# Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

## Langzeitverhalten, stationäre Masse, Kriterien für Rekurrenz und Transienz

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 17, Abgabe der Lösungen: Woche 18 (bis Freitag, 15.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 19

---

### Must

**Aufgabe 39 [Erwartete Rückkehrzeit]**

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf der Menge $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit Übergangsmatrix $P$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Welche Zustände sind rekurrent und welche vergänglich?
b) Rechnen Sie die erwarteten Rekurrenzzeiten $m_i$ für $i \in S$ aus.

### Standard

**Aufgabe 40 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$]** [5 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ wenn $i \geq 1$ und $p_{01} = 1$. Ist diese Irrfahrt rekurrent? *Begründen Sie Ihre Antwort auf Grund der Lösung der Gleichungen im Hauptsatz über das stationäre Mass.*

**Aufgabe 41 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$]** [6 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p\ \forall i$. Untersuchen Sie diese Irrfahrt in Abhängigkeit von $p$ auf Rekurrenz/Transienz *mit Hilfe des Hauptsatzes über das stationäre Mass.*

### Honours

**Aufgabe 42 [Bedingungen Rekurrenz / Transienz]** [2+2 Punkte]

Zeigen Sie mit $g(j) = j$ bei einer Markov-Kette auf $\mathbb{Z}^+$ mit $p_{01} = 1$, $p_{i0} = 0.5$ und $p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \geq 1$ positive Rekurrenz. Zeigen Sie auch, dass mit $g(j) = 2^j$ zwar Bedingung 1), nicht aber Bedingung 2) von Satz 7.2 erfüllt ist.