Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Rekurrenz, Transienz, Periodizität

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 15

Must

Aufgabe 23 [Diagramm]

Machen Sie ein Diagramm (Mengen mit korrekten Teilmengen), wo die Resultate von Satz 4.10 bzgl. Rekurrenz/Transienz mitsamt Beispielen und Gegenbeispielen veranschaulicht werden.

Aufgabe 24 [$\leftrightsquigarrow$ als Äquivalenzrelation]

Zeigen Sie, dass die Relation $\leftrightsquigarrow$ eine Äquivalenzrelation ist.

Standard

Aufgabe 25 [einfache Beispiele] [2.5 Punkte]

Zeichnen Sie den Übergangsgraphen, d.h. das System der Pfeile, die möglichen Übergängen entsprechen ($p_{ij} > 0$), und bestimmen Sie Kommunikationsklassen, rekurrente, transiente und periodische Zustände für folgende Übergangsmatrizen:

$$a) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie bitte immer an, aus welchem Satz aus der Vorlesung Sie Ihre Schlüsse gezogen haben.

Aufgabe 26 [Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft] [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.9, d.h.: Sei $i \leftrightsquigarrow j$. Beweisen Sie: Ist i rekurrent, dann ist auch j rekurrent.

Aufgabe 27 [nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse] [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.10, d.h.: Sei K eine nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse. Beweisen Sie, dass K vergänglich (transient) ist.

Aufgabe 28 [Simulation (Treffwahrscheinlichkeit & E[Zeit bis Absorption])] [2+2+2 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine zufällige, symmetrische Irrfahrt (engl. random walk (RW)) auf der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Die Übergangsmatrix sei derart, dass $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

a) Sei $p_{00} = p_{10,10} = 1$, also sind 0 und 10 absorbierend. Es ist wohl so, dass X_n für grosse n entweder 0 oder 10 ist (dies muss nicht bewiesen werden). Versuchen Sie durch eine Simulation in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass X_n in 0 absorbiert wird.

b) Sei $p_{00} = p_{10,9} = 1$, das heisst nur der Zustand 0 ist absorbierend. Versuchen Sie durch Simulationen in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die erwartete Zeit ist, bis X_n in 0 absorbiert ist.

c) Gegeben, der Zufallsgenerator ist perfekt. Beweisen Sie, dass die Simulationen von a) gegen die richtigen theoretischen Werte konvergieren müssen. Die richtigen, theoretischen Werte werden wir in Kapitel 5 berechnen.

Honours

Aufgabe 29 [kleine Analysis-Aufgabe] [3 Punkte]

Seien $q_i \in (0, 1), i \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} (1 - q_j) \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j = \infty \\ > 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j < \infty. \end{cases}$$

Aufgabe 30 [Simulation Dauer, bis 99 % der RW retour] [8 Punkte]

Sei $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$ für alle $i \geq 1$; die $(X_i)_{i\geq 1}$ seien iid Zufallsgrössen. Definiere einen symmetrischen Random Walk $S_0 := 0$ und für $n \geq 1 : S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sei

$$T := \min_{n\geq 1}\{n | S_n = 0\}$$

die Stoppzeit der ersten Rückkehr nach 0. Machen Sie eine Simulation, um $a \in \mathbb{N}$ zu finden, sodass

$$P[T \leq a] \doteq 0.99.$$

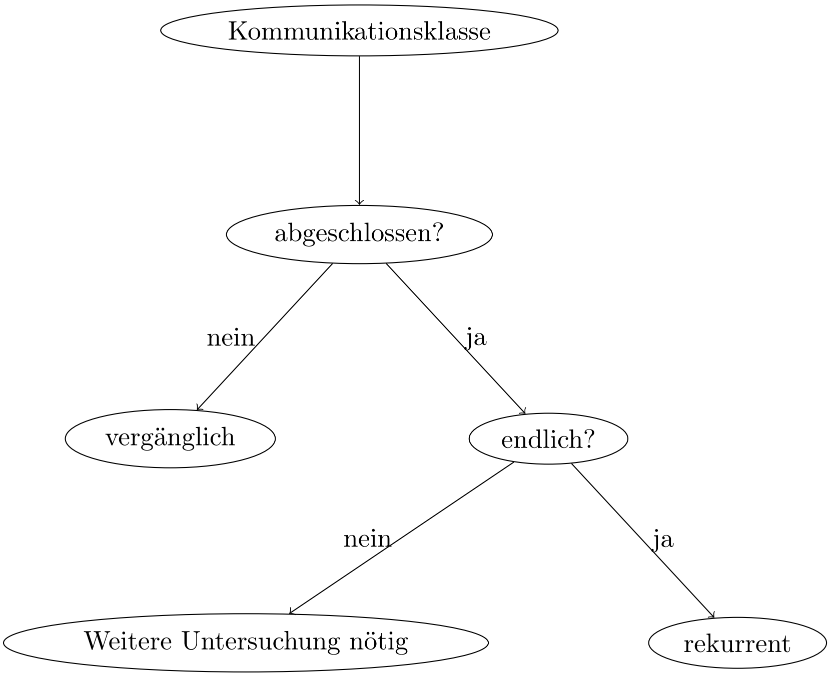
Tipp: Die Zahl a ist kleiner als 7000. Sobald ein Random Walk länger als 7000 Schritte braucht, können Sie abbrechen.

Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Olivier Warin

15. April 2013

Aufgabe 23 [Diagramm]



Aufgabe 24 [$\leftrightsquigarrow$ als Äquivalenzrelation]
Behauptung: Die Relation $\leftrightsquigarrow$ definiert eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Reflexivität: Für alle i aus dem Zustandsraum gilt klar $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$ und damit $i \leftrightsquigarrow i$.

Symmetrie: Seien i und j im Zustandsraum mit $i \leftrightsquigarrow j$. Es gibt $\ell, k \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{ij}^{(k)}, p_{ji}^{(\ell)} > 0$. Aber das bedeutet ebenfalls, dass $j \leftrightsquigarrow i$.

Transitivität: Seien h, i und j im Zustandsraum, so dass $h \leftrightsquigarrow i$ und $i \leftrightsquigarrow j$. Es gibt also $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{hi}^{(k)} > 0$ und $p_{ij}^{(\ell)} > 0$. Somit folgt mit der Ungleichung von Chapman-Kolmogoroff (Lemma 3.2)

$$p_{hj}^{(k+\ell)} \geqslant p_{hi}^{(k)} p_{ij}^{(\ell)} > 0.$$

Folglich gilt $h \rightsquigarrow j$. Ganz analog lässt sich zeigen, dass $j \rightsquigarrow h$. Wir schliessen $h \leftrightsquigarrow j$.

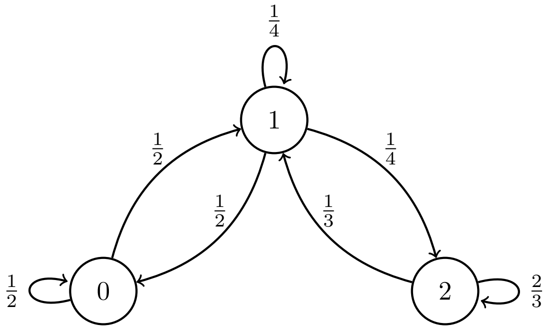
∎

Aufgabe 25 [einfache Beispiele]

a) Wir betrachten die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Hier ist eine Skizze des zugehörigen Übergangsgraphen:

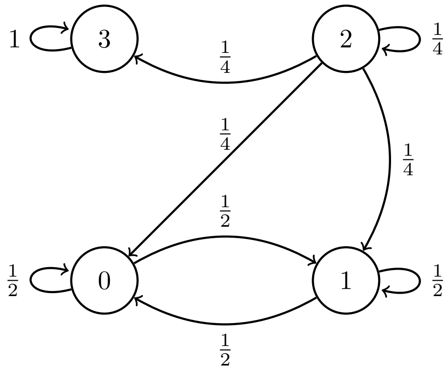


Es gibt hier nur die Kommunikationsklasse $K_1 = \{0, 1, 2\}$, welche offenbar abgeschlossen und endlich ist. Also ist nach Satz 4.10 b) K_1 rekurrent. Damit sind auch sämtliche Zustände rekurrent (Klasseneigenschaft). Desweiteren gilt $p_{00}^{(1)} > 1$ was sofort impliziert, dass der Zustand 0 und damit alle Zustände (Satz 4.12) aperiodisch sind (Definition 4.11).

b) Hier betrachten wir die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Skizze des zugehörigen Übergangsgraphen sieht nun wie folgt aus:



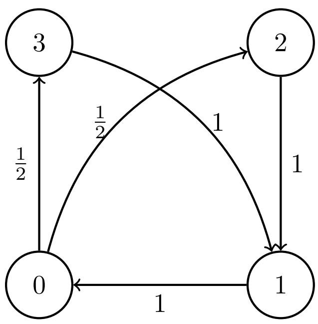
Hier gibt es drei Kommunikationsklassen: $K_1 = \{0, 1\}$ (abgeschlossen), $K_2 = \{2\}$ (nicht abgeschlossen) und $K_3 = \{3\}$ (abgeschlossen). Da K_1 und K_3 endlich sind, sind diese Klassen nach Satz 4.10 rekurrent. Ausserdem ist (ebenfalls aufgrund von Satz 4.10) die Klasse K_2 transient. Somit sind die Zustände 0, 1 und 3 rekurrent und der Zustand 2 vergänglich (Klasseneigenschaft).

Ausserdem gilt für alle Zustände i, dass $p_{ii}^{(1)} > 0$ und damit $d_i = 1$. Also sind alle Zustände aperiodisch.

c) In dieser Teilaufgabe geht es um die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Übergangsgraph, kann wie folgt skizziert werden:



Hier haben wir nur eine endliche Klasse $K_1 = \{0, 1, 2, 3\}$. Somit sind nach Satz 4.10 0,1,2,3 und K_1 rekurrent.

Weiter gilt

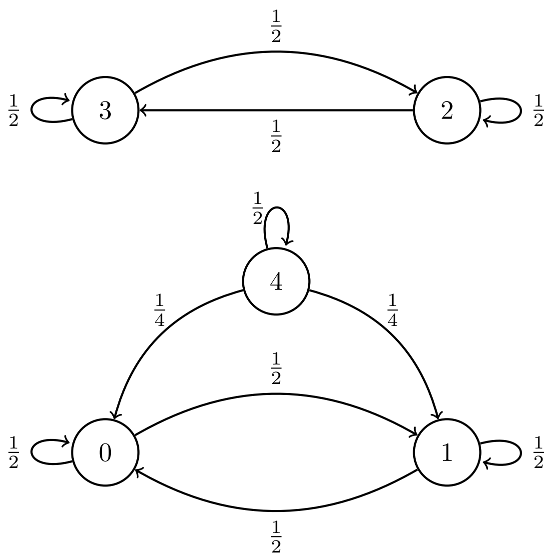
$$p_{00}^{(k)} \begin{cases} > 0, & \text{falls } 3|k \\ = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies impliziert $d_0 = 3$ und damit (nach Satz 4.12) $d_1 = d_2 = d_3 = 3$. Also sind alle Zustände periodisch mit Periode 3.

d) Nun betrachten wir die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Übergangsgraph, kann wie folgt skizziert werden:



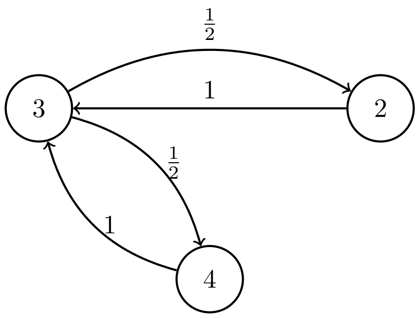
Hier haben wir zwei endliche abgeschlossene (daher rekurrente) Klassen $K_1 = \{0, 1\}$ und $K_2 = \{2, 3\}$. Desweiteren gibt es noch die Klasse $K_3 = \{4\}$, welche nicht abgeschlossen und damit transient ist. Die Zustände 0,1,2,3 sind also rekurrent und der Zustand 4 ist transient.

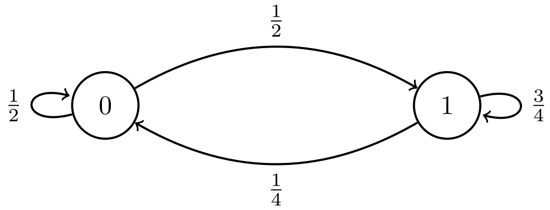
Ausserdem gilt für alle Zustände i, dass $p_{ii}^{(1)} > 0$ was impliziert, dass alle Zustände aperiodisch sind.

e) Zum Schluss geht es noch um die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Übergangsgraph, kann wie folgt skizziert werden:





Die Kommunikationsklassen lauten hier wie folgt: $K_1 = \{0, 1\}$ (abgeschlossen) und $K_2 = \{2, 3, 4\}$ (abgeschlossen). Da beide Klassen endlich und abgeschlossen sind, sind beide und damit alle Zustände rekurrent.

Weiter gilt $p_{00}^{(1)}, p_{11}^{(1)} > 0$, also sind die Zustände 0 und 1 aperiodisch.

Schliesslich haben wir noch

$$p_{22}^{(k)} \begin{cases} > 1, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ = 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir schliessen $d_2 = 2$ und mit Satz 4.12 $d_3 = d_4 = 2$. Also sind die Zustände 2, 3, 4 periodisch mit Periode 2.

Aufgabe 26 [Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft]
Gegeben sei (in den Notationen der Vorlesung) eine Markov-Kette und zwei Zustände i und j mit $i \leftrightsquigarrow j$. Weiter sei i rekurrent.

Behauptung: Der Zustand j ist auch rekurrent.

Beweis: Da $i \leftrightsquigarrow j$ gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{ij}^{(k)}, p_{ji}^{(\ell)} > 0$. Weiter gilt nach der Ungleichung von Chapman-Kolmogoroff (Lemma 3.2) für alle natürlichen Zahlen n

$$p_{jj}^{(n+k+\ell)} \geqslant p_{ji}^{(\ell)} p_{ij}^{(n+k)} \geqslant p_{ji}^{(\ell)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}.$$

Wir schliessen daraus für alle natürlichen Zahlen $N > k + \ell$

$$\sum_{n=1}^{N} p_{jj}^{(n)} \geqslant \sum_{n=k+\ell+1}^{N} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N-k-\ell} p_{jj}^{(n+k+\ell)} \geqslant p_{ji}^{(\ell)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{N-k-\ell} p_{ii}^{(n)}.$$

Die rechte Seite divergiert für $N \to \infty$ aufgrund von Korollar 4.8, da i nach Voraussetzung rekurrent ist. Dies impliziert $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$, was nach Korollar 4.8 bedeutet, dass auch j rekurrent ist.

■

Aufgabe 27 [nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse]
Es sei K eine nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse.

Behauptung: Die Klasse K ist vergänglich.

Beweis: Da K nicht abgeschlossen ist gibt es zwei Zustände $i \in K$ und $j \notin K$, so dass $i \rightsquigarrow j$.

Angenommen K (und damit i) ist rekurrent, dann gilt nach der Bemerkung bei Satz 4.7 auch $j \rightsquigarrow i$. Dies impliziert aber $i \leftrightsquigarrow j$ und damit wäre $j \in K$. Dies ist natürlich ein Widerspruch.

■

Nun wollen wie die im Beweis erwähnte Bemerkung bei Satz 4.7 noch zur Vollständigkeit beweisen.

Behauptung: Falls i rekurrent ist und $i \rightsquigarrow j$, so gilt auch $j \rightsquigarrow i$.

Beweis: Nehmen wir an, dass $j \not\rightsquigarrow i$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $p_{ji}^{(n)} = 0$ und insbesondere ist $j \neq i$.

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ *minimal*, so dass $p_{ij}^{(\ell)} > 0$. Es folgt aufgrund der Minimalität von ℓ und da $i \neq j$ für jede natürliche Zahl n

$$\mathbb{P}_i[X_\ell = j, X_n = i] = \begin{cases} p_{ij}^{(\ell)} p_{ji}^{(n-\ell)} = 0, & \text{falls } n \geqslant \ell \\ p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(\ell-n)} = 0, & \text{falls } n < \ell \\ 0, & \text{falls } n = \ell. \end{cases}$$

Sei nun m eine beliebige natürliche Zahl und $N = \min\{n \,|\, X_n = i\}$. Nach Obigem gilt nun (beachte Disjunktheit)

$$\mathbb{P}_i[N \leqslant m, X_\ell = j] = \sum_{n=1}^{\ell} \mathbb{P}_i[N = n, X_\ell = j] \leqslant \sum_{n=1}^{\ell} \mathbb{P}_i[X_n = i, X_\ell = j] = 0.$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i[\textstyle\bigcup_{n=1}^m \{X_n = i\}] &= \mathbb{P}_i[\textstyle\bigcup_{n=1}^m \{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i\}] = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}_i[X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i] \\ &= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}_i[N = n] = \mathbb{P}_i[N \leqslant m] = \mathbb{P}_i[\{N \leqslant m, X_\ell = j\} \cup \{N \leqslant m, X_\ell \neq j\}] \\ &= \mathbb{P}_i[N \leqslant m, X_\ell = j] + \mathbb{P}_i[N \leqslant m, X_\ell \neq j] \leqslant \mathbb{P}_i[X_\ell \neq j] = 1 - p_{ij}^{(\ell)}. \end{aligned}$$

Nun folgt in der Notation von Definition 4.6 mit WTS Lemma 1.8, da i rekurrent ist (beachte, dass die rechte Seite von der obigen Ungleichung unabhängig von m ist)

$$1 = F_{ii} = \mathbb{P}_i[\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty \{X_n = i\}] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^m \{X_n = i\}] \leqslant 1 - p_{ij}^{(\ell)} < 1.$$

Damit haben wir einen Widerspruch gefunden. Somit muss gelten $j \rightsquigarrow i$.

■

Aufgabe 28 [Simulation (Treffwahrscheinlichkeit & E[Zeit bis Arbsorption)]

Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine zufällige, symmetrische Irrfahrt auf der Menge $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$. Die Übergangsmatrix sei derart, dass $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 0.5$ für $i = 1, 2, \dots, 8, 9$.

a) In dieser Teilaufgabe gelte nun $p_{00} = p_{10,10} = 1$. Diese Irrfahrt können wir mit dem folgenden kleinen R-Programm simulieren.

probabsorb.R

```
probabsorb <- function(times,start) {
     count = 0;
     for (i in 1:times) {
          x=start;
          while (x!=0 && x!=10){
               x=x+2*rbinom(1,1,.5)-1;
          }
          if (x==0) count=count+1;
     }
     return(count/times);
}
```

Damit haben wir das folgende Ergebnis erhalten:

```
> source("probabsorb.R")
> probabsorb(10000,1)
[1] 0.8946
> probabsorb(10000,2)
[1] 0.8051
> probabsorb(10000,3)
[1] 0.7046
> probabsorb(10000,4)
[1] 0.5986
> probabsorb(10000,5)
[1] 0.4963
> probabsorb(10000,6)
[1] 0.4045
> probabsorb(10000,7)
[1] 0.2915
> probabsorb(10000,8)
[1] 0.1967
> probabsorb(10000,9)
[1] 0.1037
>
>
```

Mit diesen Daten vermuten wir, dass die Wahrscheinlichkeit in 0 absorbiert zu werden mit dem Startwert a

$$1 - \frac{a}{10}$$

beträgt.

b) Hier gelte $p_{00} = p_{10,9} = 1$, also ist nur noch der Zustand 0 absorbieren. Um die Zeit bis zur Absorption durch eine Simulation zu ermitteln, können wir das folgende Progamm benutzen:

timeabsorb.R

```
timeabsorb <- function(times,start) {
     count=0;
     for (i in 1:times) {
          x=start;
          while (x!=0){
               if (x!=10) {
                    x=x+2*rbinom(1,1,.5)-1;
               }
               else x=9;
               count=count+1;
          }
     }
     return(count/times);
}
```

Dies lieferte die folgenden Ergebnisse:

```
> source("timeabsorb.R")
> timeabsorb(10000,1)
[1] 18.9266
> timeabsorb(10000,2)
[1] 36.2026
> timeabsorb(10000,3)
[1] 52.0906
> timeabsorb(10000,4)
```

```
[1] 65.0144
> timeabsorb(10000,5)
[1] 75.2726
> timeabsorb(10000,6)
[1] 83.333
> timeabsorb(10000,7)
[1] 90.8314
> timeabsorb(10000,8)
[1] 96.4474
> timeabsorb(10000,9)
[1] 98.783
> timeabsorb(10000,10)
[1] 100.731
>
>
```

Wie wir auf dem Blatt 5 sehen werden, stimmen diese Werte relativ genau mit den exakten Werten überein.

c) Die Vermutung von Teilaufgabe a) ist korrekt. Dies werden wir in der Aufgabe 32 auf Blatt 5 beweisen.

Aufgabe 29 [kleine Analysis-Aufgabe]
Für alle $i \in \mathbb{Z}^+$ sei $q_i \in (0,1)$ gegeben.

Behauptung: Es gilt

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1-q_j) = \begin{cases} = 0, & \text{falls } \sum_{j\geqslant 0} q_j = \infty \\ > 0, & \text{falls } \sum_{j\geqslant 0} q_j < \infty. \end{cases}$$

Beweis: Für alle $j \in \mathbb{Z}^+$ gilt $q_j > 0$ und damit

$$1 > 1 - q_j^2 \;=\; (1-q_j)(1+q_j).$$

Folglich gilt $(1-q_j) < (1+q_j)^{-1}$ und somit gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$\prod_{j=0}^{n}(1-q_j) \;<\; \prod_{j=0}^{n}(1+q_j)^{-1} \;=\; \left(\prod_{j=0}^{n}(1+q_j)\right)^{-1} \;\leqslant\; \left(\sum_{j=0}^{n} q_j\right)^{-1}.$$

Falls jetzt $\sum_{j=0}^{\infty} q_j = \infty$ folgt damit, dass $\prod_{j=0}^{\infty}(1-q_j) = 0$. Somit wäre dieser Fall bewiesen.

Nehmen wir daher nun an, dass $\sum_{j=0}^{\infty} q_j < \infty$ gilt. Daraus folgt insbesondere, dass $\lim_{j\to\infty} q_j = 0$ gelten muss. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geqslant n_0$ gilt $q_j \leqslant 1/2$. Dies impliziert für alle $j \geqslant n_0$

$$1 - q_j \;\geqslant\; \frac{1}{1+2q_j} \;\geqslant\; \frac{1}{e^{2q_j}} \;=\; e^{-2q_j}.$$

Es folgt damit für alle $n \geqslant n_0$

$$\prod_{j=n_0}^{n}(1-q_j) \;\geqslant\; \prod_{j=n_0}^{n} e^{-2q_j} \;=\; \exp\left(-2\sum_{j=n_0}^{n} q_j\right) \;\geqslant\; \exp\left(-2\sum_{j=1}^{\infty} q_j\right)$$

und daraus können wir die Behauptung sofort schliessen.

■

Aufgabe 30 [Simulation Dauer, bis 99% der RW retour]
Sei $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = 0.5$ für alle $i \geqslant 1$; die $(X_i)_{i\geqslant 1}$ seien iid Zufallsgrössen. Wir definieren nun einen symmetrischen Random Walk durch $S_0 = 0$ und für $n \geqslant 1$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Weiter sei $T = \min_{n\geqslant 1}\{n \mid S_n = 0\}$ die Stoppzeit der ersten Rückkehr nach 0. Mit dem folgenden R-Programm können wir eine reelle Zahl a finden, so dass

$$\mathbb{P}[T \leqslant a] \;\doteq\; 0.99.$$

duration.R

```
duration <- function(times,maxsteps=7000,prob=0.99) {
     for (j in 1:times){
          s = cumsum(2*rbinom(maxsteps,1,0.5)-1);
          T[j]=min(which(c(s,0)==0));
     }
     return(quantile(T,prob,names=F));
}
```

Dies lieferte die folgende Ausgabe:

```
> source("duration.R")
> duration(1000000)
[1] 6546
>
```

Also schätzen wir, dass mit $a = 6546$ gilt $\mathbb{P}[T \leqslant a] \doteq 0.99$.