Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Langzeitverhalten, endlicher Fall zur Einstimmung

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 15, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 17

Standard

Aufgabe 36 [Gleichgewichtsverteilung] [5 Punkte]

Wenn es heute regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit α. Wenn es heute nicht regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit β.

a) Bilden Sie die Übergangsmatrix des Prozesses.

b) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung für diesen Prozess. Benutzen Sie dazu die Theorie aus Kapitel 4, und zwar die Konsequenzen rund um den Satz von Perron-Frobenius.

c) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung, wenn $\alpha = 0.7$ und $\beta = 0.4$?

Aufgabe 37 [Gleichgewichtsverteilung] [5 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie sich vor, Herr Müller muss beurteilen, in welchem Zustand diese MC zur Zeit ist. Herr Müller weiss nur, dass n mittlerweile sehr gross ist und leider hat er auch keine Ahnung, wie die Anfangsverteilung war. Welche Beurteilung würden Sie ihm empfehlen, wenn Sie ihn beraten müssten? Wie begründen Sie diesen Entscheid?

Honours

Aufgabe 38 [Gesetz der grossen Zahlen mit $E[X_1] = \infty$] [5 Punkte]

Sei X_i, $i \geq 1$, eine Folge von iid Zufallsgrössen mit $E[X_1] = \infty$ und $X_1 \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \infty$$

fast sicher wenn $n \to \infty$.

Übungsblatt 6 zur Vorlesung “Angewandte Stochastik”

Olivier Warin

19. Mai 2013

Aufgabe 36 [Gleichgewichtsverteilung]
Wenn es heute regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit α. Wenn es heute nicht regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit β.

a) Die Übergangsmatrix P von diesem Prozess, kann wie folgt aufgestellt werden:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

b) Um die Gleichgewichtsverteilung für diesen Prozess zu bestimmen, müssen wir den Rechtseigenvektor μ von P zum Eigenwert 1 bestimmen. Es gilt nämlich für jede Anfangsverteilung λ (siehe Seite 77 im Skript)

$$\lambda^t P = \mu^t + o(c\mathbf{1}^t)$$

für eine reelle Zahl c mit $|c| < 1$. Also konvergiert die Verteilung gegen diese Gleichgewichtsverteilung μ.

Konkret geht es also um die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

Da μ eine Verteilung ist, muss natürlich auch $\mu_1 + \mu_2 = 1$ gelten. Wir schliessen:

$$\mu^t = \frac{1}{1-\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

falls nicht gerade $\alpha = 1$ und $\beta = 0$. In dem Fall von $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ können wir den Satz von Perron Frobenius (Satz 4.14) nicht anwenden, da dann die Markovkette nicht irreduzibel ist.

c) Mit $\alpha = 0.7$ und $\beta = 0.4$ erhalten wir mit b) durch einsetzen

$$\mu^t = \frac{1}{1-0.7+0.4} \begin{pmatrix} 0.4 & 1-0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0.4285714 & 0.5714286 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37 [Gleichgewichtsverteilung]
Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Genau wie in Aufgabe 36 können wir die Gleichgewichtsverteilung μ mittels der Gleichung $\mu^t P = \mu^t$ und $\mu^t \mathbf{1} = 1$ bestimmen. Dies ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3 &= \mu_1 \\ \frac{3}{4}\mu_1 &= \mu_2 \\ \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 &= \mu_3 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mu^t = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Wie in Aufgabe 36 erwähnt, konvergiert die Verteilung unabhängig von der Startverteilung für $n \to \infty$ gegen μ. Da nun $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ folgt, dass sich die Markov-Kette, wenn n sehr gross ist, am wahrscheinlichsten im Zustand 1 befindet. Es wäre also am sinnvollsten für Herr Müller, den Zustand Nummer 1 zu wählen.

Aufgabe 38 [Gesetz der grossen Zahlen mit $E[X_1] = \infty$]
Es sei $(X_i)_{i\geqslant 1}$ eine Folge von iid Zufallsgrössen mit $E[X_1] = \infty$ und $X_1 \geqslant 0$.

Behauptung: Der Ausdruck $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ konvergiert fast sicher gegen ∞.

Beweis: Definiere für alle $k \geqslant 1$ $X_i^{(k)} = \min\{k, X_i\}$. Nun gilt offenbar $E[X_i^{(k)}] \leqslant E[k] = k < \infty$ und ausserdem sind die $X_i^{(k)}$ für $i \geqslant 1$ klar iid. Für alle k konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$ für $n \to \infty$ also fast sicher gegen $E[X_1^{(k)}]$ (WT-Satz 5.6). Folglich gibt es für alle k eine Nullmenge N_k (d.h. $P[N_k] = 0$), so dass für alle $\omega \in N_k^c$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}(\omega) = E[X_1^{(k)}]. \tag{$*$}$$

Wir definieren weiter $N = \bigcup_{k\geqslant 1} N_k$. Die Menge N ist offenbar auch eine Nullmenge und die Gleichung $(*)$ ist für alle k und alle $\omega \in N^c$ korrekt.

Des Weiteren gilt nach dem Monoton-Konvergenzsatz von Beppo Levy (WT-Satz 4.7)

$$\lim_{k\to\infty} E[X_i^{(k)}] = E[X_i] \;=\; \infty.$$

Damit und mit $(*)$ schliessen wir, dass für alle $\omega \in N^c$ gilt (beachte, dass $X_i \geqslant X_i^{(k)}$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) \;\geqslant\; \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}(\omega) \;=\; \lim_{k\to\infty} E[X_1^{(k)}] \;=\; \infty,$$

was die Behauptung zeigt.

■