Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

<u>Langzeitverhalten, stationäre Masse</u>

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 18

Must

<u>Aufgabe 39 [Erwartete Rückkehrzeit]</u>

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf der Menge $S := \{1,2,3,4,5,6\}$ mit Übergangsmatrix P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Welche Zustände sind rekurrent und welche vergänglich?
b) Rechnen Sie die erwarteten Rekurrenzzeiten m_i für $i \in S$ aus.

Standard

<u>Aufgabe 40 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$]</u> [5 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ wenn $i \geq 1$ und $p_{01} = 1$. Ist diese Irrfahrt rekurrent? *Begründen Sie Ihre Antwort auf Grund der Lösung der Gleichungen im Hauptsatz über das stationäre Mass.*

<u>Aufgabe 41 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$]</u> [6 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p$ $\forall i$. Untersuchen Sie diese Irrfahrt in Abhängigkeit von p auf Rekurrenz/Transienz *mit Hilfe des Hauptsatzes über das stationäre Mass.*

Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

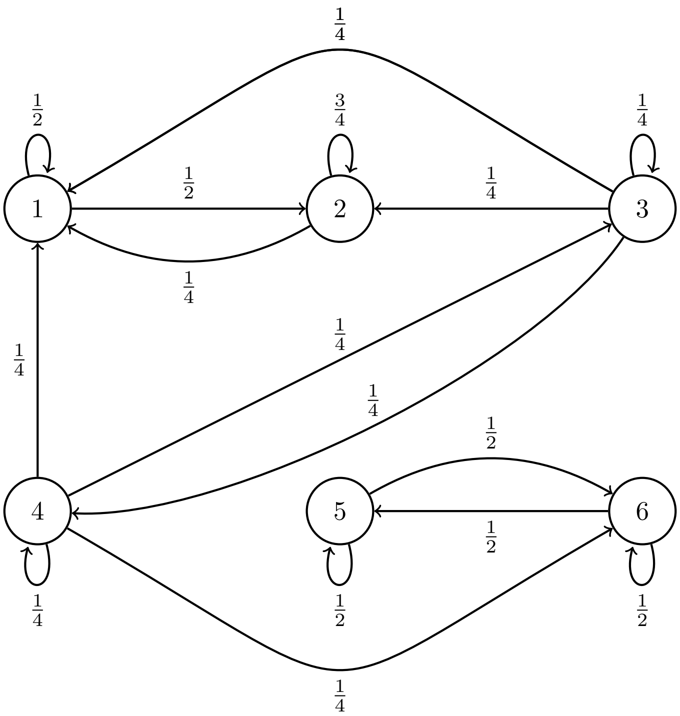
Olivier Warin

23. Mai 2013

Aufgabe 39 [Erwartete Rückkehrzeit]
Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Markov-Kette auf der Menge $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist eine Skizze des Übergangsgraphen:



a) Wir haben zwei abgeschlossene Klassen: $\{1,2\}$ und $\{5,6\}$. Des Weiteren haben wir eine offene Klasse: $\{3,4\}$. Satz 4.10 impliziert nun, dass die Zustände 1, 2, 5, 6 rekurrent und die Zustände 3, 4 vergänglich sind.

b) Die erwarteten Rückkehrzeiten m_3 und m_4 sind klar ∞, da die Zustände 3 und 4 vergänglich sind. Für die erwarteten Rückkehrzeiten der Zustände 1 und 2 können wir Korollar 6.12 und verwenden. Dazu müssen wir eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

finden. Wir erkennen zum Beispiel die Lösung $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 2$. Korollar 6.12 liefert somit

$$m_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} = 3$$
$$m_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} = \frac{3}{2}.$$

Analog erhalten wir für m_5 und m_6 das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mu_5 & \mu_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_5 & \mu_6 \end{pmatrix}.$$

Dies ist erfüllt für $\mu_5 = \mu_6 = 1$. Mit Korollar 6.12 folgt

$$m_5 = \frac{\mu_5 + \mu_6}{\mu_5} = 2$$
$$m_6 = \frac{\mu_5 + \mu_6}{\mu_6} = 2.$$

Aufgabe 40 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$]
Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$ mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ wenn $i \geqslant 1$ und $p_{01} = 1$.

Behauptung: Diese Irrfahrt ist rekurrent.

Beweis: Wir verwenden den Hauptsatz über das stationäre Mass (Satz 6.10). Wir benutzen dieselben Notationen wie in dem besagten Satz und wählen $a = 1$. Die Bedingung i) impliziert sofort $x_1 = 1$. Weiter folgt aus ii) $x_0 = 1/2 \cdot x_1 = 1/2$ und für $k > 1$:

$$x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{1}{2}x_{k+1}.$$

Genau wie in Aufgabe 32 (mit Satz 5.1) folgt daraus, dass für $k \geqslant 1$ gilt

$$x_k = c_{10} + c_{11}k,$$

für gewisse reelle Zahlen c_{10} und c_{11}. Da $x_1 = 1$ folgt sofort $c_{10} = 1 - c_{11}$ und somit

$$x_k = 1 - c_{11} + c_{11}k.$$

Nach Bedingung iii) gilt für alle k $x_k \geqslant 0$. Dies implizieert $c_{11} \geqslant 0$. Um noch die Bedingung iv) zu erfüllen, muss gelten

$$1 \cdot x_0 + \frac{1}{2}x_2 \leqslant x_1,$$

also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - c_{11} + 2c_{11}) \leqslant 1$$

und damit $c_{11} \leqslant 0$. Wir schliessen $c_{11} = 0$. Es gilt also $x_0 = 1/2$ und $x_k = 1$ für $k \geqslant 1$. Dies ist die einzige Lösung von den vier Bedingungen aus Satz 6.10, also gilt $x^* = x$. Teil II von Satz impliziert nun

$$F_{11} = (x^{*t}P)_1 = x_0^* + \frac{1}{2}x_2^* = 1.$$

Damit ist die behauptete Rekurrenz gezeigt.

∎

Aufgabe 41 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$]
Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p$ für alle i.

Behauptung: Diese Irrfahrt ist rekurrent wenn $p = 0.5$ und sonst transient.

Beweis:

Fall 1: $p = 0$ oder $p = 1$. In diesem Fall haben wir nicht eine einzige abgeschlossene Klasse. Somit können wir den Satz 6.10 nicht anwenden. Jeder Zustand ist hier eine einzelne *offene* Klasse. Satz 4.10 impliziert, dass jeder Zustand und damit die Irrfahrt vergänglich ist.

Fall 2: $p \neq 0$ und $p \neq 1$. Nun haben wir eine einzige abgeschlossene Klasse und können den Hauptsatz über stationäre Masse (Satz 6.10) anwenden. In denselben Notationen wie in dem Satz, wählen wir $a = 0$. Die Bedingung i) impliziert $x_0 = 1$. Aus Bedingung ii) folgt für alle $k \neq 0$.

$$x_k = (1-p)x_{k-1} + px_{k+1}. \tag{$*$}$$

Fall 2.1: $p = 1/2$. In diesem Fall folgt aus $(*)$ genau wie in Aufgabe 40, dass gilt für $k \geqslant 0$ gilt

$$x_k = c_{10} + c_{11}k$$
$$x_{-k} = d_{10} - d_{11}k,$$

für gewisse $c_{10}, c_{11}, d_{10}, d_{11} \in \mathbb{R}$. Da $x_0 = 1$ folgt $c_{10} = d_{10} = 1$. Nach Bedingung iii) gilt $x_k \geqslant 0$ für alle k und damit $c_{11} \geqslant 0$ und $d_{11} \leqslant 0$. Schlussendlich folgt mit Bedingung iv)

$$\frac{1}{2}x_{-1} + \frac{1}{2}x_1 \leqslant x_0$$

und damit

$$\frac{1}{2}(1-d_{11}) + \frac{1}{2}(1+c_{11}) \leqslant 1.$$

Wir schliessen daraus $c_{11} = d_{11} = 0$. Es gilt also für alle $k \in \mathbb{Z}$ $x_k = 1$. Teil II von Satz 6.10 impliziert daraus sofort Rekurrenz.

Fall 2.2: $0 < p < 1/2$. Mit Satz 5.1 können wir hier aus $(*)$ für $k \geqslant 0$ schliessen:

$$x_k = c_{10} + c_{20}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$
$$x_{-k} = d_{10} + d_{20}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{-k}.$$

Aus $x_0 = 1$ folgt sofort $c_{10} = 1 - c_{20}$ und $d_{10} = 1 - d_{20}$. Wir haben also

$$x_k = 1 + c_{20}\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^k - 1\right)$$
$$x_{-k} = 1 + d_{20}\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^{-k} - 1\right).$$

Wir setzen nun $c_{20} = 0$. Es ist jetzt leicht zu überprüfen, dass alle vier Bedinungen aus Satz 6.10 mit $d_{20} = 0$ und mit $d_{20} = 1$ erfüllt sind. Damit hat hier das System von Bedingungen mehr als eine Lösung. Aus dem Teil III von Satz 6.10 folgt daraus, dass die Irfahrt transient sein muss.

Fall 2.3: $1/2 < p < 1$: Aus Symmetriegründen analog wie Fall 2.2.

∎