Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Elementare Eigenschaften von Markov-Ketten, Stoppzeit

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 11, Abgabe der Lösungen: Woche 12 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 13 oder asap

---

Must

Aufgabe 17 [FTW mit bedingten Wahrscheinlichkeiten: bFTW]

(vgl. WTS-Lemma 1.7) $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Partition von Ω (die B_i's sind disjunkt und $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$). Weiter sei für alle $B_i, i \geq 1$, $P[B_i] > 0$ erfüllt. Des weiteren habe man ein C, so dass $P[C] > 0$. Zeigen Sie, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$:

$$P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[B_i|C].$$

Dabei definieren wir $P[A|C \cap B_i] P[B_i|C] := 0$ falls $B_i \cap C = \phi$.

Standard

Aufgabe 18 [Mehrere Schritte] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, Initialverteilung λ und Zustandsraum $\mathbb{Z}^+$. Zeigen Sie, dass für alle $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, j_1, \ldots, j_k) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+k}$ und $k \geq 1, n \geq 0, i \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \ldots, X_{n+k} = j_k | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] \\
&= \mathbb{P}[X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots, X_k = j_k | X_0 = i] = p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{k-1} j_k}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 19 [Der Random Walk RW als Markov-Kette] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von iid Zufallsgrössen. Es gelte $\mathbb{P}[X_i = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_i = -1]$, $p \in (0,1)$ (nicht symmetrisch!). Definiere nun $S_n := S_{n-1} + X_n$ und sei die Startverteilung $\mathbb{P}[S_0 = i] = \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie diese Ausgangslage mit Hilfe einer Übergangsmatrix und einer Initialverteilung (es ist kein Problem, dass der RW auf $\mathbb{Z}$ und nicht auf $\mathbb{Z}^+$ definiert ist). Beweisen Sie, dass es sich hierbei um eine Markov-Kette handelt.

Aufgabe 20 [Stoppzeit] [3 Punkte]

Überprüfen Sie, ob folgende Ausdrücke eine Stoppzeit (Markov-Zeit) definieren:

a) $N := \max\{n | X_n = j\}$
b) $N := \min\{n | \sum_{j=1}^{n} (-1)^j X_j < -K\}$ wo $K \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 21 [die einfachste, nichttriviale Markov-Kette] [2 Punkte]

Zeigen Sie durch Induktion, dass mit $p, q \in (0, 1)$ und

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

die Matrix P^n von der Form

$$\frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & p - p(1-q-p)^n \\ q - q(1-p-q)^n & p + q(1-q-p)^n \end{pmatrix}$$

ist. Wie ist "P^∞"? Was folgern Sie daraus?

Honours

Aufgabe 22 [Markov-Chain Monte Carlo (MCMC)] [2+1 Punkte]

Mit der gleichen Ausgangslage wie in Aufgabe 21, wählen wir $p_{01} = 0.3$ und $p_{10} = 0.4$. Simulieren Sie mit mindestens 1000 Durchgängen in einer geeigneten Rechenumgebung folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) mit Startwert 0, Wahrscheinlichkeit, nach 5, 10, 15, 20, 50, 100, 1000 Schritten in 0 zu sein,

b) mit Startwert 1, Wahrscheinlichkeit, nach 5, 10, 15, 20, 50, 100, 1000 Schritten in 0 zu sein,

und vergleichen Sie die Resultate mit dem Resultat aus Aufgabe 21.