

# Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

## Langzeitverhalten, endlicher Fall zur Einstimmung

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 15, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Freitag, 16.15 Uhr),  
Rückgabe und Besprechung: Woche 17

---

### Standard

#### Aufgabe 36 [Gleichgewichtsverteilung] [5 Punkte]

Wenn es heute regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ . Wenn es heute nicht regnet, dann regnet es morgen mit Wahrscheinlichkeit  $\beta$ .

- Bilden Sie die Übergangsmatrix des Prozesses.
- Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung für diesen Prozess. Benutzen Sie dazu die Theorie aus Kapitel 4, und zwar die Konsequenzen rund um den Satz von Perron-Frobenius.
- Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung, wenn  $\alpha = 0.7$  und  $\beta = 0.4$ ?

#### Aufgabe 37 [Gleichgewichtsverteilung] [5 Punkte]

Sei  $(X_n)_{n \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie sich vor, Herr Müller muss beurteilen, in welchem Zustand diese MC zur Zeit ist. Herr Müller weiss nur, dass  $n$  mittlerweile sehr gross ist und leider hat er auch keine Ahnung, wie die Anfangsverteilung war. Welche Beurteilung würden Sie ihm empfehlen, wenn Sie ihn beraten müssten? Wie begründen Sie diesen Entscheid?

### Honours

#### Aufgabe 38 [Gesetz der grossen Zahlen mit $E[X_1] = \infty$ ] [5 Punkte]

Sei  $X_i, i \geq 1$ , eine Folge von iid Zufallsgrössen mit  $E[X_1] = \infty$  und  $X_1 \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \infty$$

fast sicher wenn  $n \rightarrow \infty$ .