Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Bedingungen Rekurrenz / Transienz; Bernoulli- und Poissonprozesse

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 17, Abgabe der Lösungen: Woche 18 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 19/20

Must

Aufgabe 42 [Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung]

Sei G eine geometrisch verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für natürliche Zahlen $n > m > 0$:

$$P[G > n | G > m] = P[G > n - m].$$

Lsg: WTS-Ü-Blatt 9

Aufgabe 43 [Gedächtnislosigkeit der exponentiellen Verteilung]

Sei T eine exponential verteilte Zufallsgrösse. Dann gilt für reelle Zahlen $t > s > 0$:

$$P[T > t | T > s] = P[T > t - s].$$

Lsg: WTS-Ü-Blatt 9

Aufgabe 44 [Konvergenz der Binomial- gegen die Poisson-Verteilung]

Sei X_n eine Folge von $Bin(n, p_n)-$ Zufallsgrössen. Zeigen Sie, dass für $np_n = \lambda > 0$ gilt: die Folge der X_n konvergiert in Verteilung gegen eine Po(λ)-Zufallsgrösse wenn $n \to \infty$.

Lsg: WTS-Satz 5.6

Aufgabe 45 [Konvergenz der geometrischen- gegen die Exponentialverteilung]

Sei X_n eine Folge von Ge(1/n)-Zufallsgrössen, d.h. X_n habe eine Ge(1/n)-Verteilung. Zeigen Sie, dass die Folge der

$$\frac{1}{n} X_n$$

in Verteilung gegen eine exponential-verteilte Zufallsgrösse konvergiert wenn $n \to \infty$. Tip: Untersuchen Sie dabei den Ausdruck:

$$P[\frac{1}{n} X_n > a].$$

Lsg: WTS-Satz 5.5

Aufgabe 46 [Tail-Probabilities der geometrischen- und der Exponentialverteilung]

Zeigen Sie mit X eine $Ge(p)$ und Y eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$

$$P[X > n] = (1-p)^n$$

und

$$P[Y > t] = e^{-\lambda t}.$$

Standard

Aufgabe 47 [Anteile am Minimum] [2 Punkte]

Zwei Marken Glühbirnen werden miteinander verglichen. Dabei hat man herausgefunden, dass Marke A durchschnittlich eine Lebensdauer von 1283 Stunden besitzt und Marke B eine solche von 1784. Versuchen Sie in einem passenden Modell herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass je eine zufällig ausgewählte Glühbirne der Marke A länger glüht als eine der Marke B.

Aufgabe 48 [Prämie Rückversicherung] [5 Punkte]

Ein Erstversicherer geht zu einem Rückversicherer und will eine Stopp-Loss-Versicherung in der folgenden Art kaufen: in einer bestimmten Geschäftssparte werden die Zeitpunkte des Schadens mit einem Poissonprozess der Rate 1 Ereignis pro Jahr modelliert. Unabhängig von den Zeitpunkten ist die Schadenhöhe in jedem Ereignis eine iid Zufallsgrösse mit Erwartungswert 100 Millionen. Der Erstversicherer will eine Rückversicherung kaufen, welche folgendermassen konstruiert ist: sobald es mindestens 2 Schadenfälle in einem Jahr gibt, übernimmt die Rückversicherung die gesamte Schadensumme ab dem zweiten Schadenfall. Bekanntlich gibt es das Äquivalentprinzip, welches besagt, dass die Prämie dem erwarteten Schaden ensprechen muss. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass dies nur eine untere Schranke sein kann (Ruin-Wahrscheinlichkeit!). Berechnen Sie in diesem Fall diese untere Schranke für eine Jahres-Prämie, welche der Rückversicherer verlangen muss.

Aufgabe 49 [Simulation des Poissonprozesses] [5 Punkte]

Simulieren Sie in einer geeigneten Rechnerumgebung 10 Realisationen eines Poissonprozesses mit Rate 1 über ein Intervall $[0, 10]$. Plotten Sie in's gleiche Bild auch die (Erwartungswerts-)Funktion t. Lösen Sie *diese* Aufgabe mit einer Simulationsstrategie, die sich voll an die Definition des Poisson-Prozesses in Kapitel 8 anlehnt.

Honours

Aufgabe 50 [Bedingungen Rekurrenz / Transienz; Kapitel 7] [2+2 Punkte]

Zeigen Sie mit $g(j) = j$ bei einer Markov-Kette auf $\mathbb{Z}^+$ mit $p_{01} = 1$, $p_{i0} = 0.5$ und $p_{i,i+1} = 0.5$ für $i \geq 1$ positive Rekurrenz. Zeigen Sie auch, dass mit $g(j) = 2^j$ zwar Bedingung 1), nicht aber Bedingung 2) von Satz 7.2 erfüllt ist.

Aufgabe 51 [Alternative Strategie Simulation Poisson-Prozess] [3 Punkte]

Wir haben in Aufgabe 49 eine Simulationsstrategie angewandt, die sich voll an die Definition des Poisson-Prozesses in Kapitel 8 anlehnt. Finden Sie mit einer Aussage aus dem Skript eine alternative Strategie, welche nicht exponentialverteilte Zufallsgrössen benutzt, programmieren Sie diese aus und machen Sie ein paar Plots.