

Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Treffwahrscheinlichkeiten & erwartete Zeit bis zur Absorption

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 14, Abgabe der Lösungen: Woche 15 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 16

Must

Aufgabe 31 [konkrete Anwendung von Treffwahrscheinlichkeiten]

Hansli und Fritzli werfen eine Münze an die Wand. Derjenige, dessen Münze näher an der Wand liegt, gewinnt die Münze des Gegners. Fritz spielt besser als Hans. Er gewinnt in jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit 0.6. Fritz beginnt das Spiel mit 2 und Hans mit 3 Münzen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz keine Münzen mehr hat und damit das Spiel verliert?

Standard

Aufgabe 32 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie (vgl Vlsg p 89)] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, wo $N > 1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00} = 1 = p_{NN}$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Berechnen Sie $y_i := \mathbb{P}_i[\cup_{n \geq 0} \{X_n = 0\}]$ für alle $0 \leq i \leq N$.

Aufgabe 33 [Treffwahrscheinlichkeit bei Symmetrie und rechts offen] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0, 1, 2, \dots\}$, wo $\{0\}$ absorbierend ist: $p_{00} = 1$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ für $i \geq 1$. Berechnen Sie $y_i := \mathbb{P}_i[\cup_{n \geq 0} \{X_n = 0\}]$ für alle $i \geq 0$.

Aufgabe 34 [voll symmetrisch] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, wo $N > 1$ und die Zustände $\{0\}$ und $\{N\}$ seien absorbierend: $p_{00} = 1 = p_{NN}$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Sei $M := \inf\{n \geq 0 | X_n \in \{0, N\}\}$. Berechnen Sie $e_i := \mathbb{E}_i[M] := \mathbb{E}[M | X_0 = i]$ für alle $0 \leq i \leq N$.

Aufgabe 35 [einseitige Absorption] [3 Punkte]

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, wo $N > 1$ und der Zustand $\{0\}$ sei absorbierend: $p_{00} = 1 = p_{N,N-1}$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 0.5$ für $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Sei $M := \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$. Berechnen Sie $e_i := \mathbb{E}_i[M] := \mathbb{E}[M | X_0 = i]$ für alle $0 \leq i \leq N$ und vergleichen Sie die Resultate mit den Schätzungen, welche wir in Aufgabe 28 durch Simulation erhalten haben. Vergleichen Sie auch die Resultate von dieser Aufgabe mit den Resultaten von Aufgabe 34.