Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Treffwahrscheinlichkeiten & erwartete Zeit bis zur Absorption

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 14, Abgabe der Lösungen: Woche 15 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 16

Must

Aufgabe 31 [konkrete Anwendung von Treffwahrscheinlichkeiten]

Hansli und Fritzli werfen eine Münze an die Wand. Derjenige, dessen Münze näher an der Wand liegt, gewinnt die Münze des Gegners. Fritz spielt besser als Hans. Er gewinnt in jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit 0.6. Fritz beginnt das Spiel mit 2 und Hans mit 3 Münzen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz keine Münzen mehr hat und damit das Spiel verliert?

Standard

Aufgabe 32 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie (vgl Vlsg p 89)] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\ldots,N\}$, wo $N>1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00}=1=p_{NN}, p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\in\{1,2,\ldots,N-1\}$. Berechnen Sie $y_i:=\mathbb{P}_i[\cup_{n\geq 0}\{X_n=0\}]$ für alle $0\leq i\leq N$.

Aufgabe 33 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie und rechts offen] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\ldots\}$, wo $\{0\}$ absorbierend ist: $p_{00}=1, p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\geq 1$. Berechnen Sie $y_i:=\mathbb{P}_i[\cup_{n\geq 0}\{X_n=0\}]$ für alle $i\geq 0$.

Aufgabe 34 [voll symmetrisch] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\ldots,N\}$, wo $N>1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00}=1=p_{NN}, p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\in\{1,2,\ldots,N-1\}$. Sei $M:=\inf\{n\geq 0|X_n\in\{0,N\}\}$. Berechnen Sie $e_i:=\mathbb{E}_i[M]:=\mathbb{E}[M|X_0=i]$ für alle $0\leq i\leq N$.

Aufgabe 35 [einseitige Absorption] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\ldots,N\}$, wo $N>1$ und der Zustand $\{0\}$ sei absorbierend: $p_{00}=1=p_{N,N-1}, p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\in\{1,2,\ldots,N-1\}$. Sei $M:=\inf\{n\geq 0|X_n=0\}$. Berechnen Sie $e_i:=\mathbb{E}_i[M]:=\mathbb{E}[M|X_0=i]$ für alle $0\leq i\leq N$ und vergleichen Sie die Resultate mit den Schätzungen, welche wir in Aufgabe 28 durch Simulation erhalten haben. Vergleichen Sie auch die Resultate von dieser Aufgabe mit den Resultaten von Aufgabe 34.

Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Olivier Warin

15. Mai 2013

Aufgabe 31 [konkrete Anwendung von Treffwahrscheinlichkeiten]
Hansli und Fritzli werfen eine Münze an die Wand. Derjenige, dessen Münze näher an der Wand liegt, gewinnt die Münze des Gegners. Fritzli spielt besser als Hansli. Er gewinnt in jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit 0.6. Fritzli beginnt das Spiel mit 2 und Hansli mit 3 Münzen.

Nun interessieren wir uns für die Wahrscheinlichkeit, dass Fritzli keine Münzen mehr hat und damit das Spiel verliert. Dazu betrachen wir die Anzahl Münzen X_n, welche nach n Runden im Besitz von Fritzli sind, als Markovkette auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Zustände 0 und 5 sind absorbierend, da dann Hansli bzw. Fritzli das Spiel gewonnen hat. Ausserdem gilt für $0 < i < 5$ $p_{i,i+1} = 0.6$ und $p_{i,i-1} = 0.4$.

Analog, wie wir im Skript am Ende des Abschnittes 5.2 (auf den Seite 88 und 89) gesehen haben, folgt mit Satz 5.3

$$\mathbb{P}[\bigcup_{n\geqslant 1}\{X_n = 0\} \mid X_0 = 2\}] = 1 - \frac{(0.4/0.6)^2 - 1}{(0.4/0.6)^5 - 1} \doteq 0.36019.$$

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit etwa 36.019%.

Aufgabe 32 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie (vgl. Vlsg p 89)]
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, wo $N > 1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00} = 1 = p_{NN}$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Weiter sei $y_i = \mathbb{P}_i[\bigcup_{n\geq 0}\{X_n = 0\}]$. Die Übergangsmatrix P lautet nun wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & & \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 5.3 gilt nun $Py = y$ und damit also für alle $i = 1, \dots, N-1$: $y_i = \frac{y_{i-1}}{2} + \frac{y_{i+1}}{2}$. Mit Hilfe einer Indexverschiebung erhalten wir somit die Rekurrenzgleichung

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i.$$

In den Notationen von Abschnitt 5.1 und Satz 5.1 gilt hier $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$, also $z_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$ und $t = 1$. Satz 5.1 impliziert also

$$y_i = \sum_{s=1}^{t} z_s^i \sum_{m=0}^{\alpha_s - 1} c_{sm} i^m \; = \; c_{10} + c_{11} i.$$

Nach Satz 5.3 gilt $y_0 = 1$ und da der Zustand $\{N\}$ absorbierend ist, gilt $y_N = 0$. Wir schliessen:

$$\begin{aligned} 1 \; = \; y_0 &= c_{10} + c_{11} \cdot 0 \\ 0 \; = \; y_N &= c_{10} + c_{11} N \end{aligned}$$

und damit $c_{10} = 1$ und $c_{11} = -1/N$. Wir erhalten also

$$y_i = 1 - \frac{i}{N}.$$

Dies stimmt mit der Vermutung überein, welche wir in Aufgabe 28 aufgestellt hatten.

Aufgabe 33 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie und rechts offen]
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\dots\}$, wo $\{0\}$ absorbierend ist: $p_{00}=1$, $p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\geq 1$. Weiter sei $y_i=\mathbb{P}_i[\bigcup_{n\geq 0}\{X_n=0\}]$. Genau wie in Aufgabe 32 erhalten wir in den Notationen von Satz 5.1:

$$y_i = c_{10}+c_{11}i.$$

Da nach Satz 5.3 $y_0=1$ gelten muss, erhalten wir sofort $c_{10}=1$. Desweiteren folgt aus Satz 5.3 a) $0\leqslant y_i\leqslant 1$ für alle i. Diese Bedingung kann nur dann erfüllt werden, wenn $c_{11}=0$ gilt. Es folgt

$$y_i=1,\ \text{für alle } i\geqslant 0.$$

Dies ist kompatibel mit den Resultaten des Random Walks auf $\mathbb{Z}$ (Satz 4.15).

Aufgabe 34 [voll symmetrisch]
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,\dots,N\}$, wo $N>1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00}=1=p_{NN}$, $p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\in\{1,2,\dots,N-1\}$. Seien weiter $M=\inf\{n\geq 0\,|\,X_n\in\{0,N\}\}$ und $e_i=\mathbb{E}_i[M]=\mathbb{E}[M\,|\,X_0=i]$.

Mit Satz 5.4 folgt nun für alle $i=1,\dots,N-1$: $e_i=1+\frac{e_{i-1}}{2}+\frac{e_{i+1}}{2}$. Eine Indexverschiebung liefert somit

$$e_{i+2}=2e_{i+1}-e_i-2.$$

Genau wie in Aufgabe 32 berechnet, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $c_{10}+c_{11}i$ ($c_{10},c_{11}\in\mathbb{R}$). Damit folgt mit Satz 5.2:

$$e_i=c_{10}+c_{11}i-\frac{2i^2}{1\cdot 2!} = c_{10}+c_{11}i-i^2.$$

Satz 5.4 impliziert auch noch $e_0=e_N=0$, woraus sofort $c_{10}=0$ und $c_{11}=N$ folgt. Wir erhalten also

$$e_i=Ni-i^2.$$

Aufgabe 35 [einseitige Absorption]
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,2,\dots,N\}$, wo $N>1$ und der Zustand $\{0\}$ sei absorbierend: $p_{00}=1=p_{N,N-1}$, $p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5$ für $i\in\{1,2,\dots,N-1\}$. Seien weiter $M=\inf\{n\geq 0\,|\,X_n=0\}$ und für $i=0,\dots N$ $e_i=\mathbb{E}_i[M]=\mathbb{E}[M\,|\,X_0=i]$.

Analog wie in Aufgabe 34 erhalten wir in den Notationen von Satz 5.2:

$$e_i=c_{10}+c_{11}i-i^2.$$

Da, nach Satz 5.4, $e_0=0$ gilt, folgt sofort $c_{10}=0$. Desweiteren gilt auch $e_N=e_{N-1}+1$ und damit

$$c_{11}N-N^2=c_{11}(N-1)-(N-1)^2.$$

Wir schliessen $c_{11}=2N$ und somit

$$e_i=2Ni-i^2.$$

Das ist genau dasselbe Ergebnis, wie in Aufgabe 34, wenn wir dort mit $2N$ statt N arbeiten würden. Dies ist auch aus Symmetriegründen plausibel.

In der Simulation von Aufgabe 28 haben wir mit $N=10$ die folgenden Resultate erhalten:

i	Simulation	Theorie	Fehler
1	18.9266	19	0.0734
2	36.2026	36	0.2026
3	52.0906	51	1.0906
4	65.0144	64	1.0144
5	75.2726	75	0.2726
6	83.333	84	0.6670
7	90.8314	91	0.1686
8	96.4474	96	0.4474
9	98.783	99	0.2170
10	100.731	100	0.7310