1. Mean Variance Ansatz, CAPM

Der Mean Variance Ansatz im Ein-Perioden-Modell wird vorgestellt. Zuerst wird ohne risikolose Anlagemöglichkeit das optimale Verhalten entwickelt, wenn nur Varianz und Erwartungswert der Rendite des Portfolios für den Anleger relevant sind. Dann wird die risikolose Anlage mit eingebaut. Die Separationstheoreme werden entwickelt. Danach folgt das CAPM.

1.1 Formulierung des Problems in natürlicher Sprache

Wir gehen in der folgenden Fragestellung davon aus, dass Sie Kapital zur Verfügung haben, welches Sie heute (oder in diesem Jahr) nicht benötigen. Was werden Sie damit tun? Sie werden es irgendwie anlegen. Das kann im "Sparschwein" sein oder "unter der Matraze", in Aktien oder auf einem Bankkonto und so weiter. Was für Gedanken werden Sie sich dabei machen?

1. Wie lange kann ich ganz sicher auf dieses Geld verzichten? Oder genauer: Auf welchen Teil des Geldes kann ich bis wann verzichten?
2. Wie sicher will ich mein Geld anlegen? Dabei haben Sie mehrere Arten von Risiken im Auge: Diebstahl ("unter der Matraze"), Konkurs (Aktien und Obligationen von Firmen), Schwanken von Aktienkursen, Wechselkurse können schwanken (Anlage im Ausland, in welchem Währungsbereich will ich das Geld am Schluss ausgeben?)
3. Steuerliche Aspekte
4. Umweltfreundliche Geldanlage, Berücksichtigung von Menschenrechtslage bei Geldanlage
5. viel Zins (Rendite)
6. viele weitere mehr.

1.2 Mögliche Lösungsvorschläge in natürlicher Sprache

Sie könnten Wirtschaftsberichte über Firmen in den Zeitungen lesen und mit Analysten über die zukünftigen Aktienkurse sprechen. Vielleicht haben Sie eine besondere Gabe, aus dem bisherigen Verlauf von Aktienkursen die zukünftige Entwicklung vorherzusagen (falls das zutrifft, setzen Sie sich bitte mit mir in Verbindung). Oder Sie gehen einfach zu einem Spezialisten für die Geldanlage. Aber wie wird *er* entscheiden? Sie haben eine Unmenge von möglichen Anlagen zur Verfügung. Nach was für Grundsätzen werden Sie vorgehen? Es gibt zwei extreme "Schulen":

1. Die **Fundamentalists** analysieren anhand von politischen Überlegungen, neuen wissenschaftlichen Entdeckungen und vielen weiteren Punkten, wie sich die Preise (von Aktien zum Beispiel) mit Hilfe des Zusammenspiels von Angebot und Nachfrage einpendeln werden und begründen damit ihre Investitionsentscheide.
2. Die **Chartists** dagegen schauen die bisherige Entwicklung der Kurse an und versuchen darin Gesetzmässigkeiten zu entdecken.

Es ist offensichtlich, dass es beliebig viele Überlegungen gibt, welche potentiell in solche Investitionsentscheide einfliessen könnten. Das wäre aber sehr komplex und damit mathematisch kaum handhabbar. Politische Überlegungen, so wichtig sie auch sein könnten, sind kaum mathematisch formalisierbar. Es deutet sich hier bereits an, dass mathematische Methoden wohl eher bei den "Chartists" angesiedelt sind, wenn auch bei den "Fundamentalists" das Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage durchaus mathematisch dargestellt werden kann. Um es nochmals klar zu sagen: Es ist *nicht* so, dass der Autor nichts von den Konzepten der Fundamentalists hält - im Gegenteil. Es ist nur so, dass wir MathematikerInnen dort unser Fachwissen nicht einbringen können; im Gegensatz zu den Methoden der Chartists.

1.3 Modellbildung, Annahmen

Wir müssen uns jetzt entscheiden, welche Faktoren wir berücksichtigen wollen. Das folgende Modell ist den Ökonomen nicht vom Himmel gefallen. Wenn es jetzt aber so präsentiert wird, dann darf nicht vergessen werden, dass viele andere Modelle vorher ausprobiert wurden und wieder verschwanden, weil man damit kein Geld verdienen konnte (oder weniger als die Konkurrenz). Ein Modell, dessen Grundidee bis heute bei der Frage der Geldanlage relevant einfliesst, ist das Modell von Markovitz. Markovitz hatte 1952 ein Modell vorgeschlagen, in dem ein Investor sich an nur 2 Kennziffern orientiert, wenn er sich fragt, wie er sein Geld anlegen soll. Es sind dies die **erwartete Rendite** (Mean) und die **Varianz ebendieser Rendite** (Variance) - hiervon kommt der Name dieses Ansatzes: Mean Variance Ansatz. Die Varianz der Rendite steht nach diesem Modellansatz für das "Risiko". Markovitz erhielt 1990 den Nobelpreis für Nationalökonomie.

Wir werden zuerst definieren müssen, was eine **Rendite** überhaupt ist. Wenn Sie 200 Franken auf der Bank anlegen, werden Sie nach einem Jahr mehr als 200 Franken auf dem Konto haben, vielleicht 204 Franken. Bekanntlich sind dann die 4 Franken der Zins. Allgemein definieren wir:

Definition 1.1 [Rendite] *Sei S^i_n der Wert einer Geldanlage i zur Zeit n. Dann definieren wir die Rendite der Anlage i (von Periode n zu $(n+1)$) als:*

$$R^i_{n+1} := \frac{S^i_{n+1} - S^i_n}{S^i_n}.$$

Im obigen Beispiel mit der Bank haben wir die Rendite (=Zins) also folgendermassen berechnet: (204-200)/200=0.02. Die Rendite war 2 % oder eben diese 4 Franken (=2 % von 200) im konkreten Beispiel. Renditen können negativ sein.

Das Mean-Variance Modell von Markovitz macht nun folgende Annahmen: Es existieren d risikobehaftete Anlagenmöglichkeiten (mit "risikobehaftet" meinen wir, dass zukünftige Preise uns nicht bekannt sind, Varianzen > 0). Dies können Aktien, Obligationen, Liegenschaften und so weiter sein. Der Preis von Anlage $i, 1 \leq i \leq d$ in der handelsüblichen Form (1 Aktie) sei S^i_n zur Zeit n, $0 \leq n \leq N < \infty$. Wir werden in diesem Kapitel nur eine Periode betrachten, womit $n \in \{0, 1\}$ sein wird. Der Preis von Gut i zur Zeit 0 ist somit S^i_0 und zur Zeit 1 ist er S^i_1. Wir gehen davon aus, dass wir alle Preise zur Zeit 0 kennen. Die Preise zur Zeit 1 seien uns unbekannt. Wir modellieren sie mit nichtnegativen Zufallsgrössen. Wir können auch hier von allen Anlagen die Renditen angeben: Wir definieren dazu einen Vektor $R = (R_1, \ldots, R_d)^T$ der Renditen derart, dass

$$R_i := \frac{S^i_1 - S^i_0}{S^i_0}.$$

Da wir nur eine Periode betrachten, entfällt der Index für die Zeit; wir haben dafür den Index i, welcher die Anlage bezeichnet, unten angebracht. Die Renditen sind auch Zufallsgrössen. Wir setzen hier voraus, dass $R_i \in L^2$ (Varianzen und Erwartungswerte existieren). Die gemeinsame Verteilung der Zufallsgrössen sei uns bekannt; insbesondere kennen wir damit die Kovarianzen aller Zufallsgrössen miteinander. Wir definieren weiter die erwarteten Renditen $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_d)^T$ und Varianzen der Renditen $\sigma^2 := (\sigma^2_1, \ldots, \sigma^2_d)^T$ folgendermassen: $\mu_i := E[R_i]$ und $\sigma^2_i := V(R_i)$, wobei $V(X)$ die Varianz der Zufallsgrösse X bezeichne. Wir haben weiter oben von den Kovarianzen gesprochen. Wir definieren $\sigma_{ij} := Cov(R_i, R_j)$. Die Kovarianzstruktur unserer Renditen legen wir in der Kovarianzmatrix Σ derart ab, dass gilt: $\Sigma_{ii} := \sigma^2_i$ und $\Sigma_{ij} := \sigma_{ij}$. Wir fordern hier, dass die Matrix Σ positiv definit ist. Damit folgt, dass
1. alle d Anlagemöglichkeiten damit risikobehaftet sein müssen (also $Var(R_i) > 0$ für alle i).
2. keine Rendite eine Linearkombination der anderen Renditen sein darf.
Diese einfachen Folgerungen sind in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 1 zu beweisen. Wegen der zweiten Schlussfolgerung sind insbesondere Anlagefonds als Anlage ausgeschlossen. Will man einen Anlagefond mit einbeziehen, so bilden wir ihn einfach selber nach!

Wir führen bereits jetzt die sogenannte "risikolose" Anlage S^0 ein. Sie wird ohne Risiko (Varianz=0) eine sichere Rendite von r abwerfen. Im ersten Teil werden wir diese Anlage ausschliessen.

Dies ist also die Struktur des Marktes, wie er sich uns präsentiert, wie er uns bekannt ist. Wir haben nun 1 Geldeinheit zur Verfügung, welche wir anlegen wollen. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass wir beliebig kleine Einheiten von Anlage i, $1 \leq i \leq d$, kaufen können (stellen Sie sich einfach vor, bei der Geldeinheit handelt es sich um eine Milliarde Schweizerfranken); des weiteren nehmen wir an, dass keine Steuern oder Transaktionskosten anfallen (the market is "frictionless"). Wenn wir eine Geldeinheit anlegen wollen, werden wir einen Anteil von a_i in Anlagemöglichkeit i investieren. Den Vektor $a := (a_1, \ldots, a_d)$ nennen wir nun unser Portfolio. Wir fordern, dass $\sum_{l=1}^{d} a_l = 1$. Wir fordern *nicht*, dass $a_i \geq 0$.

Wenn wir unser Geld derart anlegen, dass ein i existiert, sodass $a_i < 0$, so sagt man, dass wir einen "Leerverkauf" getätigt haben, oder dass wir Anlage i "short" sind. Wieso ist so etwas möglich? Das es sehr sinnvoll ist, ja, dass es die heutige Finanzmathematik in dieser Form ohne solche Mechanismen gar nicht geben könnte, wird uns noch im Verlauf dieses Semesters klar werden. Man stelle sich dazu vor, dass ein Bankkunde der Bank Aktien anvertraut. Sie gehören dem Kunden der Bank (die Bank übt eventuell aber an der GV der AG das Stimmrecht aus). Wenn der Kurs der Aktie steigt, so hat der Kunde den Gewinn daraus, wenn er die Aktie dann verkauft. Die Bank kann nun aber die Aktie zwischendurch verkaufen. Wenn der Kunde die Aktie später selber haben will oder verkaufen will, so muss die Bank die Aktie zum aktuellen Preis am Markt zurückkaufen. Ist der Preis der Aktie gestiegen, so hat die Bank dabei einen Verlust gemacht. Die Rendite der Bank bei diesem Geschäft ist dabei exakt das Negative der Rendite, welche der Bankkunde hat. Die Bank hat die Aktie dabei verkauft, obschon sie gar nie selber im Besitz der Aktie war. Dies kann man als Bank machen, wenn man vielleicht einen Fall der Aktie erwartet, oder weil andere Bankgeschäfte ein solches Geschäft als durchaus sinnvoll erscheinen lassen. Ein Normalbürger darf so etwas nicht einfach machen - grossen Banken ist dies bis zu einem gewissen Limit erlaubt.

Wir konzentrieren uns wie oben angekündigt in diesem Modell auf nur 2 Kennziffern: die erwartete Rendite und die Varianz ebendieser Rendite. Wir wollen natürlich eine möglichst hohe Rendite und eine möglichst kleine Varianz unserer gesamten Geldanlage haben. Wir haben damit wieder eine Annahme gemacht; nämlich, dass sich Personen bei Anlageentscheiden sogenannt "risiko*avers*" verhalten: Bei gleicher erwarteter Rendite werden Sie diejenige Anlagemöglichkeit wählen, welche die kleinere Varianz besitzt - ebenso wird man bei gegebener Varianz diejenige Anlagemöglichkeit wählen, welche die höchste Rendite erzielt. Wir müssen uns jetzt darüber unterhalten, was denn die Rendite und die Varianz der gesamten Geldanlage, des Portfolios, ist. Wir *definieren* die Rendite R des Portfolios a als mit den a_i gewichtetes Mittel der Renditen R_i der einzelnen Anlagemöglichkeiten:

$$R(a) = \sum_{l=1}^{d} a_i R_i, \quad \text{(Rendite des Portfolios)}$$

Man kann auch nachrechnen, dass diese Definition durchaus dem entspricht, was wir unter der Rendite des gesamten Portfolios verstehen wollen.

Lemma 1.2 [Rendite und Varianz eines Portfeuilles] *Mit obigen Bezeichnungen gelten für die erwartete Rendite m und die Varianz σ^2 der gesamten Geldanlage (wir investieren einen Betrag a_i in Anlage i für $1 \leq i \leq d$) folgende Formeln:*
a) $m = a^T \mu$ und
b) $\sigma^2 = a^T \Sigma a$
c) Seien a^1 und a^2 zwei Portfolios. Dann gilt für die Kovarianz der Renditen der beiden Portfolios:

$$Cov(R(a^1), R(a^2)) = (a^1)^T \Sigma a^2.$$

Beweis von Lemma 1.2 Aufgabe 2 auf Übungsblatt 1.

Aussage a) lässt sich intuitiv nachvollziehen: wir haben ein gewichtetes Mittel. Wenn wir einen Anteil von 0.4 unseres Kapital in eine Anlage mit erwarteter Rendite von 10 % investieren und 0.6 in eine Anlage mit 8 %, so wird die erwartete Rendite unseres Portfolios der beiden Anlagen (4+4.8)=8.8 Prozent sein. Die Formel für die Varianz ist schwieriger zu fassen.

Das Problem, welches wir im Folgenden lösen werden, ist folgendes:

"Welches Portfolio werden wir zusammenstellen um

bei gegebener erwarteter Rendite (m) die Varianz (σ^2) zu minimieren

oder um

bei vorgegebener Varianz (σ^2) die erwartete Rendite (m) zu maximieren"?

Wieso ist dies überhaupt ein nichttriviales Problem? Betrachten wir dazu zwei extreme Situationen:

1. Sei $d = 2$ und die beiden Anlagen seien **exakt negativ korreliert** mit Korrelation -1 ("Herstellung von Regenschirmen in Firma A und von Sonnencreme in Firma B"). Die erwartete Rendite dieser Aktien sei je 20 %. Die Varianz der Rendite sei ebenfalls riesig. Wenn $Corr(X,Y) = -1$, so existieren $u, v \in \mathbb{R}$, so dass $Y = u+vX$ fast sicher (allgemeine Theorie, gilt sogar schon wenn $|Corr(X,Y)| = 1$). Damit können wir aber (Aufgabe 2d)) auf Übungsblatt 1) Anteile a_1, a_2 derart finden, dass die Rendite des Portfolios a eine Varianz von 0 haben wird. Die erwartete Rendite bleibt aber gleich 20 % (Lemma 1.2 a) und wird sogar f.s. erreicht. Wir können also ein Portfolio zusammenstellen, indem wir sicher, ohne jedes Risiko, immerhin 20 % Rendite erwirtschaften. Dieses Beispiel ist aus zwei Gründen nicht realistisch: erstens gibt es kaum zwei Anlagen, deren Renditen exakt negativ korreliert sind (ausser man konstruiert sich solche Fälle (Leerverkäufe)). Zweitens wäre die Rendite niemals 20 %, wenn schon wäre die Rendite gleich der risikolosen Anlage (bei 2 % etwa). Wir hätten sonst klar eine Arbitragemöglichkeit!
   Wir schliessen diese Fälle dadurch aus, dass wir fordern dass die Kovarianzmatrix nicht singulär ist.
2. Als weiteres (extremes Beispiel) stellen wir uns vor, dass d sehr gross ist und wir sehr viele Anlagemöglichkeiten haben, deren **Renditen unkorreliert** sind. Die erwarteten Renditen seien wiederum sehr gross (im Vergleich zur risikolosen Anlage), genauso wie deren Varianzen. Wenn wir nun einen Betrag von $1/d$ in jede Anlagemöglichkeit investieren, so können wir die Varianz des Portfolios folgendermassen berechnen (geht auch mit Lemma 1.2 b)):

$$Var(\frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} R_l) = \frac{1}{d^2}\sum_{l=1}^{d} Var(R_l).$$

   Man sieht hierbei sofort, dass diese Varianz gegen 0 geht, wenn d sehr gross wird (die Varianzen sind nicht von d abhängig). Das wäre aber wunderbar. Man braucht nur von sehr vielen (unkorrelierten Anlagemöglichkeiten) Gebrauch zu machen und schon hat man das Risiko unter Kontrolle.

Obige Beispiele zeigen, dass weder eine Korrelation von -1, noch Unkorreliertheit der Normalfall bei Anlagemöglichkeiten sind, vor allem wenn die Anlagen beide noch dazu eine hohe erwartete Rendite haben. Auch hohe Renditen und Korrelationen von zwischen -1 und etwa -0.6 sind eher selten. Normal ist leider, dass diese Anlagen meist stark positiv korreliert sind.

Im ersten Beispiel haben wir gesehen, dass es kaum Anlagemöglichkeiten haben wird, welche A) (fast) exakt negativ korreliert sind und B) beide eine sehr hohe erwartete Rendite abwerfen. Was geschieht aber, wenn es doch auf einmal solche Anlagemöglichkeiten gibt? Die Antwort ist natürlich nicht, dass dann sofort die Gewinnerwartungen der Firmen in den Keller sausen. Aber alle werden sich auf solche Anlagemöglichkeiten stürzen und damit den Preis dazu in die Höhe treiben. War der Preis vorher 100 Franken und der erwartete Preis nach einer Periode 120 Franken (=20 % erwartete Rendite), so saust in dem Fall der Preis sofort auf vielleicht 115 Franken hoch, was die erwartete Rendite massiv schmälert. Es scheint auf den ersten Blick falsch, aber: wenn die Aktien einer Firma stark steigen, so sinkt die erwartete Rendite einer Anlage in dieses Wertpapier, wenn man erst dann einsteigt, wenn der Preis schon gestiegen ist (ceteris paribus...).

Wir müssen uns nach diesen Trivialfällen leider mit der Kovarianzstruktur auseinandersetzen. Das macht die Mathematik leider kompliziert. Das Resultat wird dann aber unerwartet einfach sein...

1.4 Berechnungen im Modell (Analyse)

Wir werden uns in diesem Kapitel nicht mehr weiter bei jedem Schritt fragen, wie realistisch die Annahmen waren und was dieses und jenes in der Realität bedeutet. Das kommt dann in 1.5.

1.4.1 Ohne risikolose Anlage S^0

Wir werden zuerst die obige Problemstellung ("Maximierung der Rendite, Minimierung des Risikos") formalisieren. Dazu führen wir die beiden Begriffe "Effizientes Portfolio" und "Grenzportfolio" ein:

Definition 1.3 [Effizientes Portfolio, Grenzportfolio] *Ein Portfolio a^* heisst effizient, wenn kein Portfolio $\hat{a}$ existiert, so dass*

$$E[R(a^*)] \leq E[R(\hat{a})]$$

und

$$V[R(a^*)] > V[R(\hat{a})].$$

Ein Portfolio a^* heisst Grenzportfolio, wenn kein Portfolio $\hat{a}$ existiert, so dass

$$E[R(a^*)] = E[R(\hat{a})]$$

und

$$V[R(a^*)] > V[R(\hat{a})].$$

Ein effizientes Portfolio ist somit immer auch ein Grenzportfolio; die Umkehrung gilt nicht! Wir werden nun versuchen, die Menge der Grenzportfolios zu finden. Dazu müssen wir folgendes Optimierungsproblem lösen:

Erstes Optimierungsproblem [ohne risikolose Anlage S^0] *Finde a, so dass $\sigma^2 := V(R(a))$ minimiert wird und folgende Nebenbedingungen eingehalten werden:*

1. $a^T\mathbf{1} = 1$
2. $a^T\mu = m$ *(=konstant, gegeben!)*

Wir setzen zudem voraus, dass $d > 2$ und μ kein Vielfaches von $\mathbf{1}$ ist (der Fall wo μ ein Vielfaches von $\mathbf{1}$, ist im Skript von Bruno Gmür ausgeführt; der Fall $d = 2$ wird an der Tafel entwickelt). Diese Optimierungsaufgabe ist auf Übungsblatt 1 als Aufgabe 3 zu lösen. Es handelt sich dabei um eine Optimierung unter Nebenbedingungen. Man erhält dann für das Portfolio a folgenden Ausdruck:

$$a = \frac{C - Bm}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \frac{Am - B}{D}\Sigma^{-1}\mu, \tag{1.1}$$

wenn wir definieren: $A := \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$, $B := \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu$, $C := \mu^T\Sigma^{-1}\mu$ und $D := AC - B^2$. In den Übungen wird auch gezeigt, dass A, C, D alle positiv sind. Wir müssen noch überprüfen, ob es sich dabei tatsächlich um Grenzportfolios handelt; die Optimierung liefert nur einen *Kandidaten* für ein Optimum. Dazu drücken wir σ^2 als Funktion von m aus:

$$\sigma^2 = a^T\Sigma a = \frac{C - Bm}{D} + \frac{Am - B}{D}m$$

Dies kann derart umgeformt werden, dass man sieht, dass dies die Gleichung für eine *Parabel* ist (wie versprochen: es wird kurz ein bisschen kompliziert und dann wieder unerwartet einfach)!

$$\sigma^2 = \frac{A}{D}(m - \frac{B}{A})^2 + \frac{1}{A}.$$

Der Scheitelpunkt ist $(m, \sigma^2) = (\frac{B}{A}, \frac{1}{A})$. In der (σ, μ)-Ebene haben wir mit der Gleichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{A}{D}(m - \frac{B}{A})^2 + \frac{1}{A}}$$

eine *Hyperbel*.

Wir sehen jetzt, dass wir in der Tat die Grenzportfolios gefunden haben. Wir haben pro m immer nur einen Kandidaten gefunden; zudem kann die Varianz nie kleiner als Null werden und andererseits beliebig gross. Die effizienten Portfolios sind diejenigen mit $m \geq \frac{B}{A}$.

Gleichzeitig haben wir sofort ein ganz spezielles, sogenanntes "Global Minimum Variance Portfolio" a_{min} erhalten: es ist dasjenige im Scheitelpunkt: $m = B/A$ und $\sigma^2 = 1/A$. Wenn wir dies in (1.1) einsetzen, erhalten wir

$$a_{min} = \frac{1}{A}\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1^T}\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

Ein Beispiel wird als Übungsaufgabe 4 a) auf Blatt 1 gerechnet.

Wir werden nun noch das sogenannte *Separations- oder Mutual Fund Theorem* herleiten. Dazu betrachten wir zuerst eine beliebige Linearkombination zweier Grenzportfolios $a^i, i \in \{1,2\}$, deren Gewichte auf 1 summieren. Die erwarteten Renditen seien m_1, m_2. Die Portfolios sind demnach nach (1.1) die Folgenden:

$$a^i = \frac{\Sigma^{-1}}{D}\big((C - Bm_i)\mathbf{1} + (Am_i - B)\mu\big)$$

für $i \in \{1,2\}$. Wenn wir nun eine solche Linearkombination dieser beiden Grenzportfolios bilden (mit $\alpha \in \mathbb{R}$), so ergibt sich für das neue Portfolio:

$$a := \alpha a^1 + (1-\alpha)a^2 = \frac{\Sigma^{-1}}{D}\big((C - B(\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2))\mathbf{1} + (A(\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2) - B)\mu\big)$$

Damit ist a aber wieder ein Grenzportfolio, nämlich dasjenige mit erwarteter Rendite $m = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2$. Wenn nun sowohl a^1 als auch a^2 beide sogar effiziente Portfolios waren (also solche mit $m_i \geq \frac{B}{A}$, so muss auch a ein effizientes Portfolio sein. Damit haben wir aber sofort auch das folgende Theorem schon bewiesen:

Theorem 1.4 [Separations- oder Mutual Fund Theorem] *Jedes effiziente Portfolio kann als Linearkombination von zwei (verschiedenen), beliebigen effizienten Portfolios erhalten werden. Die Gewichte der Linearkombination summieren dabei auf 1.*

"Beweis" von Theorem 1.4 Man kann das auch sauber aufschreiben (kleine Übung), aber die spielerische Idee ist eigentlich illustrativer: Wenn man ein m, wo z.B. $m > m_1 > m_2$, vorgibt, so wird man das Gewicht auf dem Portfolio a^1 verstärken ($\alpha > 1$) bis man die vorgegebene Rendite erreicht. Man wird dann Portfolio a^2 "short" sein. m_1 und m_2 können nicht gleich sein, da wir zwei verschiedene effiziente Portfolios genommen haben.

Q.E.D.

1.4.2 Mit risikoloser Anlage S^0

Wir haben bereits am Anfang bei der Modellbildung die sogenannte "risikolose" Anlage S^0 eingeführt. Diese generiert uns eine sichere Rendite von $R_0 := r > 0$. Wir erlauben in diesem Teil auch Investitionen ("Long" und "Short") in diese risikolose Anlage; zudem sei auch der Kreditzins gleich r. Wir fügen unserem Portfolio a noch eine nullte Komponente hinzu: $p := (1-\alpha, a)$. α ist dann der Anteil des Vermögens, welcher in risikobehaftete Anlagen investiert wird. Jetzt muss $\mathbf{1}^T a = \alpha$ erfüllt sein, damit unser gesamtes Portfolio p auf 1 summiert. Für die Rendite haben wir jetzt die Formel

$$R(p) = (1-\alpha)r + \sum_{l=1}^{d} a_l R_i.$$

Die erwartete Rendite ist jetzt gleich

$$m := E[R(p)] = r + (\mu^T a - r\mathbf{1}^T a)$$

und die Varianz ebendieser Rendite ist

$$\sigma^2 := V(R(p)) = a^T \Sigma a,$$

da die risikolose Anlage keinen Beitrag zur Varianz leistet. Wir wollen auch hier wieder die effizienten Portfolios finden und suchen deshalb zuerst nach den Grenzportfolios:

Zweites Optimierungsproblem [mit risikoloser Anlage S^0] *Finde a, so dass $\sigma^2 := V(R(p))$ minimiert wird und folgende Nebenbedingung eingehalten wird:*

$a^T \mu - r\mathbf{1}^T a + r = m$ *(=konstant, gegeben!).*

Hier muss nun $a^T \mathbf{1}$ nicht gleich 1 sein. Die Lösung ist einfacher als beim ersten Optimierungsproblem und wird hier nicht ausgeführt. Die Rechnungen finden sich im Skript von Dr. Bruno Gmür. Man erhält mit den Bezeichnungen von vorhin für A, B, C, D den Ausdruck

$$a = \frac{m - r}{C - 2rB + r^2 A} \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}). \tag{1.2}$$

Da $a^T \mathbf{1} = \alpha$, können wir auch das gesamte Portfolio p berechnen. Wir wollen auch hier den Zusammenhang zwischen m und σ bestimmen. Einfache Rechnungen führen in der (m, σ^2)-Ebene zu folgender Parabel:

$$\sigma^2 = \frac{(m - r)^2}{C - 2rB + r^2 A}.$$

Wir wollen wieder diesen Zusammenhang auch in der (m, σ)-Ebene darstellen. Im Gegensatz zum Teil ohne risikolose Anlage erhalten wir keine Hyperbel sondern eine (zwei) Geradengleichung:

$$\sigma = \left| \frac{1}{\sqrt{C - 2rB + r^2 A}} (m - r) \right|.$$

Dies sind die Grenzportfolios; die effizienten Portfolios sind diejenigen auf dem oberen Ast. Diesen oberen Ast nennt man auch die **"efficient-market-line"**.

In der Tat gilt hier wenn $m = r$, dass dann die Varianz Null ist. Das muss ja auch so sein, denn wenn man Gleichung (1.2) anschaut, sieht man sofort, dass man dann gar nicht in die risikobehafteten Anlagen investiert. In Aufgabe 4 b) auf dem ersten Übungsblatt geht es darum, die efficient market line zu finden, falls die risikolose Anlage auch erlaubt ist.

Wenn wir die Anlagemöglichkeiten vergrössern (d vergrössern oder nur schon die risikolose Anlage mit einbeziehen), so sind wir (was unsere Problemstellung anbelangt) mindestens in einer gleich guten Situation wie vorher. Falls uns die Anlagemöglichkeit nicht "passt", so werden wir einfach nicht in sie investieren. Also muss die Menge der möglichen Portfolios in der (m, σ)-Ebene immer grösser werden, je mehr Anlagemöglichkeiten wir zur Verfügung haben. Wenn wir m fix vorgeben, so werden wir also das Risiko immer weiter reduzieren können, wenn wir mehr Anlagemöglichkeiten berücksichtigen. Diesen Vorgang nennt man "Diversifizieren". Das Risiko wird aber nicht bis auf Null reduziert werden können, ausser $m = r$. Der Teil des Risikos, welchen wir nie wegdiversifizieren können nennt man das systematische Risiko. Der Teil, welcher wegdiversifiziert werden kann heisst "unsystematisches Risiko". Wird d vergrössert, so muss man (bei gegebenem m) immer wieder mit Gleichung (1.1) oder (1.2) das beste Portfolio berechnen. Es kann also nicht einfach willkürlich "ein bisschen diversifiziert" werden. Die Kovarianzstruktur und die Erwartungswerte der

Renditen müssen prominent berücksichtigt werden. Der Diversifikationsprozess ist aber leider in der Praxis mit Kosten verbunden (je mehr verschiedene Titel desto teurer). Man muss also einen Kompromiss machen.

Betrachten wir nun noch den Spezialfall, dass wir zuerst in einem Markt sind ohne risikolose Anlage. Wenn wir jetzt die risikolose Anlage einführen, so haben wir in der (m, σ^2)-Ebene also zwei Parabeln: eine für die Grenzportfolios ohne risikolose Anlage und eine für die Grenzportfolios mit risikoloser Anlage. Einen Schnittpunkt kann es nicht geben: sonst wäre die Menge der möglichen Portfolios ohne S^0 keine echte Teilmenge der möglichen Portfolios mit S^0, was wir oben ausgeschlossen haben. Falls $r < B/A$, so gibt es hingegen ein "Tangentialportfolio". Es ist dies ein Portfolio, welches sowohl im Markt mit S^0 als auch ohne S^0 effizient ist. Diese Rechnungen werden nicht ausgeführt (Schneiden zweier Parabeln, Mittelschulstoff). Das Tangentialportfolio ist

$$a^t = \frac{1}{B - Ar} \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}).$$

Die erwartete Rendite des Tangentialportfolios ist

$$m^t := E[R(a^t)] = \frac{C - rB}{B - Ar} (> \frac{B}{A} > r)$$

und die Varianz ist

$$(\sigma^t)^2 = \frac{m^t - r}{B - Ar}.$$

Es ist nun klar, dass wir im Tangentialportfolio selbstverständlich nur in die risikobehafteten Anlagen investieren. Ansonsten hätten wir ja für gegebenes m^t im Modell mit S^0 zwei effiziente Portfolios. Eines mit risikolosem Anteil $\neq 0$ und eines ohne risikolosen Anteil. Die effizienten Portfolios sind aber eindeutig.

Genau wie im Modell ohne S^0 erhalten wir durch einfache Rechnungen auch im erweiterten Modell das Separationstheorem:

Theorem 1.5 [Separations- oder Mutual Fund Theorem] *Jedes effiziente Portfolio kann als Linearkombination von zwei (verschiedenen), beliebigen effizienten Portfolios erhalten werden. Die Gewichte der Linearkombination summieren dabei auf 1.*

Dieses Theorem lautet genau gleich wie im Modell ohne S^0. Anders als dort, gibt es jetzt aber zwei ausgesprochen wichtige Portfolios, welche sich aufdrängen: Das Tangentialportfolio und die Anlage ausschliesslich in die risikolose Anlage S^0. Wir formulieren dies als Theorem 1.3':

Theorem 1.5' *Ein Portfolio, welches einen Anteil α in's Tangentialportfolio a^t investiert und einen Anteil $1-\alpha$ in die risikolose Anlage S^0, ist effizient. Andererseits kann jedes effiziente Portfolio als Linearkombination von Portfolio a^t und Portfolio $p = (1, 0, \ldots, 0)$ konstruiert werden. Die Gewichte der Linearkombination summieren dabei auf 1.*

Damit wird ein Investor je nach Risikobereitschaft (α) einen unterschiedlichen Anteil seines Vermögens in a^t und in S^0 investieren. Aber wir haben damit die für ihn möglichen Portfolios identifiziert.

Machen wir noch eine Vorbereitungsberechnung für das CAPM. Berechnen wir doch einmal die Kovarianz der Renditen der Portfolios a^t und Q. Q sei ein beliebiges anderes Portfolio, welches jedoch ausschliesslich in die risikobehafteten Anlagen investiert. Q ist somit nicht effizient, ausser $Q = a^t$.

$$Cov(R(a^t), R(Q)) = (a^t)^T \Sigma Q = \Big(\frac{1}{B - Ar} \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})\Big)^T \Sigma Q = \Big(\frac{\mu - r\mathbf{1}}{B - Ar}\Big)^T Q.$$

Wenn wir jetzt noch die Varianz des Tangentialportfolios in obige Gleichung einsetzen, so erhalten wir

$$Cov(R(a^t), R(Q)) = \frac{(\sigma^t)^2}{m^t - r} (\mu - r\mathbf{1})^T Q.$$

Schreiben wir dies noch als

$$(\mu - r\mathbf{1})^T Q = \frac{Cov(R(a^t), R(Q))}{(\sigma^t)^2}(m^t - r).$$

Jetzt wählen wir noch für das Portfolio speziell $Q = e_i$, also ein Porfolio, welches ausschliesslich in Anlage i investiert. Dann ist $R(Q) = R(e_i) = R_i$, und wir erhalten von oben:

$$\mu_i - r = \frac{Cov(R(a^t), R_i)}{(\sigma^t)^2}(m^t - r). \tag{1.3}$$

Diese Relation wird im Teil 1.4.3 CAPM zentral einfliessen.

Bemerkungen:

1. Es wird "normalerweise" in alle Anlagen investiert, auch mit "schlechtem Erwartungswert" (Kovarianzen eventuell zur Risikominimierung gut brauchbar).

2. Wir haben hier *Arbitrage* nicht ausgeschlossen. Wir werden im Kapitel 2 definieren, was genau darunter zu verstehen ist. Für diese Bemerkung verstehen wir unter Arbitrage einfach eine Strategie, mit der wir mit 0 Franken zur Zeit 0 einsteigen, und mit positiver Wahrscheinlichkeit zur Zeit 1 einen positiven Geldbetrag besitzen und die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust ist 0. Falls wir nun aber unter anderem 2 risikobehaftete Anlagemöglichkeiten haben, so dass eine davon die andere dominiert ($S_1^1(\omega) > S_1^2(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $S_0^1 = 1 = S_0^2$, so kann man beliebig viel Geld verdienen, indem man in der ersten eine "Long"-Position hat und sich entsprechend in der anderen Position verschuldet. Was geschieht in solch einem Fall mit dem Mean-Variance-Ansatz? Er funktioniert trotzdem. Nur findet er leider diese Arbitragemöglichkeit nicht, weil bei einer solchen Situation auch die Varianz riesig ist. Das wäre uns zwar egal, da wir ja immer einen Gewinn einfahren. Aber wir haben die Varianz als Risikomass gewählt. Arbitragemöglichkeiten sind jedoch selten und verschwinden normalerweise ziemlich schnell. Deshalb muss man *hier* Arbitrage nicht speziell ausschliessen.

1.4.3 CAPM

Wir haben weiter oben die Diversifikation angesprochen. Dabei haben wir gesehen, dass man ein Portfolio so organisieren sollte, sodass dabei das unsystematische Risiko weitgehend verschwindet. Aber es bleibt immer das systematische Risiko, welches vom "Gesamtmarkt" her kommt. Wir wechseln jetzt also mit dem "Gesamtmarkt" auf die Ebene der gesamten Wirtschaft, nachdem wir vorher eine mikroökonomische Betrachtung vorgenommen haben. Wir werden nun eine Kennzahl entwickeln, das sogenannte "Beta", welches ein Mass darstellt, wie stark eine Anlage mit dem "Gesamtmarkt" korreliert ist (es ist aber nicht *genau* die Korrelation).

Dazu stellen wir uns vor, der Markt sei im "Gleichgewicht" (Angebot und Nachfrage treffen sich genau, der Markt wird bei den Preisen voll geräumt, es gibt weder einen Nachfrage- noch Angebotsüberhang). Es gebe J Investoren, welche alle μ und Σ kennen. Die Investoren seien sich insbesondere über μ, Σ einig; wir nehmen weiter an, dass sich alle Investoren "effizient" verhalten. Zudem haben alle Investoren den selben Zeithorizont (1 Periode). Sie werden jeweils einen Anteil α_j, $1 \leq j \leq J$, ihres Vermögens W_j in die risikobehafteten Anlagen investieren, und zwar demnach in a^T (Separationstheorem). Der Rest, $(1 - \alpha_j)$, $1 \leq j \leq J$, wird von allen Investoren jeweils in S^0 investiert. Dies machen die Investoren vielleicht nicht bewusst, aber *wir* können ihr individuelles Portfolio auch so darstellen! Total wird ein Vermögen von $W := \sum_{j=1}^J W_j$ investiert. Der totale Anteil, welcher in die risikolose Anlage S^0 investiert wird ist somit:

$$1 - \alpha := \frac{\sum_{j=1}^J (1 - \alpha_j) W_j}{W}.$$

Wir können wiederum mit Hilfe des Separationstheorems folgern, dass der totale Anteil des Vermögens, welches die Investoren in die risikobehafteten Anlagen investieren, gleich α sein muss; mit diesem Anteil wird total in's *Tangentialportfolio* a^t investiert. Wegen des Gleichgewichts von Angebot und Nachfrage muss dieses Tangentialportfolio nun gleich dem angebotenen *Marktportfolio* a^M sein. Dabei sei die $i-$te Komponente des Marktportfolios gegeben durch $a_i^M = \mathcal{K}_i/\mathcal{K}$. $\mathcal{K}_i$ bezeichne dabei die "Börsenkapitalisation" der Anlage i und $\mathcal{K} := \sum_{l=1}^d \mathcal{K}_l$ die totale "Börsenkapitalisation". Setzen wir nun die Beziehung $a^t = a^M$ in Gleichung (1.3) ein, so erhalten wir damit das CAPM von Sharpe/Lintner (1963) (Sharp erhielt 1990 den Nobelpreis für Nationalökonomie):

$$\mu_i - r = \frac{Cov(R(a^M), R_i)}{V(R(a^M))}(E[R(a^M)] - r).$$

CAPM steht für Capital Asset Pricing Model. Man führt gewöhnlich folgende Notation ein:

$$\beta_i := \frac{Cov(R(a^M), R_i)}{V(R(a^M))}.$$

Damit erhalten wir

$$\mu_i - r = \beta_i(E[R(a^M)] - r). \tag{1.4}$$

β_i nennt man systematisches Risiko der Anlage i. Der Ausdruck $(E[R(a^M)]-r)$ ist die *erwartete Überschussrendite des Gesamtmarktes* (erwartete Überschussrendite über die risikolose Anlage hinweg) und $\mu_i - r$ ist die erwartete Überschussrendite der Anlage i oder die *Risikoprämie*. In fast allen ökonomischen Lehrbüchern, auch vielen mathematischen Texten, steht dann der Satz: "Das CAPM postuliert einen linearen Zusammenhang zwischen der erwarteten Überschussrendite des Gesamtmarktes und der erwarteten Überschussrendite einer Anlage. Das β_i sei dann die Proportionalitäts*konstante*. Aber β_i ist gar keine Konstante (egal was wir variieren)! Richtig muss es heissen (das macht dann auch ökonomisch Sinn):

Das systematische Risiko einer Anlage steht in linearer Relation zur verlangten Risikoprämie. Das bedeutet, dass auf dem Kapitalmarkt eine *höhere Rendite* **im Gleichgewicht nur unter Inkaufnahme eines höheren systematischen Risikos erreicht werden kann**. Die Proportionalitätskonstante ist die erwartete Überschussrendite des Gesamtmarktes!

Achtung:

"Reality is different from expected values!!!"

Man nennt ein $\beta_i > 1$ *offensiv* und ein $\beta < 1$ *defensiv*. Denn:
ein $\beta = 1$ bedeutet: Steigt (fällt) der Markt um 1 %, so steigt (fällt) der Einzelwert auch um 1 %.
ein $\beta = 0.6$ bedeutet: Steigt (fällt) der Markt um 1 %, so steigt (fällt) der Einzelwert um 0.6 %.
ein $\beta = 1.5$ bedeutet: Steigt (fällt) der Markt um 1 %, so steigt (fällt) der Einzelwert um 1.5 %.

Will man sich weitergehend gegen Schwankungen am Gesamtmarkt (systematisches Risiko) absichern, muss man dafür Optionen und Futures einsetzen. Diese werden wir in Kapitel 2 und 3 besprechen. Selbstverständlich wird man dann aber auch eine Schmälerung der erwarteten Rendite in Kauf nehmen müssen!

1.5 Wie bewähren sich die Modelle in der Praxis, Modifikationen, Hinterfragung der Annahmen, Robustheit

Bevor wir in eine detaillierte Diskussion einsteigen, müssen zwei Punkte nachgeholt werden.

1. Kapitalmarkt-Profis verstehen unter Modellbildung Fragen wie: "Mit welcher Verteilung modellieren wir die Renditen von Aktienkursen?" Strenggenommen hat man damit aber bereits einen ersten Modellierungsschritt getan, indem man sagt, dass man eine *Verteilung* sucht. Genauer: Wir müssen uns doch zuerst darüber unterhalten, weshalb *überhaupt eine Zufallsgrösse* eingesetzt wird. Betrachten wir dazu zum Beispiel den Welchselkurs CHF zu USD. Angenommen, wir interessieren uns nur, ob der Kurs von Tagesschluss zu Tagesschluss zu- oder abnimmt. Ein Profi hat nun sofort die Idee, die Wahrscheinlichkeit für eine Zunahme oder Abnahme mit je 50% Eintretenswahrscheinlichkeit zu modellieren. Warum

eigentlich? Ist dieses Ereignis zufällig? Nein, ganz klar nicht. Eine Fülle von Einflüssen wirken auf diesen Wechselkurs ein: Zinsen in den USA und der Schweiz, Exporte und Importe, politische und psychologische Faktoren und vieles mehr. Wir kennen aber nicht den genauen Wirkungszusammenhang im Sinne einer mathematisch exakten Formel. Wie sollen wir jetzt mit diesem Chaos von Informationen umgehen? Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel aus der Physik. Angenommen, jemand wirft einen Würfel. Jedem fällt beim Wort Würfel zwangsweise die Zahl 1/6 (=Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Zahl, obenauf zu liegen) ein. Aber auch hier gilt: Der Ausgang des Experiments "Wurf eines Würfels" ist doch nicht zufällig. Wenn wir alle Informationen haben über Lage, Geometrie, Elastizität, Drehmoment, Geschwindigkeit, Turbulenzen, Oberflächenbeschaffenheit, Höhe und so weiter, könnten wir die Zahl berechnen, welche resultieren sollte. Aber dies ist mathematisch häufig zu kompliziert, zudem stehen uns die notwendigen Informationen (Daten) *nicht* vollständig zur Verfügung. Man wird in einem solchen Fall ein *stochastisches* Modell wählen. Wir führen den Zufall als Denkmodell ein. Im Gegensatz zu *deterministischen* Modellen wird eine Prognose dann aber nicht mehr klar möglich sein; wir werden keine explizite Zahl voraussagen können. Wir werden nur noch eine Verteilung angeben können. Dies ist dann das Beste, was man aus dieser Situation noch machen kann.

2. Wir haben weiter einfach angenommen, dass wir eine konstante erwartete Rendite auf dem eingesetzten Kapital haben. Die Anlage soll zum Beispiel pro Jahr durchschnittlich um 4% wachsen. Dies impliziert automatisch *exponentielles Wachstum*. Die Annahme, dass die erwartete Rendite konstant ist, kann man in Firmen damit begründen, dass die Investitionen nach Abschreibungen Netto etwa in konstanter Relation zum bisherigen investierten Kapital in der Firma sind. Das gleiche gilt auch für ganze Volkswirtschaften. Wir werden deshalb im weiteren immer Modelle einsetzen, welche zu exponentiellem Wachstum führen. Dies ist empirisch evident und kann offenbar auch begründet werden.

Ganz generell wollen wir hier festhalten, dass wir bis jetzt keine explizite Annahme über die Art der Verteilung der Rendite (Normalverteilung etc.) gemacht haben. Es ist eine besondere Stärke des Mean-Variance-Ansatzes und des CAPM, das keine Annahme über die Verteilung einfliesst (ausser $\in L^2$).

Die Schätz- und Testprobleme in diesen Modellen können wir in der Kürze nicht besprechen. Ich verweise hier auf Kapitel 5, Sektion 3 von Campbell, J.Y., Lo, A.W. und MacKinlay, A.C. (1997): The "Econometrics of Financial Markets". Es gibt Konferenzen, an denen man sich ausschliesslich mit Schätzmethoden für die Kovarianzmatrizen auseinandersetzt.

1.5.1 Bemerkungen zum Mean-Variance-Ansatz

1. Der Mean-Variance-Ansatz ist in der Praxis zentral wichtig und weitgehend unbestritten.

1.5.2 Bemerkungen zum CAPM

1. Das Marktportfolio ist ein theoretisches Konstrukt. Eigentlich müsste man jede überhaupt denkbare Geldanlage mit berücksichtigen. In der Realität wird man einen Index wählen: SMI, SPI, Dow Jones und so weiter. Es gibt Firmen, welche sich darauf konzentriert haben, diese Indizes nachzubilden.

2. Es gibt immer wieder Anleger, welche behaupten, dass sie die efficient market line geschlagen hätten. Das kann schon ein paar Jahre gut gehen. Wenn es sehr viele Anlagefonds gibt, welche behaupten, dass sie das können, so wird es sogar einige Jahre ein paar haben, welche das bis dann regelmässig schaffen. Es ist ein ewiger Streitpunkt mit "Beweisen" und "Gegenbeweisen", ob man mit dieser oder jener Methode den "Benchmark" *nachhaltig* schlagen kann oder nicht.

3. Wenn man einen Index kaufen kann, so muss man also eigentlich gar nicht mehr sich gross um die konkreten Aktienkurse kümmern: Man berücksichtigt seine Risikobereitschaft und wählt dann also einen Punkt zwischen S^0 und a^M auf der efficient market line.

4. Es wird immer wieder gestritten, ob das CAMP in der Praxis hält was es verspricht. Auch dies ist ein dauernder Streitpunkt.

1.6 Weiterführende Fragen

1.6.1 Hinweise auf Nutzenfunktion

Im Skript von Dr. Bruno Gmür findet man eine exzellente Zusammenfassung über Nutzenfunktionen und den Zusammenhang mit dem Mean-Variance-Ansatz. Das Konzept der Nutzenfunktionen ist in der Realität aber umstritten.

1.6.2 Zusätzliche Restriktionen

In der Realität sind wir mit Restriktionen konfrontiert. Beispielsweise könnten (1) Leerverkäufe vollständig verboten sein. Oder man darf nur (2) 20 % des Portfolios short sein. Oder man darf (3) nicht mehr als 30 % des Geldes in risikobehaftete Anlagen investieren. Oder man darf (4) höchstens 40 % des Geldes im Ausland anlegen. Wenn man Portfolios unter solchen Restriktionen optimieren will, wird die Lösung nicht mehr so schön. Meist sind dann numerische Methoden von Nöten.

1.6.3 Das Einfaktormodell von Sharpe

Beim Markovitz-Ansatz hat man eine Unmenge von Parametern zu schätzen: die Kovarianzmatrix und die erwarteten Renditen (quadratisches Wachstum in d). Die Anzahl zu schätzende Parameter im Einfaktormodell von Sharpe (1963) wächst nur linear mit der Anzahl der Anlagemöglichkeiten d. Dieses Modell wird auch im Skript von Bruno Gmür beschrieben.

1.6.4 Continuous CAPM

In "Merton, Robert (1973), Intertemporal CAPM" findet man eine stetige Version des CAPM.

1.6.5 Weitere Modelle

Weitere Modelle beinhalten Transaktionskosten, mehrere Perioden und Konsum nach am Ende der einzelnen Perioden.

1.7 Zusammenfassung von Kapitel 1

Wir haben im "reichen Markt" mit risikoloser Anlage S^0 gesehen, dass es in der (σ, m)-Ebene eine efficient market line gibt, welche die Portfolios beschreibt, die bei vorgegebener erwarteter Rendite die kleinste Varianz haben. Obschon im Prinzip gilt, dass Investoren nur dann in eine risikoreiche Anlage investieren, wenn auch die erwartete Rendite hoch ist, haben wir gesehen, dass nicht jedes Risiko vom Markt auch mit einer höheren Rendite belohnt wird. Nur das systematische Risiko wird belohnt. Dieses können wir mit Hilfe des (umstrittenen CAPM) mit dem β einer Anlage auch notdürftig identifizieren.

Dies war Portfoliomanagement im Eilzugstempo. Es gibt viele einfache und schwierige Fragen, welche wir nicht besprochen haben. Aber in diesem Kapitel sind die Grundideen vorgestellt worden.