

# Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

## Bernoulli- und Poissonprozesse

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 18, Abgabe der Lösungen: Woche 19 (bis Freitag, 15.15 Uhr),  
Rückgabe und Besprechung: Woche 20

---

### Must

#### Aufgabe 43 [Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung]

Sei  $G$  eine geometrisch verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für natürliche Zahlen  $n > m > 0$ :

$$P[G > n | G > m] = P[G > n - m].$$

Lsg: WTS-Ü-Blatt 9

#### Aufgabe 44 [Gedächtnislosigkeit der exponentiellen Verteilung]

Sei  $T$  eine exponential verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für reelle Zahlen  $t > s > 0$ :

$$P[T > t | T > s] = P[T > t - s].$$

Lsg: WTS-Ü-Blatt 9

#### Aufgabe 45 [Konvergenz der Binomial- gegen die Poisson-Verteilung]

Sei  $X_n$  eine Folge von  $Bin(n, p_n)$ - Zufallsgrössen. Zeigen Sie, dass für  $np_n = \lambda > 0$  gilt: die Folge der  $X_n$  konvergiert in Verteilung gegen eine  $Po(\lambda)$ -Zufallsgrösse wenn  $n \rightarrow \infty$ .

Lsg: WTS-Satz 5.6

#### Aufgabe 46 [Konvergenz der geometrischen- gegen die Exponentialverteilung]

Sei  $X_n$  eine Folge von  $Ge(1/n)$ -Zufallsgrössen, d.h.  $X_n$  habe eine  $Ge(1/n)$ -Verteilung. Zeigen Sie, dass die Folge der

$$\frac{1}{n} X_n$$

in Verteilung gegen eine exponential-verteilte Zufallsgrösse konvergiert wenn  $n \rightarrow \infty$ . Tip: Untersuchen Sie dabei den Ausdruck:

$$P\left[\frac{1}{n} X_n > a\right].$$

Lsg: WTS-Satz 5.5

### **Aufgabe 47 [Tail-Probabilities der geometrischen- und der Exponentialverteilung]**

Zeigen Sie mit  $X$  eine  $Ge(p)$  und  $Y$  eine  $Exp(\lambda)$

$$P[X > n] = (1 - p)^n$$

und

$$P[Y > t] = e^{-\lambda t}.$$

**Standard**

### **Aufgabe 48 [Anteile am Minimum]** [2 Punkte]

Zwei Marken Glühbirnen werden miteinander verglichen. Dabei hat man herausgefunden, dass Marke  $A$  durchschnittlich eine Lebensdauer von 1283 Stunden besitzt und Marke  $B$  eine solche von 1784. Versuchen Sie in einem passenden Modell herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass je eine zufällig ausgewählte Glühbirne der Marke  $A$  länger glüht als eine der Marke  $B$ .

### **Aufgabe 49 [Prämie Rückversicherung]** [5 Punkte]

Ein Erstversicherer geht zu einem Rückversicherer und will eine Stopp-Loss-Versicherung in der folgenden Art kaufen: in einer bestimmten Geschäftssparte werden die Zeitpunkte des Schadens mit einem Poissonprozess der Rate 1 Ereignis pro Jahr modelliert. Unabhängig von den Zeitpunkten ist die Schadenhöhe in jedem Ereignis eine iid Zufallsgrösse mit Erwartungswert 100 Millionen. Der Erstversicherer will eine Rückversicherung kaufen, welche folgendermassen konstruiert ist: sobald es mindestens 2 Schadenfälle in einem Jahr gibt, übernimmt die Rückversicherung die gesamte Schadenssumme ab dem zweiten Schadenfall. Bekanntlich gibt es das Äquivalentprinzip, welches besagt, dass die Prämie dem erwarteten Schaden entsprechen muss. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass dies nur eine untere Schranke sein kann (Ruins-Wahrscheinlichkeit!). Berechnen Sie in diesem Fall diese untere Schranke für eine Jahres-Prämie, welche der Rückversicherer verlangen muss.

### **Aufgabe 50 [Simulation des Poissonprozesses]** [5 Punkte]

Simulieren Sie in einer geeigneten Rechnerumgebung 10 Realisationen eines Poissonprozesses mit Rate 1 über ein Intervall  $[0, 10]$ . Plotten Sie in's gleiche Bild auch die (Erwartungswerts-)Funktion  $t$ . Lösen Sie *diese* Aufgabe mit einer Simulationsstrategie, die sich voll an die Definition des Poisson-Prozesses in Kapitel 8 anlehnt.

**Honours**

### **Aufgabe 51 [Alternative Strategie Simulation Poisson-Prozess]** [3 Punkte]

Wir haben in Aufgabe 50 eine Simulationsstrategie angewandt, die sich voll an die Definition des Poisson-Prozesses in Kapitel 8 anlehnt. Finden Sie mit einer Aussage aus dem Skript eine alternative Strategie, welche nicht exponentialverteilte Zufallsgrössen benutzt, programmieren Sie diese aus und machen Sie ein paar Plots.