Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Weitere notwendige Grundlagen aus der WT: Konvergenzarten und -Sätze

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 10, Abgabe der Lösungen: Woche 11 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 12

Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad der Übungen: *dieses* Blatt ist für Personen, welche die WT noch nicht besucht haben, am Schwierigsten - also nicht aufgeben.

Must

Aufgabe 12 [$\mathcal{B}(\mathbb{R})$]

Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste σ-Algebra, welche alle nach links halboffenen Intervalle $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$, enthält. Man sagt: sie wird von diesen Intervallen erzeugt. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle einpunktigen Mengen.

b) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle rechts halboffenen Intervalle $[a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle offenen Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

d) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle beidseitig abgeschlossenen Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$.

Standard

Aufgabe 13 [Konvergenz in L^1, fs, aber nicht in L^2] [3 Punkte]

Geben Sie eine Situation an, in der eine Folge von Zufallsgrössen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichzeitig gegen ein X in L^1 konvergiert, auch fs, aber nicht in L^2.

Aufgabe 14 [Konvergenz in W'keit gegen $a \Leftrightarrow$ Konvergenz in Verteilung gegen a] [4 Punkte]

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie mit $a \in \mathbb{R}$: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $a \Leftrightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen a. Vergleichen Sie auch mit WT-Satz 5.4.

Aufgabe 15 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung] [2 + 2 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ mit $P[[a, b]] := b - a$, wenn $0 \leq a \leq b \leq 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := 1_{[0,1/n]}(\omega).$$

Zeigen Sie durch direktes Überprüfen der Definition, dass diese Folge in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0 konvergiert.

Honours

Aufgabe 16 [fs-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] [3 Punkte]

Beweisen Sie: Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche fs gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.

Übungsblatt 2 zur Vorlesung “Angewandte Stochastik”

Olivier Warin

12. März 2013

Aufgabe 12 [$\mathcal{B}(\mathbb{R})$]
Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste σ-Algebra, welche alle nach links halboffenen Intervalle $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, enthält. Man sagt: sie wird von diesen Intervallen erzeugt.

a) **Behauptung:** Alle einelementigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Borel-Mengen.

Beweis: Sei x eine reelle Zahl. Definiere für alle natürlichen Zahlen n die Menge $A_n = (x - 1/n, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nun gilt

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ = \ \left(\bigcup A_n^c\right)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

nach WTS-Definition 1.1.

■

b) **Behauptung:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Beweis: Nach Teilaufgabe a) liegen sowohl $\{a\}$ als auch $\{b\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Somit folgt mit WTS-Definition 1.1:

$$[a, b) = [a, b] \cap \{b\}^c \ = \ (\{a\} \cup (a, b]) \cap \{b\}^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

■

c) **Behauptung:** Alle offenen Intervalle (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ sind auch Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Beweis: Aufgrund von Teilaufgabe a) ist $\{b\}$ eine Borel-Menge und damit

$$(a, b) = (a, b] \cap \{b\}^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

wiederum wegen WTS-Definition 1.1.

■

d) **Behauptung:** Auch alle kompakten Intervalle $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ sind Borel-Mengen.

Beweis: Wir benutzen noch einmal Teilaufgabe a), die uns sagt dass $\{a\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegt. Daraus folgt

$$[a, b] = (a, b] \cup \{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

■

Aufgabe 13 [Konvergenz in L^1, fs, aber nicht L^2]
Wir definieren den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ durch $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ und $P[[a, b]] = b - a$ $(a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1)$ (Uniformverteilung).

Für jede natürliche Zahl n sei $X_n = 1_{[0,1/n]} \sqrt{n}$. Es gilt also

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{falls } \omega \in [0, 1/n] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher und in L^1 aber *nicht* in L^2 gegen 0.

Beweis: Es gilt

$$P[\{\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=0\}] = P[\Omega\setminus\{0\}] \;=\; 1-P[\{0\}] \;=1$$

$$\begin{aligned} E[|X_n-0|] = E[X_n] \;&=\; \sqrt{n}\cdot P[[0,1/n]] + 0\cdot P[[0,1/n]^c] \;=\; \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ E[|X_n-0|^2] = E[X_n^2] \;&=\; (\sqrt{n})^2\cdot P[[0,1/n]] + 0^2\cdot P[[0,1/n]^c] \;=\; n\cdot\frac{1}{n} \;=\; 1 \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 1\neq 0. \end{aligned}$$

Nach Abschnitt 2.1 folgt daraus sofort die Behauptung.

■

Aufgabe 14 [Konvergenz in W'keit gegen a ⇔ Konvergenz in Verteilung gegen a]
Es sei eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ gegeben. Weiter sei a eine feste reelle Zahl.

Behauptung: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit genau dann gegen a, wenn die Folge in Verteilung gegen a konvergiert.

Beweis:

- Falls Konvergenz gegen a in Wahrscheinlichkeit vorliegt, konvergiert die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach WT-Satz-5.4 auch in Verteilung gegen a.
- Falls Konvergenz gegen a in Verteilung vorliegt, bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n\leqslant t] = P[a\leqslant t] \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } t\geqslant a \\ 0, & \text{falls } t<a. \end{cases}$$

Sei $\varepsilon>0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} P[|X_n-a|>\varepsilon] &= P[X_n-a>\varepsilon] + P[X_n-a<-\varepsilon] \;\leqslant\; P[X_n>a+\varepsilon] + P[X_n\leqslant a-\varepsilon] \\ &= 1-P[X_n\leqslant a+\varepsilon] + P[X_n\leqslant a-\varepsilon]. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P[|X_n-a|>\varepsilon] &\leqslant 1-\lim_{n\to\infty} P[X_n\leqslant a+\varepsilon] + \lim_{n\to\infty} P[X_n\leqslant a-\varepsilon] \\ &= 1-P[a\leqslant a+\varepsilon] + P[a\leqslant a-\varepsilon] = 1-1+0 \;=\; 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in Wahrscheinlichkeit gegen a.

■

Aufgabe 15 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung]
Sei $(\Omega,\mathcal{A},P) = ([0,1],\mathcal{B}([0,1]),P)$ mit $P[[a,b]] = b-a$, wenn $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsgrössen durch $X_n = 1_{[0,1/n]}$.

Behauptung: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0.

Beweis:

- Wir zeigen erst die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Sei dazu $\varepsilon>0$. Nun gilt

$$P[|X_n-0|>\varepsilon] = P[X_n>\varepsilon] \;=\; \begin{cases} P[[0,1/n]] \;=\; 1/n, & \text{falls } \varepsilon<1 \\ P[\emptyset] \;=\; 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  In jedem Fall gilt also $\lim_{n\to\infty} P[|X_n-0|>\varepsilon] = 0$, also liegt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vor.

- Nun zeigen wir noch die Konvergenz in Verteilung. Sei dazu $t \in \mathbb{R}$. Wir berechnen jetzt

$$P[X_n \leqslant t] = 1 - P[X_n > t] \begin{cases} = 1 - P[\Omega] \;=\; 0, & \text{falls } t < 0 \\ = 1 - P[\emptyset] \;=\; 1, & \text{falls } t \geqslant 1 \\ = 1 - P[[0, 1/n]] \;=\; 1 - 1/n, & \text{falls } 0 \leqslant t < 1. \end{cases}$$

  Wir schliessen

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n \leqslant t] = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geqslant 0. \end{cases}$$

  Das ist genau dasselbe wie

$$P[0 \leqslant t] = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 1, & \text{falls } t \geqslant 0. \end{cases}$$

  Also konvergiert die Folge auch in Verteilung gegen 0.

■

Aufgabe 16 [fs-Konvergenz ⇒ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit]
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen, welche fast sicher gegen eine Zufallsgrösse X konvergiere.

Behauptung: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nun definieren wir für alle natürlichen Zahlen N das Ereignis

$$A_N \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon \,\forall n \geqslant N\}.$$

Diese Folge von Ereignissen ist offenbar wachsend. Nach WTS-Lemma 1.8 gilt nun daher

$$\lim_{N\to\infty} P[A_N] = P[\textstyle\bigcup_{N\geqslant 1} A_N] \;\geqslant\; P[\{\omega \in \Omega \,|\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1,$$

da die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen X konvergiert und da klar gilt

$$\textstyle\bigcup_{N\geqslant 1} A_N \;\supset\; \{\omega \in \Omega \,|\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}.$$

Wir schliessen

$$P[\{\omega \in \Omega \,|\, |X_N(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}] \leqslant P[A_N^c] \;\xrightarrow{N\to\infty}\; 0,$$

also konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.

■