

Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Weitere notwendige Grundlagen aus der WT: Konvergenzarten und -Sätze

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 10, Abgabe der Lösungen: Woche 11 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 12

Must

Aufgabe 12 [$\mathcal{B}(\mathbb{R})$]

Die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste σ -Algebra, welche alle nach links halboffenen Intervalle $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, enthält. Man sagt: sie wird von diesen Intervallen erzeugt. Zeigen Sie:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle einpunktigen Mengen.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle rechts halboffenen Intervalle $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle offenen Intervalle (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle beidseitig abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Standard

Aufgabe 13 [Konvergenz in L^1 , fs, aber nicht in L^2] [3 Punkte]

Geben Sie eine Situation an, in der eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichzeitig gegen ein X in L^1 konvergiert, auch fs, aber nicht in L^2 .

Aufgabe 14 [Konvergenz in W'keit gegen $a \Leftrightarrow$ Konvergenz in Verteilung gegen a] [4 Punkte]

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Zeigen Sie mit $a \in \mathbb{R}$: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $a \Leftrightarrow (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen a . Vergleichen Sie auch mit WT-Satz 5.4.

Aufgabe 15 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung] [2 + 2 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ mit $P[[a, b]] := b - a$, wenn $0 \leq a \leq b \leq 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge von Zufallsgrößen

$$X_n(\omega) := 1_{[0, 1/n]}(\omega).$$

Zeigen Sie durch direktes Überprüfen der Definition, dass diese Folge in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0 konvergiert.

Honours

Aufgabe 16 [fs-Konvergenz \Rightarrow Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] [3 Punkte]

Beweisen Sie: Sei (X_n) , $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrößen, welche fs gegen eine Zufallsgröße X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X .