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ und $\bar{\mu}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mu_i$. Wir nehmen weiter an, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{\sigma}_n^2}{n} = 0. \tag{$*$}$$

Behauptung: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| > \varepsilon] = 0$.

Beweis: Es sei n eine natürliche Zahl. Nun gilt

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_n \;=\; \bar{\mu}_n.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Mit Hilfe von WTS-5.1 (Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew) können wir jetzt schliessen

$$P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| > \varepsilon] \leqslant P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \varepsilon] \;\leqslant\; \frac{1}{\varepsilon^2}V[\bar{X}_n] \;=\; \frac{1}{\varepsilon^2}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right].$$

WTS-Lemma 3.7 und Aussage h) im Abschnitt WTS-3.4 erlauben es uns daraus zu folgern

$$0 \;\leqslant\; P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| > \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}V\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \;=\; \frac{1}{\varepsilon^2 n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V[X_i] \;=\; \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\bar{\sigma}_n^2}{n} \;\xrightarrow{n\to\infty}\; 0,$$

wobei wir am Ende die Annahme ($*$) eingesetzt haben. Dies beweist die Behauptung.

■