Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Epidemiologie und weitere Simulationen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 19, Abgabe der Lösungen: Woche 20 (bis Freitag, 15.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 21

Must

Aufgabe 52 [Simulation eines reinen Geburtsprozesses]

Simulieren Sie in einer geeigneten Rechnerumgebung 10 Realisationen eines reinen Geburtsprozesses mit Rate 1 über ein Intervall $[0, 2]$ und $[0, 5]$. Plotten Sie in's gleiche Bild auch die (Erwartungswerts-)Funktion e^t.

Standard

Aufgabe 53 [Simulation Ausbruch einer Epidemie] [1+1+3+1 Punkte]

Modellieren Sie den Ausbruch einer Epidemie, wenn folgende Angaben gegeben sind: Zur Zeit 0 ist genau ein Mensch infiziert. Die Dauer, während der ein Mensch infiziert ist (und damit auch andere Menschen infizieren kann) sei exponentialverteilt mit Parameter μ. Damit ein Mensch einen anderen Menschen infizieren kann, muss der Kontakt eng genug sein; zudem muss der eine Mensch infiziert sein und der andere nicht. Wir nehmen an, dass jeder Mensch potentiell infektiöse Kontakte macht; die Verteilung der Zeitpunkte der Kontakte wird mit einem Poisson-Prozess der Rate λ modelliert. Alle Menschen verhalten sich gleich und die Kontakte von infizierten Personen finden unabhängig voneinander statt. Da wir nur die Initialphase der Epidemie modellieren, nehmen wir an, dass jeder potentielle Kontakt auch wirklich ein Kontakt ist, bei dem jemand neu infiziert wird. Wir schliessen also vereinfachend aus, dass zwei bereits Infizierte sich treffen. Wir setzen zudem voraus, dass keinerlei Immunität vorhanden ist. Sei $X(t)$ die Anzahl Infizierter zur Zeit t.

a) Geben Sie die Übergangsraten an.

b) Geben Sie die Programmierstrategie an (mit Verweisen auf Aussagen im Vorlesungsskript)

c) Simulieren Sie diese Situation in einer geeigneten Programmierumgebung, wobei Sie verschiedene Werte für (λ, μ) annehmen, und zwar:

c1) $(\lambda, \mu) = (8, 2)$
c2) $(\lambda, \mu) = (5, 2)$
c3) $(\lambda, \mu) = (2.2, 2)$
c4) $(\lambda, \mu) = (2.1, 2)$
c5) $(\lambda, \mu) = (2, 2)$
c6) $(\lambda, \mu) = (1.8, 2)$

Machen Sie jeweils 5 Realisationen pro Parameterkombination. Machen Sie Plots von $X(t)$ gegen die Zeit. Das Programm ist auch abzugeben.

d) Welcher Anteil der Bevölkerung müsste mindestens geimpft werden, damit die Epidemie nicht ausbrechen kann? Welchen Satz aus der Vorlesung brauchen Sie hierzu?

Aufgabe 54 [Die Coupling-Beweisstrategie] [3 Punkte]

In Kapitel 8 haben wir den reinen Geburtsprozess $Y(t)$ der Rate $\lambda > 0$ kennengelernt. Es gilt (Beweis in Ross: "Stochastic Processes", Seite 235):

$$E[Y(t)] = e^{\lambda t}.$$

Intuitiv ist klar, dass der Geburts- und Todesprozess $i(t)$ von (10.1) mit Raten λ, μ bei gleichem Startwert eher unter dem reinen Geburtsprozess zu liegen kommt. In der Tat gilt ja auch (ohne Beweis)

$$E[i(t)] = e^{(\lambda-\mu)t}.$$

In Beweisen will man manchmal benutzen, dass

$$i(t)(\omega) \leq Y(t)(\omega)$$

gilt. Aber dies muss ja nicht sein. Bei Unabhängigkeit der beiden Prozesse kann es gut sein, dass *vorübergehend* der Geburts- und Todesprozess den reinen Geburtsprozess überflügelt. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum mit einem reinen Geburtsprozess Y und einem Geburts- und Todesprozess i derart, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt:

$$i(t) \leq Y(t)$$

und zwar für alle $t \geq 0$. Geben Sie die Übergangsraten an. Zeigen Sie damit auch, dass deshalb $E[i(t)] \leq e^{\lambda t}$. Tip: Coupling heisst englisch "Kopplung" (koppeln Sie die Prozesse aneinander). In meiner Dissertation wurde Theorem 2.3 mit der Coupling-Methode bewiesen. Die Kopplung ist in der Dissertation wesentlich komplexer als in dieser Aufgabe.

Aufgabe 55 [High Noon] [1+2+1 Punkte]

In 3.1.6 haben wir die Lanchester-DGL kurz angetippt:

$$\dot{x} = -\beta y$$

$$\text{(L – DGL)}$$

$$\dot{y} = -\alpha x$$

solange $x(t) \geq 0$ und $y(t) \geq 0$. Dabei sind $\alpha, \beta > 0$ und $x(0), y(0)$ ebenfalls grösser Null. (L-DGL) wird eingesetzt, um sich gegenseitig bekämpfende Populationen zu modellieren. (L-DGL) wird man sinnvollerweise dann einsetzen, wenn wegen des LLN der Zufall kaum mehr eine Rolle spielt (vgl. Diskussion in 10.3). Wenn Sie aber kleine, natürliche Zahlen haben, so sollten Sie ein stochastisches Modell in stetiger Zeit und mit abzählbarem Zustandsraum wählen.

a) Stellen Sie ein *sinnvolles* stochastisches Analogon zu (L-DGL) auf. Geben Sie dazu die Übergangsraten und alle einfliessenden Voraussetzungen an.

b) Programmieren Sie obiges Modell aus und machen Sie ein paar Simulationen.

c) In (L-DGL) wird die x-Population genau dann siegen, wenn

$$x(0)^2\alpha > y(0)^2\beta$$

(vgl. Kapitel 18 - man spricht vom N^2-Gesetz von Lanchester). Versuchen Sie in Ihrem stochastischen Modell mit Parametern und Startwerten im Grenzbereich ($x(0)^2\alpha \doteq y(0)^2\beta$) herauszufinden, wie es sich im stochastischen Modell etwa verhält. Nehmen Sie sinnvollerweise auch mal sehr grosse Populationen an (damit gilt fast (L-DGL)).