# Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

## Rekurrenz, Transienz, Periodizität

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 15

---

### Must

**Aufgabe 23 [Diagramm]**

Machen Sie ein Diagramm (Mengen mit korrekten Teilmengen), wo die Resultate von Satz 4.10 bzgl. Rekurrenz/Transienz mitsamt Beispielen und Gegenbeispielen veranschaulicht werden.

**Aufgabe 24 [$\leftrightsquigarrow$ als Äquivalenzrelation]**

Zeigen Sie, dass die Relation $\leftrightsquigarrow$ eine Äquivalenzrelation ist.

### Standard

**Aufgabe 25 [einfache Beispiele]** [2.5 Punkte]

Zeichnen Sie den Übergangsgraphen, d.h. das System der Pfeile, die möglichen Übergängen entsprechen ($p_{ij} > 0$), und bestimmen Sie Kommunikationsklassen, rekurrente, transiente und periodische Zustände für folgende Übergangsmatrizen:

$$a) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie bitte immer an, aus welchem Satz aus der Vorlesung Sie Ihre Schlüsse gezogen haben.

**Aufgabe 26 [Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft]** [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.9, d.h.: Sei $i \leftrightsquigarrow j$. Beweisen Sie: Ist $i$ rekurrent, dann ist auch $j$ rekurrent.

**Aufgabe 27 [nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse]** [2 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.10, d.h.: Sei $K$ eine nicht abgeschlossene Kommunikationsklasse. Beweisen Sie, dass $K$ vergänglich (transient) ist.

**Aufgabe 28 [Simulation (Treffwahrscheinlichkeit & E[Zeit bis Absorption])]** [2+2+2 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine zufällige, symmetrische Irrfahrt (engl. random walk (RW)) auf der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Die Übergangsmatrix sei derart, dass $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

a) Sei $p_{00} = p_{10,10} = 1$, also sind 0 und 10 absorbierend. Es ist wohl so, dass $X_n$ für grosse $n$ entweder 0 oder 10 ist (dies muss nicht bewiesen werden). Versuchen Sie durch eine Simulation in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass $X_n$ in 0 absorbiert wird.

b) Sei $p_{00} = p_{10,9} = 1$, das heisst nur der Zustand 0 ist absorbierend. Versuchen Sie durch Simulationen in Abhängigkeit des Startwertes herauszufinden, wie gross die erwartete Zeit ist, bis $X_n$ in 0 absorbiert ist.

c) Gegeben, der Zufallsgenerator ist perfekt. Beweisen Sie, dass die Simulationen von a) gegen die richtigen theoretischen Werte konvergieren müssen. Die richtigen, theoretischen Werte werden wir in Kapitel 5 berechnen.

## Honours

**Aufgabe 29 [kleine Analysis-Aufgabe]** [3 Punkte]

Seien $q_i \in (0, 1), i \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} (1 - q_j) \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j = \infty \\ > 0, \text{ wenn } \sum_{j\geq 0} q_j < \infty. \end{cases}$$

**Aufgabe 30 [Simulation Dauer, bis 99 % der RW retour]** [8 Punkte]

Sei $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$ für alle $i \geq 1$; die $(X_i)_{i\geq 1}$ seien iid Zufallsgrössen. Definiere einen symmetrischen Random Walk $S_0 := 0$ und für $n \geq 1 : S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sei

$$T := \min_{n\geq 1} \{n | S_n = 0\}$$

die Stoppzeit der ersten Rückkehr nach 0. Machen Sie eine Simulation, um $a \in \mathbb{N}$ zu finden, sodass

$$P[T \leq a] \doteq 0.99.$$

Tipp: Die Zahl $a$ ist kleiner als 7000. Sobald ein Random Walk länger als 7000 Schritte braucht, können Sie abbrechen.