

# Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

## Rekurrenz, Transienz, Periodizität

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 13 (bis Freitag, 15.15 Uhr),  
Rückgabe und Besprechung: Woche 14

---

### Must

#### Aufgabe 23 [Diagramm]

Machen Sie ein Diagramm (Mengen mit korrekten Teilmengen), wo die Resultate von Satz 4.10 bzgl. Rekurrenz/Transienz mitsamt Beispielen und Gegenbeispielen veranschaulicht werden.

#### Aufgabe 24 [ $\rightsquigarrow$ als Äquivalenzrelation]

Zeigen Sie, dass die Relation  $\rightsquigarrow$  eine Äquivalenzrelation ist.

### Standard

#### Aufgabe 25 [einfache Beispiele] [2.5 Punkte]

Zeichnen Sie den Übergangsgraphen, d.h. das System der Pfeile, die möglichen Übergängen entsprechen ( $p_{ij} > 0$ ), und bestimmen Sie Kommunikationsklassen, rekurrente, transiente und periodische Zustände für folgende Übergangsmatrizen:

$$a) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie bitte immer an, aus welchem Satz aus der Vorlesung Sie Ihre Schlüsse gezogen haben.

**Aufgabe 26 [Rekurrenz ist eine Klasseeigenschaft]** [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.9, d.h.: Sei  $i \rightsquigarrow j$ . Beweisen Sie: Ist  $i$  rekurrent, dann ist auch  $j$  rekurrent.

**Aufgabe 27 [nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse]** [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.10, d.h.: Sei  $K$  eine nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse. Beweisen Sie, dass  $K$  vergänglich (transient) ist.

**Aufgabe 28 [Simulation (Treffwahrscheinlichkeit & E[Zeit bis Absorption])]** [2+2+2 Punkte]

Sei  $(X_n)_{n \geq 0}$  eine zufällige, symmetrische Irrfahrt (engl. random walk (RW)) auf der Menge  $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ . Die Übergangsmatrix sei derart, dass  $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 0.5$  für  $i \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ .

a) Sei  $p_{00} = p_{10,10} = 1$ , also sind 0 und 10 absorbierend. Es ist wohl so, dass  $X_n$  für grosse  $n$  entweder 0 oder 10 ist (dies muss nicht bewiesen werden). Versuchen Sie durch eine Simulation in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass  $X_n$  in 0 absorbiert wird.

b) Sei  $p_{00} = p_{10,9} = 1$ , das heisst nur der Zustand 0 ist absorbierend. Versuchen Sie durch Simulationen in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die erwartete Zeit ist, bis  $X_n$  in 0 absorbiert ist.

c) Gegeben, der Zufallsgenerator ist perfekt. Beweisen Sie, dass die Simulationen von a) gegen die richtigen theoretischen Werte konvergieren müssen. Die richtigen, theoretischen Werte werden wir in Kapitel 5 berechnen.

**Honours**

**Aufgabe 29 [kleine Analysis-Aufgabe]** [3 Punkte]

Seien  $q_i \in (0, 1), i \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n (1 - q_j) \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \sum_{j \geq 0} q_j = \infty \\ > 0, & \text{wenn } \sum_{j \geq 0} q_j < \infty. \end{cases}$$

**Aufgabe 30 [Simulation Dauer, bis 99 % der RW retour]** [8 Punkte]

Sei  $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$  für alle  $i \geq 1$ ; die  $(X_i)_{i \geq 1}$  seien iid Zufallsgrössen. Definiere einen symmetrischen Random Walk  $S_0 := 0$  und für  $n \geq 1 : S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ . Sei

$$T := \min_{n \geq 1} \{n | S_n = 0\}$$

die Stopzeit der ersten Rückkehr nach 0. Machen Sie eine Simulation, um  $a \in \mathbb{N}$  zu finden, sodass

$$P[T \leq a] \doteq 0.99.$$

Tipp: Die Zahl  $a$  ist kleiner als 7000. Sobald ein Random Walk länger als 7000 Schritte braucht, können Sie abbrechen.