Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Repetition WT

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 11

Must

Aufgabe 1 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten]

Zeigen Sie: bedingte Wahrscheinlichkeiten $P[.|B]$ sind (auch) Wahrscheinlichkeiten. Setzen Sie voraus, dass $P[B] > 0$.

Aufgabe 2 [Summe Geometrisch]

Angenommen, ein Motor springt mit Wahrscheinlichkeit 0.99 beim Starten an. Wie gross ist die erwartete Zeit (von jetzt an), bis der Motor zum dritten Mal nicht anspringt. Setzen Sie Unabhängigkeit der Ereignisse voraus.

Standard

Aufgabe 3 [Z-Transform] [1 Punkt]

X sei $\mathcal{N}(3, 16)$-verteilt. Berechnen Sie $P[-2 < X < 4]$.

Aufgabe 4 [Unabhängigkeit] [1 Punkt]

Geben Sie eine Folge von Zufallsgrössen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, sodass jeweils gilt $X_i \coprod X_{i+1} \forall i \geq 0$ *und* für kein $i \geq 0$ gilt $X_i \coprod X_{i+2}$.

Aufgabe 5 [Exponentialverteilung] [1 Punkt]

Das verliebte Paar Seppli und Trudi verbringen einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche sie für die eine Lampe mitnehmen sollten - diese eine Lampe muss dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 3 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$-Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis den beiden das Licht ausgeht? Setzen Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.

Aufgabe 6 [Exponentialverteilung] [2 Punkte]

Das verliebte Paar Fritz und Vreni verbringen auch einen Winter auf einer Berghütte. Dazu müssen sie an allerlei Vorrat denken; unter anderem auch an die Anzahl Glühbirnen, welche sie für die *zwei Lampen* mitnehmen sollten - diese beiden Lampen müssen dauerhaft brennen. Sie entscheiden sich für total 4 Glühbirnen. In einem gängigen Modell wird die Rate, bis eine solche Glühbirne kaputt geht, mit einer $\exp(\lambda)$-Zufallsgrösse modelliert. Es gelte hier $\lambda = 1000^{-1}$, wenn die Zeiteinheit Stunden ist. Wie lange dauert es im Erwartungswert im Modell, bis sie nur noch eine der Lampen brennen haben? Setzten Sie jeweils Unabhängigkeit voraus.

Aufgabe 7 [Bayes] [1 Punkt]

Karl liebt den Alkohol (wer nicht). Die Wahrscheinlichkeit, dass er nach Büroschluss trinkt, ist 0.8. Karl ist auch vergesslich. Die Wahrscheinlichkeit, dass er seinen Schirm stehen lässt wenn er nüchtern ist, ist 0.7. Die Wahrscheinlichkeit, dass Karl seinen Schirm stehen lässt, wenn er getrunken hat, ist sogar 0.8. Karl kommt ohne Schirm nach Hause. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diesmal nicht getrunken hat?

Aufgabe 8 [Dichte, Erwartungswert, Transformation] [2.5 Punkte]

X habe Dichte $f(x) = Kx^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie

a) die Normierungskonstante K

b) $E[X]$

c) $E[1/X]$

d) die Verteilungsfunktion von $Y := 1/X$

e) die Dichte von $Y := 1/X$.

Aufgabe 9 [Transformation von Zufallsgrössen] [2 Punkte]

Sei X eine $U[0, 1]$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Dichte von $Y := -\log(X)$. Wie heisst diese Verteilung (ganz genaue Angabe mit Parameter)?

Aufgabe 10 [$(\Omega, \mathcal{A}, P)$] [1 Punkt]

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und 2 Zufallsgrössen X, Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, sodass gleichzeitig gilt: $P[X = 0] = P[Y = 0] = (1 - p); P[X = 1] = P[Y = 1] = p; P[X + Y = 1] = 1$. Sie dürfen p frei wählen.

Honours

Aufgabe 11 [$n \longrightarrow \infty$; Verallgemeinerung LLN] [2 Punkte]

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsgrössen mit $E[X_i] = \mu_i$ und $V[X_i] = \sigma_i^2$ und $Cov(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$. Sei $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{\sigma}_n^2 := n^{-1} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ und $\bar{\mu}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\bar{\sigma}_n^2 = 0$. Zeigen Sie: für vorgegebenes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| > \epsilon] = 0.$$