Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Elementare Eigenschaften von Markov-Ketten, Stoppzeit

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 11, Abgabe der Lösungen: Woche 12 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 13 oder asap

---

Must

Aufgabe 17 [FTW mit bedingten Wahrscheinlichkeiten: bFTW]

(vgl. WTS-Lemma 1.7) $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Partition von Ω (die B_i's sind disjunkt und $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$). Weiter sei für alle $B_i, i \geq 1$, $P[B_i] > 0$ erfüllt. Des weiteren habe man ein C, so dass $P[C] > 0$. Zeigen Sie, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$:

$$P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[B_i|C].$$

Dabei definieren wir $P[A|C \cap B_i]P[B_i|C] := 0$ falls $B_i \cap C = \phi$.

Standard

Aufgabe 18 [Mehrere Schritte] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, Initialverteilung λ und Zustandsraum $\mathbb{Z}^+$. Zeigen Sie, dass für alle $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j_1, \ldots, j_k) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+k}$ und $k \geq 1, n \geq 0, i \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \ldots, X_{n+k} = j_k | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots, X_k = j_k | X_0 = i] = p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{k-1} j_k}.\end{aligned}$$

Aufgabe 19 [Der Random Walk RW als Markov-Kette] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von iid Zufallsgrössen. Es gelte $\mathbb{P}[X_i = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_i = -1]$, $p \in (0,1)$ (nicht symmetrisch!). Definiere nun $S_n := S_{n-1} + X_n$ und sei die Startverteilung $\mathbb{P}[S_0 = i] = \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie diese Ausgangslage mit Hilfe einer Übergangsmatrix und einer Initialverteilung (es ist kein Problem, dass der RW auf $\mathbb{Z}$ und nicht auf $\mathbb{Z}^+$ definiert ist). Beweisen Sie, dass es sich hierbei um eine Markov-Kette handelt.

Aufgabe 20 [Stoppzeit] [3 Punkte]

Überprüfen Sie, ob folgende Ausdrücke eine Stoppzeit (Markov-Zeit) definieren:

a) $N := \max\{n | X_n = j\}$
b) $N := \min\{n | \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j < -K\}$ wo $K \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 21 [die einfachste, nichttriviale Markov-Kette] [2 Punkte]

Zeigen Sie durch Induktion, dass mit $p, q \in (0, 1)$ und

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

die Matrix P^n von der Form

$$\frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & p - p(1-q-p)^n \\ q - q(1-p-q)^n & p + q(1-q-p)^n \end{pmatrix}$$

ist. Wie ist "P^∞"? Was folgern Sie daraus?

Honours

Aufgabe 22 [Markov-Chain Monte Carlo (MCMC)] [2+1 Punkte]

Mit der gleichen Ausgangslage wie in Aufgabe 21, wählen wir $p_{01} = 0.3$ und $p_{10} = 0.4$. Simulieren Sie mit mindestens 1000 Durchgängen in einer geeigneten Rechenumgebung folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) mit Startwert 0, Wahrscheinlichkeit, nach 5, 10, 15, 20, 50, 100, 1000 Schritten in 0 zu sein,

b) mit Startwert 1, Wahrscheinlichkeit, nach 5, 10, 15, 20, 50, 100, 1000 Schritten in 0 zu sein,

und vergleichen Sie die Resultate mit dem Resultat aus Aufgabe 21.

Übungsblatt 3 zur Vorlesung “Angewandte Stochastik”

Olivier Warin

15. April 2013

Aufgabe 17 [FTW mit bedingten Wahrscheinlichkeiten: bFTW]
Es sei $B_1, B_2, \ldots$ eine Partition von Ω (d.h. die B_i's sind disjunkt und $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$). Weiter sei für alle B_i, $i \geqslant 1$, $P[B_i] > 0$ erfüllt. Desweiteren habe man ein C, so dass $P[C] > 0$.

Behauptung: Für jedes Ereignis A gilt nun

$$P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[B_i|C].$$

Dabei definieren wir $P[A|C \cap B_i] = 0$ falls $P[B_i \cap C] = 0$.

Beweis: Nach WTS-Definitionen 1.5 und 1.2 gilt (beachte die Disjunktheiten)

$$P[C]P[A|C] = P[A \cap C] \; = \; P[A \cap C \cap \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} B_i] \; = \; P[\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A \cap C \cap B_i)] \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} P[A \cap C \cap B_i].$$

Aufgrund von WTS-Definition 1.5 und der vereinbarten Konvention, dass $P[A|C \cap B_i] = 0$ falls $P[B_i \cap C] = 0$, folgt daraus

$$P[C]P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[C \cap B_i] \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[B_i|C] P[C].$$

Dies impliziert die Behauptung sofort.

$\blacksquare$

Aufgabe 18 [Mehrere Schritte]
Sei $(X_n)_{n \geqslant 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, Initialverteilung λ und Zusandsraum $\mathbb{Z}^+$.

Behauptung: Für alle ganzen Zahlen n, k, i mit $n, i \geqslant 0$ und $k \geqslant 1$ und $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j_1, \ldots, j_k) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+k}$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \ldots, X_{n+k} = j_k \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] \\ &\quad = \mathbb{P}[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots, X_k = j_k \,|\, X_0 = i] \; = \; p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{k-1} j_k}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung per Induktion über k. Für $k = 1$ haben wir aufgrund der Markoveigenschaft und der Zeithomogenität (siehe Definition 3.1)

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j_1 \,|\, X_n = i,\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j_1 \,|\, X_n = i] \; = \; \mathbb{P}[X_1 = j_1 | X_0 = i] \; = \; p_{ij_1}.$$

Also ist die Behauptung für $k = 1$ korrekt.

Jetzt nehmen wir an, dass die Behauptung für k richtig ist und zeigen sie damit für $k + 1$.

Zur besseren Übersicht definieren wir $A = \{X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\}$ und für $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leqslant k + 1$:

$$\begin{aligned} B_\ell^n &= \{X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+\ell} = j_\ell\} \\ B_\ell^0 &= \{X_1 = j_1, \ldots, X_\ell = j_\ell\}. \end{aligned}$$

Weiter sei $\mathbb{P}_A[\,\cdot\,] = \mathbb{P}[\,\cdot\,|A]$. Nach der obigen Induktionsannahme gilt nun

$$\mathbb{P}_A[B_k^n] \; = \mathbb{P}[B_k^0 \,|\, X_0 = i] \; = \; p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{k-1} j_k}.$$

Zusammen mit der Markov-Eigenschaft folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A[B_{k+1}^n] &= \mathbb{P}_A[B_k^n \cap \{X_{n+k+1} = j_{k+1}\}] \; = \; \mathbb{P}_A[B_k^n] \mathbb{P}_A[X_{n+k+1} = j_{k+1} \,|\, B_k^n] \\ &= \mathbb{P}[B_k^0 \,|\, X_0 = i] \mathbb{P}[X_{n+k+1} = j_{k+1} \,|B_k^n \cap A] \; = \; p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{k-1} j_k} p_{j_k j_{k+1}}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Aufgabe 19 [Der Random Walk RW als Markov-Kette]
Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid Zufallsgrössen. Es gelte $\mathbb{P}[X_1 = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_1 = -1]$ für ein $p \in (0, 1)$. Wir definieren nun rekursiv $S_n = S_{n-1} + X_n$ und sei die Startverteilung $\mathbb{P}[S_0 = i] = \lambda_i \geqslant 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Diese Ausgangslage kann beispielsweise mit Hilfe der folgenden Übergangsmatrix P und Initalverteilung λ, wie folgt beschrieben werden: Wähle ein $\nu \in \mathbb{Z}$ und setze $\lambda_\nu = 1$ und für alle $i \in \mathbb{Z} \setminus \{\nu\}$ $\lambda_i = 0$. Ausserdem setze für alle $i, j \in \mathbb{Z}$

$$p_{ij} = \mathbb{P}[X_1 = j - i] = \begin{cases} p, & \text{falls } j = i + 1 \\ 1 - p, & \text{falls } j = i - 1 \\ 0, & \text{falls } |i - j| \neq 1. \end{cases}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\lambda = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & 1-p & 0 & p & & \\ & & 1-p & 0 & p & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert eine Markov-Kette.

Beweis: Seien $n \in \mathbb{Z}^+$ und $(j, i, i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0) \in \mathbb{Z}^{n+2}$ (so dass alle auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind). Nun gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_{n+1} = j \mid S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0] &= \mathbb{P}[S_n + X_{n+1} = j \mid S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0] \\ &= \mathbb{P}[i + X_{n+1} = j \mid S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0] \\ &\overset{\text{iid}}{=} \mathbb{P}[X_{n+1} = j - i] \overset{\text{iid}}{=} \mathbb{P}[X_1 = j - i] \\ &= \mathbb{P}[S_1 = j \mid S_0 = i] = p_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Definition 3.1 definiert die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine Markov-Kette.

$\blacksquare$

Aufgabe 20 [Stoppzeit]
Es sein $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette.

a) **Behauptung:** Die Zufallsgrösse $N = \max\{n \mid X_n = j\}$ definiert *keine* Stoppzeit.

Beweis: Es gilt

$$\{N = n\} = \{X_n = j, X_{n+1} \neq j, X_{n+2} \neq j, \ldots\} \neq \{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in A_n\},$$

für alle $A_n \subseteq (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$. Denn in dem Ereignis auf der rechten Seite können keine Bedingungen an X_{n+1}, X_{n+2} usw. gestellt werden.
Also ist N nach Definition 3.3 keine Stoppzeit.

$\blacksquare$

b) Es sei K eine natürliche Zahl.

Behauptung: Die Zufallsgrösse $N = \min\{n \mid \sum_{j=1}^n (-1)^j X_j < -K\}$ definiert eine Stoppzeit.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\{N = n\} &= \{-X_1 \geqslant -K, -X_1 + X_2 \geqslant -K, \ldots, \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j X_j \geqslant -K, \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j < -K\} \\ &= \{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in A_n\},\end{aligned}$$

wobei $(\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n))$

$$A_n = \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1} \mid -x_1 \geqslant -K, -x_1 + x_2 \geqslant K, \ldots, \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x_j \geqslant -K, \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j < -K\}.$$

Dies bedeutet, dass N eine Stoppzeit definiert. (Siehe Definition 3.3)

■

Aufgabe 21 [die einfachste, nichttriviale Markov-Kette]
Es seien $p, q \in (0, 1)$ und

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Behauptung: Für eine natürliche Zahl n gilt

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & p - p(1-q-p)^n \\ q - q(1-p-q)^n & p + q(1-q-p)^n \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung per Induktion für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geqslant 0$. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar.

Nun nehmen wir an, dass die Behauptung für n korrekt ist und folgern daraus, dass sie dann auch für $n + 1$ statt n stimmen muss.

Zur besseren Übersicht setzen wir $x = 1 - p - q$. Nach Induktionsannahme gilt jetzt

$$\begin{aligned}(p+q)P^{n+1} = (p+q)PP^n &= \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q + px^n & p - px^n \\ q - qx^n & p + qx^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-p)(q + px^n) + p(q - qx^n) & (1-p)(p - px^n) + p(p + qx^n) \\ q(q + px^n) + (1-q)(q - qx^n) & q(p - px^n) + (1-q)(p + qx^n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q + p(1-p-q)x^n & p - p(1-q-p)x^n \\ q - q(1-q-p)x^n & p + q(1-q-p)x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + px^{n+1} & p - px^{n+1} \\ q - qx^{n+1} & p + qx^{n+1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.

■

Da $p, q \in (0, 1)$ folgt, dass $|1 - p - q| < 1$ und damit $\lim_{n\to\infty}(1 - p - q)^n = 0$. Wir schliessen also aus obiger Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit in 0 zu landen geometrisch gegen $q/(p + q)$ konvergiert und zwar unabhängig vom Startwert! Analog konvergiert die Wahrscheinlichkeit in 1 zu landen für die Anzahl Schritte gegen ∞ gegen $p/(p + q)$ unabhängig vom Startwert.

Aufgabe 22 [Markov-Chain Monte Carlo (MCMC)]
Wir benutzen das folgende R-Programm:

markovsim.R

```
markovsim <- function(steps,start,times=5000,p01=0.3,p10=0.4) {
     count = 0 #Zähler, wie oft wir am Ende in 0 gelandet sind
     for (t in 1:times) {
          X = start;
          rand = runif(steps) #Uniformverteilt zwischen 0 und 1
          for (n in 1:steps) {
               if (X==0 && rand[n] < p01) {X=1}
               else if (X==1 && rand[n] < p10) X=0;
          }
          if (X==0) count = count + 1;
     }
     return(count/times);
}
```

Dies hat die folgenden Ergebnisse geliefert:

```
> source("markovsim.R");
> steps = c(5,10,15,20,50,100,1000)
>
> #Teilaufgabe a)
> start=0;
> for (s in steps) {
+    cat('Startwert:', start,'| Anzahl Schritte:', s,
+         '| Relative Häufigkeit:', markovsim(s,start),'\n');
+ }
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 5 | Relative Häufigkeit: 0.5688
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 10 | Relative Häufigkeit: 0.5676
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 15 | Relative Häufigkeit: 0.5768
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 20 | Relative Häufigkeit: 0.5658
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 50 | Relative Häufigkeit: 0.5798
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 100 | Relative Häufigkeit: 0.5592
Startwert: 0 | Anzahl Schritte: 1000 | Relative Häufigkeit: 0.5676
>
> #Teilaufgabe b)
> start=1;
> for (s in steps) {
+    cat('Startwert:', start,'| Anzahl Schritte:', s,
+         '| Relative Häufigkeit:', markovsim(s,start),'\n');
+ }
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 5 | Relative Häufigkeit: 0.5758
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 10 | Relative Häufigkeit: 0.5656
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 15 | Relative Häufigkeit: 0.5718
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 20 | Relative Häufigkeit: 0.569
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 50 | Relative Häufigkeit: 0.588
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 100 | Relative Häufigkeit: 0.5612
Startwert: 1 | Anzahl Schritte: 1000 | Relative Häufigkeit: 0.5736
>
```

Wie Aufgabe 21 vorausgesagt hat scheint die Wahrscheinlichkeit, dass wir in 0 landen gegen

$$\frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{0.4}{0.3+0.4} = \frac{4}{7} \doteq 0.5714286$$

zu konvergieren und zwar unabhängig vom Startwert!