Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

<u>Weitere notwendige Grundlagen aus der WT: Konvergenzarten und -Sätze</u>

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 10, Abgabe der Lösungen: Woche 11 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 12

Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad der Übungen: *dieses* Blatt ist für Personen, welche die WT noch nicht besucht haben, am Schwierigsten - also nicht aufgeben.

Must

Aufgabe 12 [$\mathcal{B}(\mathbb{R})$]

Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste σ-Algebra, welche alle nach links halboffenen Intervalle $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$, enthält. Man sagt: sie wird von diesen Intervallen erzeugt. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle einpunktigen Mengen.

b) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle rechts halboffenen Intervalle $[a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle offenen Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

d) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält auch alle beidseitig abgeschlossenen Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$.

Standard

Aufgabe 13 [Konvergenz in L^1, fs, aber nicht in L^2] [3 Punkte]

Geben Sie eine Situation an, in der eine Folge von Zufallsgrössen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichzeitig gegen ein X in L^1 konvergiert, auch fs, aber nicht in L^2.

Aufgabe 14 [Konvergenz in W'keit gegen a $\Leftrightarrow$ Konvergenz in Verteilung gegen a] [4 Punkte]

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie mit $a \in \mathbb{R}$: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen a $\Leftrightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen a. Vergleichen Sie auch mit WT-Satz 5.4.

Aufgabe 15 [Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung] [2 + 2 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ mit $P[[a, b]] := b - a$, wenn $0 \leq a \leq b \leq 1$ (Uniformverteilung). Wir definieren eine Folge von Zufallsgrössen

$$X_n(\omega) := 1_{[0,1/n]}(\omega).$$

Zeigen Sie durch direktes Überprüfen der Definition, dass diese Folge in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0 konvergiert.

Honours

Aufgabe 16 [fs-Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Wahrscheinlichkeit] [3 Punkte]

Beweisen Sie: Sei (X_n), $n \geq 1$, eine Folge von Zufallsgrössen, welche fs gegen eine Zufallsgrösse X konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.