2. Modelle in diskreter Zeit

Zuerst werden die derivativen Produkte erklärt. Ausschliesslich mit Arbitrage-Überlegungen wird dann die Put-Call-Parität hergeleitet. Danach folgt ein einfaches und eindrückliches Beispiel zum Pricing und Hedging einer europäischen Call-Option. Nachfolgend werden kurz folgende Marktarten erklärt: keine eindeutigen Preise, eindeutige Preise, keine dominante Strategien, keine Arbitragemöglichkeiten, Vollständigkeit. Dies geschieht noch in einem Ein-Perioden-Umfeld. Das Hauptgewicht dieses Kapitels gilt den diskreten, Mehrperioden-Modellen in Märkten ohne Arbitragemöglichkeiten - insbesondere den vollständigen Märkten. Mit dem Cox, Ross, Rubinstein-Modell wird ein diskretes Analogon zur Black-Scholes-Formel entwickelt. Mit einer geschickten Limesbildung werden wir bereits in diesem Kapitel die Formel von Black-Scholes herleiten können. Am Schluss folgt noch das Theorem von Dalang-Morton-Willinger, welches zwischen den Modellen in diskreter Zeit und denjenigen in kontinuierlicher Zeit anzusiedeln ist.

2.1 Formulierung des Problems in natürlicher Sprache, Put-Call-Parität, Motivation (Pricing UND Hedging)

In diesem Kapitel werden diskrete Modelle vorgestellt. Im engeren Sinne wird es um das sogenannte Pricing und Hedging von Optionen gehen. StudentInnen erleben diese Modelle immer wieder als sehr unrealistische Abbilder der Realität. Es gibt aber zwei gute Gründe, weshalb diese Modelle doch besprochen werden sollten:

1. In einem sehr einfachen mathematischen Umfeld können praktisch alle Prinzipien bereits erklärt werden, welche in stetiger Zeit einen enormen mathematischen Apparat benötigen.
2. Diese Methoden werden zum Teil bei ganz bestimmten Problemen auch eingesetzt.

2.1.1 Optionen; Call und Put, Long und Short

Wer eine **Kaufoption** (=Call Option) besitzt, hat das Recht (aber nicht die Pflicht!)

* einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert** (Aktie, Währung, Edelmetall, Liegenschaft)
* zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,
* während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option) der Option zu **kaufen**.

Wer eine **Verkaufsoption** (=Put Option) besitzt, hat das Recht (aber nicht die Pflicht!)

* einen zugrundeliegenden Gegenstand oder **Basiswert**
* zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem **Ausübungspreis**,
* während (amerikanische Option) oder nur am Ende der **Laufzeit** (europäische Option) der Option zu **verkaufen**.

Wer eine Option kauft, der hat eine **Long-Position** oder, wie man auch sagen kann: Er ist die Option long. Wer eine Option verkauft, der hat eine **Short-Position** oder wie man sagt: Er ist die Option short.

Es werden vorwiegend amerikanische Optionen gehandelt!

2.1.2 Futures und Forwards

Ein **Future**-Kontrakt ist eine verbindliche Vereinbarung zwischen zwei Kontrahenten,

* eine bestimmte Anzahl oder Menge und
* eine bestimmte Art eines zugrundeliegenden Objekts
* bei Fälligkeit des Kontrakts
* zu einem im voraus vereinbarten Preis

zu kaufen und abzunehmen - wenn der Future gekauft wurde

oder

zu verkaufen und zu liefern - wenn der Future verkauft wurde.

Eine sogenannte Long-Position verpflichtet dazu, bei Fälligkeit des Future-Kontrakts den vereinbarten Preis zu zahlen und die Lieferung des zugrundeliegenden Objekts abzunehmen. Die korrespondierende Short-Position verpflichtet zur Lieferung des zugrundeliegenden Objekts gegen Erhalt des vereinbarten Preises. Im Gegensatz zu Futures, welche über eine Börse (SOFFEX) handelbar sind, zeichnen sich sogenannte **Forwards** dadurch aus, dass sie individuelle Vereinbarungen, gleichsam massgeschneiderte Spezialabsprachen zwischen Käufer und Verkäufer darstellen. Das Ziel sowohl von Futures wie auch von Forwards ist es, die Ungewissheit zukünftiger Preisentwicklungen zu eliminieren und somit Geschäftsvorhaben auf eine sichere Kalkulationsgrundlage zu stellen.

Damit unterscheiden sich Futures von Optionen. Bei Optionen geht nur der Inhaber einer Short-Position eine Verpflichtung ein, nicht aber, wie bei den Futures, auch der Inhaber einer Long-Position. Im Gegenteil, die Erfüllung des Geschäfts wird bei Optionen gerade durch die freie Entscheidung des Optionsinhabers, auf Ausübung entweder zu verzichten oder aber zu bestehen, bedingt; bei Futures hat die Erfüllung unbedingt zu erfolgen. Bei Futures sind eher Rohstoffe, landwirtschaftliche Produkte und Währungen die zugrundeliegenden Basiswerte, bei Optionen hauptsächlich Aktien.

Wir werden uns in diesem Skript nur mit Optionen und nicht weiter mit Futures/Forwards befassen.

2.1.3 Warum aber gibt es derivative (=abgeleitet, vom Basiswert) Finanzprodukte (Optionen und Futures)?

* Spekulation wird vereinfacht
* risikoaverse Menschen können ihre Risiken los werden, genauer:
* persönliches Risikoprofil kann eher getroffen werden
* sichere Kalkulationsgrundlage
* Risiken können (fast) beliebig aufgespalten werden
* negative Korrelationen können besser ausgenutzt werden.

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Lebenslage, Vermögensstruktur, Risikotoleranz und vielfältiger sonstiger Umstände haben Teilnehmer am Wirtschaftsleben oft einander ergänzende Bedürfnisse, Interessen und Fähigkeiten. Es ist Aufgabe der Finanzmärkte, diese Menschen auf effiziente und kostengünstige Weise zusammenzubringen, so dass die Ersparnisse/Gelder einer Gruppe (Investoren) anderen Gruppen (Kapitalnehmern) zur Finanzierung von Vorhaben zugänglich gemacht werden. Dabei ist es von grossem volkswirtschaftlichem Nutzen, wenn diese Vermittlungswirkung der Finanzmärkte dafür sorgt, dass investibles Kapital nicht brachliegt und zur Leistungserstellung bereitstehende Menschen und Ressourcen nicht wegen unzureichender Finanzierung unproduktiv bleiben müssen.

Wir werden in diesem Skript der Einfachheit halber Dividenden, Steuerfragen und Kommissionen nicht berücksichtigen. Letztere sind auch sehr stark vom Börsenplatz und Bankhaus abhängig.

2.1.4 Arbitrage

Eine zentrale Voraussetzung, welche in der Finanzmathematik häufig gemacht wird, ist, dass es keine **Arbitragemöglichkeiten** gibt. Die genaue mathematische Ausformulierung des Begriffs "Arbitrage" folgt in Teil 2.4. Arbitrage bedeutet, dass man mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn machen kann, ohne Risiko eines Verlustes. Wir werden kurz zwei Beispiele anführen (Währungen und in 2.1.5 die sog. Put-Call-Parität):

Wenn man (unendlich schnell) CHF in \$, \$ in Euro und dann wieder Euro in CHF wechseln kann und dabei Gewinn macht, dann ist das Arbitrage. Wenn viele Marktteilnehmer diese Diskrepanz bemerken und ausnützen, werden sich die Preisrelationen aber wegen den Gesetzen von Angebot und Nachfrage auf dem fairen Niveau einpendeln.

2.1.5 Put-Call-Parität

Obschon wir uns immer noch im Teil 2.1 befinden, "Formulierung des Problems in natürlicher Sprache", werden wir uns in 2.1.5 und 2.1.6 doch ein wenig der Sprache der Mathematik bedienen - aber noch auf einem relativ tiefen Niveau. Wir können damit die späteren Schritte viel besser motivieren.

Betrachten wir eine europäische Call-Option, der eine Aktie als Basiswert zugrundeliegt. Den Preis der Aktie zur Zeit t bezeichnen wir mit S_t. Sei T die Laufzeit und K der Ausübungspreis. Jetzt ist es klar, dass wenn (zum Ausübungszeitpunkt) $K > S_T$, der Inhaber der Kaufoption wohl kaum seine Option einlösen wird. Wenn er die Aktie kaufen will, tut er dies direkt am sogenannten Kassamarkt und lässt die (wertlose) Option uneingelöst verfallen. Ist aber $S_T > K$, so macht der Besitzer der Option einen Gewinn von $S_T - K$; er wird die Option einlösen und dann die Aktie wieder verkaufen. Der Wert der Option ist also bei Verfall

$$(S_T - K)_+ := \max(S_T - K, 0). \tag{2.1}$$

Wenn die Option ausgeübt wird, muss der ehemalige Verkäufer der Option fähig sein, die Aktie zum Preis K zu verkaufen. Es wäre sehr praktisch für den Verkäufer der Option, wenn er bis zum Zeitpunkt T einen Betrag von genau $(S_T - K)_+$ besitzt. Die Option wird aber zum Zeitpunkt 0 herausgegeben. Man kennt dann S_T natürlich nicht. Daraus ergeben sich 2 Fragen:

1. Wieviel soll die Option kosten? Welchen Preis (=Prämie) geben wir zur Zeit 0 einem Wertpapier, welches zur Zeit T den Wert $(S_T - K)_+$ besitzt. Dies ist das Problem der **Optionspreisbewertung**.
2. Wie sollte der Verkäufer der Option, welcher die Prämie zur Zeit 0 erhält, sich verhalten, damit er am Schluss, zur Zeit T (ohne Risiko!) einen Betrag von $(S_T - K)_+$ besitzt. Das ist das Problem des **Hedgings** einer Option.

Um die zwei obigen Fragen (später) beantworten zu können, müssen wir Modellannahmen machen: die zentrale Annahme ist die, dass in liquiden Finanzmärkten keine Arbitragemöglichkeiten bestehen. Es soll also nicht möglich sein, risikolos Gewinne zu machen. Diese Annahme ist wenig umstritten. Wir werden mit dieser Annahme eine einfache Relation zwischen den Preisen von europäischen Call- und Put-Optionen herleiten:

Sowohl der Put wie auch der Call sollen Laufzeit T haben (und bei 0 beginnen), Ausübungspreis K haben und den selben Basiswert (zum Beispiel eine Aktie) mit Wert S_t zur Zeit t besitzen. Des weiteren nehmen wir an, dass man beliebig Kredit aufnehmen kann oder ein Guthaben haben kann und zwar zu einem konstanten Zinssatz r. Seien nun C_t und P_t die Preise der Call- und Put-Option zur Zeit t, wo $t \in [0, T]$. Wir werden nun zeigen, dass wegen der Absenz von Arbitragemöglichkeiten die folgende sogenannte "Put-Call-Parität" erfüllt sein muss $\forall\, t \in [0, T]$:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.2}$$

Bemerkung: Dank dieser Relation reicht es im wesentlichen, sich auf die Berechnung der Preise von Call-Optionen zu konzentrieren!

Ist diese Relation verletzt, so gibt es Arbitragemöglichkeiten: Wir werden hier nur die eine Richtung zeigen: Nehmen wir doch mal an, zur Zeit t haben wir folgende Relation (der andere Fall ist als Übung gestellt: Blatt 2, Aufgabe 5):

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Wir stellen also diese Verletzung der Put-Call-Parität fest und wollen dies ausnützen. Dies geschieht in der folgenden Weise: Wir kaufen zur Zeit t einen Put und eine Aktie und verkaufen einen Call. Damit haben wir zur Zeit t einen Bargeldbestand (eventuell negativ, also eine Schuld) von

$$C_t - P_t - S_t.$$

Falls dieser Wert positiv ist, investieren wir ihn zum Zinssatz r bis zur Zeit T; andernfalls mussten wir soviel Geld zum Zinssatz r aufnehmen, um diese Transaktion zu finanzieren. Zur Zeit T sind zwei Fälle möglich:

* $S_T > K$: Der Call wird ausgeübt, wir liefern die Aktie zum Preis K und lösen unser Konto auf. Wir haben am Schluss also einen Betrag von

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

* $S_T \leq K$: Wir üben den Put aus und lösen unser Konto auf. Wir haben am Schluss also einen Betrag von

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

Somit haben wir also ohne Risiko, deterministisch, einen Gewinn erwirtschaftet. Dies ist ein klarer Fall von Arbitrage.

Derartige Arbitrage-Überlegungen führen zwar zu vielen interessanten Gleichungen, welche erfüllt sein müssen. Sie reichen aber für sich nicht aus, um den Wert einer Option genau angeben zu können. Dazu ist die Black-Scholes-Formel da! In vielen ökonomischen Lehrbüchern wird die Herleitung der Black-Scholes-Formel aus Arbitrage-Überlegungen allein durchgeführt. Dies ist unmöglich!

Wir haben die Put-Call-Parität gleich in stetiger Zeit bewiesen. Der Beweis für diskrete Zeit geht genau gleich; die Formel lautet dort: $\forall\, n \in \{0, \ldots, N\}$:

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

2.1.6 Hedging (und Pricing) im einfachsten Fall

Zur Motivation eines zentralen Punktes dieser ganzen Vorlesung entwickeln wir an der Tafel ein schönes Beispiel aus dem Buch von Martin Baxter und Andrew Rennie. Wir werden in 2.4 ein ähnliches (und realistischeres) Modell entwickeln und die Schlussfolgerungen explizit beweisen.

2.2 Lösungsvorschläge in natürlicher Sprache

Wenn man zum ersten Mal das Problem des Pricing's einer Option hört, so wird man als MathematikerIn wohl zuallererst folgenden Vorschlag machen, welcher sich an einer Versicherungslösung orientiert und auf das Gesetz der grossen Zahlen hofft (der Zufall sei uns bitte gnädig gesinnt...): Man verkaufe sehr viele Optionen mit diversesten Basiswerten, Laufzeiten, Ausübungspreisen und das über Jahre hinweg. Man addiere noch ein $\epsilon > 0$ auf die Prämie. Jetzt kann man hoffen, dass man im Durchschnitt dann schon einen Gewinn macht. Diejenigen Male, wo man sehr viel zahlen muss und wo man sehr viel einnimmt, sollten sich zu Gunsten das Bankhauses bitte mehr als aufheben.

Diese "Methode" wird wohl früher in der einen oder anderen Form tatsächlich eine Rolle gespielt haben. Wir haben aber bereits in 2.1.6 anhand eines Beispiels gesehen, dass wir viel ambitiöser sind: Wir wollen jedes *einzelne* Geschäft (mit jedem Basiswert, Laufzeit, Ausübungspreis) ohne Risiko abwickeln können - und nicht etwa erst im Durchschnitt mit Gewinn abschliessen! Um das genau zu verstehen und zu glauben, müssen wir viel mathematische Vorarbeit leisten.

2.3 Modellbildung, Annahmen

2.3.1 Preliminaries

Ausser in Teil 2.6.1 werden wir uns in diesem Kapitel auf endliche Wahrscheinlichkeiträume beschränken ($|\Omega| < \infty$). Sei also $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Wir werden stochastische Prozesse betrachten und führen deshalb auch eine aufsteigende Folge von σ-Algebren, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \mathcal{F}_N$ ein, welche alle in $\mathcal{F}$ enthalten seien. Man stelle sich $\mathcal{F}_n$ als die bis zum Zeitpunkt n vorhandene Information vor. Information geht nicht verloren; deshalb haben wir eine aufsteigende Folge von σ-Algebren. N wird normalerweise das Ende der Laufzeit einer Option sein. Wir setzen weiter voraus, dass

1. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

3. $\forall \omega \in \Omega, P[\{\omega\}] > 0$.

Wir haben im Markt $(d+1)$ Anlagemöglichkeiten. Einerseits wieder eine risikolose Anlage mit Wert S_n^0 zur Zeit n, das Bankkonto. Wir definieren $S_0^0 := 1$ und $S_n^0 := (1+r)^n$ wo $r > 0$. Andererseits auch d risikobehaftete Anlagen $S_n^1, \ldots, S_n^d$, wo S_n^i der Preis der Anlage i zur Zeit n bezeichne. Diese Zufallsgrössen seien nichtnegativ. Des weiteren sei S_n^i $\mathcal{F}_n$-messbar, was ökonomisch bedeutet, dass Investoren die vergangenen und aktuellen Preise kennen (nicht aber die zukünftigen). Eine Folge (S_n) von Zufallsgrössen nennt man $\mathcal{F}_n$-adaptiert, wenn für jedes n gilt: S_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar. Den Vektor $S_n := (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ nennen wir den Preisvektor.

Die Fragen rund um Messbarkeit und Information sind am Anfang schwierig zu verstehen. Sie sind aber später zentral in der Finanzmathematik. Man vertraue vorerst einfach darauf, dass die Informationsstruktur schon richtig gewählt worden ist. Genaueres findet man in Pliska auf Seiten 72 bis 79.

Wir müssen uns nun darüber unterhalten, wie wir die Aktionen der Marktteilnehmer formalisieren wollen.

Definition 2.1 [Strategie] *Eine Strategie ist ein stochastischer Prozess* $\phi = \big((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)\big)_{0 \le n \le N}$ *in* $\mathbb{R}^{d+1}$. *Dabei bezeichne* ϕ_n^i *die Anzahl Aktien vom Typ i, welche zur Zeit n im Portfolio gehalten werden.* ϕ^0 *bezeichne die Investition in unser Bankkonto.* ϕ *sei vorhersagbar, das soll hier heissen, dass* $\forall i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ *gilt:* ϕ_0^i *ist* $\mathcal{F}_0$ *messbar und für alle* $n \ge 1$: ϕ_n^i *ist* $\mathcal{F}_{n-1}$*-messbar.*

Diese "Vorhersagbarkeit" wird sehr häufig missverstanden. Es sind nicht etwa die Preise, welche vorhergesagt werden können. Nur die Strategie wird immer im voraus festgelegt. Man entscheidet zur Zeit n, mit Kenntnissen bis zur Zeit n, wie man das Portfolio zusammenstellt. Dieses hält man dann bis zur Zeit $(n+1)$, bis die neuen Preise feststehen. *Dieses* Portfolio nennen wir ϕ_{n+1}!

Der *Wert des Portfolios zur Zeit n,* $V_n(\phi)$, muss dann das Skalarprodukt des Preisvektors S_n mit der Strategie ϕ_n sein:

$$V_n(\phi) = \phi_n . S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i.$$

Wir wollen Preise von heute und Preise von morgen vergleichen können. Dazu bedienen wir uns des risikolosen Bankkontos: Wir definieren $\beta_n := 1/S_n^0 = (1+r)^{-n}$. β_n nennen wir den *Abdiskontierfaktor* von Zeit n zur Zeit 0. Wenn wir einen Betrag β_n zur Zeit 0 in unser Bankkonto investieren, so werden wir zur Zeit n genau eine Geldeinheit besitzen. Einerseits ist dies aus der Alltagswelt "trivial". Es ist aber nicht *so* trivial. Man kann in der Tat den Wert von Aktien oder anderen Gegenständen der Zukunft in einer beliebigen Einheit der Zukunft angeben. Nur ist es so, dass wir vom Bankkonto sehr einfach die Preise in der Zukunft angeben können, was man bei anderen Bezugssystemen nicht sagen kann. Der diskontierte Wert des Porfolios ist

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n V_n(\phi) = \phi_n . \tilde{S}_n.$$

Dabei bezeichne $\tilde{S}_n := (1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d)$ den Vektor der abdiskontierten Preise. Das Zentrale am Ganzen ist nun, dass die erste Komponente von $\tilde{S}_n$ immer konstant 1 ist für alle n. Wir haben also einen konstanten Bezugspunkt. Es heisst nicht, dass 1 Geldeinheit heute und eine abdiskontierte Geldeinheit morgen für jede einzelne Person gleich viel Wert haben soll.

Wir führen noch eine zentrale Bedingung ein, nach denen Investoren ihr Portfolio umschichten dürfen:

Definition 2.2 [Selbstfinanzierende Strategie (self-financing strategy)] *Eine Strategie ist selbstfinanzierend, wenn für alle* $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *gilt:*

$$\phi_n . S_n = \phi_{n+1} . S_n \tag{2.3}$$

Dies ist nun kein Druckfehler, wie man beim ersten Hinschauen vermuten könnte. Die Bedeutung ist die folgende: Ein Investor legt die Strategie ϕ_n zur Zeit $(n-1)$ fest. Er hält daran fest bis zur Zeit

n, wenn die neuen Preise S_n feststehen. Jetzt hat er einen Betrag von $\phi_n.S_n$ zur Verfügung und darf sein Konto umschichten. Er soll aber weder Geld konsumieren noch zusätzliches Kapital erhalten (eben *selbstfinanzierend*). Dann muss er also die neue Strategie ϕ_{n+1} (mit Preisen S_n) so wählen, dass $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$. Zentral ist insbesondere, dass man ein *Skalarprodukt mit Vektoren* hat (sonst müsste man ja die Strategie immer gleich lassen...).

(2.3) ist nun aber offensichtlich äquivalent zu

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n,$$

und damit zu

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi). \tag{2.4}$$

Was bedeutet Gleichung (2.4)? Sie besagt, dass die Vermögensänderung von Zeit n bis Zeit $(n+1)$ nur von der Änderung der Preise herkommt. ϕ_{n+1} ist konstant.

Wir können diese Überlegung noch auf mehrere Perioden und diskontierte Preise ausdehnen:

Lemma 2.3 *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

(i) ϕ ist eine selbstfinanzierende Strategie.

(ii) Für alle $n \in \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta S_j,$$

wobei der Vektor $\Delta S_j := S_j - S_{j-1}$.

(iii) Für alle $n \in \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta \tilde{S}_j,$$

wobei der Vektor $\Delta \tilde{S}_j := \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Beweis von Lemma 2.3 (i) und (ii) sind wegen mehrmaligem Anwenden von (2.4) äquivalent. Die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt wegen folgender Überlegungen: Wenn ϕ selbstfinanzierend ist, dann gilt ja per Definitionem dass $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$. Dies gilt aber genau dann wenn auch $\phi_n.\tilde{S}_n = \phi_{n+1}.\tilde{S}_n$. Dann kann man aber die gleichen Schritte bis zu (2.4) machen und kommt dann durch mehrmaliges anwenden auch zu Aussage (iii).

Q.E.D.

In obiger Schreibweise könnte ein wichtiges Detail untergehen. Aussage (ii) und (iii) beinhalten einen wichtigen Unterschied: in Aussage (ii) ist das Bankkonto noch relevant. In Aussage (iii) betrachten wir aber diskontierte Preise (und damit auch das diskontierte Bankkonto). Aber dieses hat konstanten Wert 1. Damit ist der Zuwachs aber gleich 0. Wir sehen also mit Lemma 2.3 (iii), dass wenn ein Investor eine selbsfinanzierte Strategie verfolgt, dass dann der *diskontierte* Wert seines Portfolios nur von seinem Anfangsvermögen und der Strategie $(\phi_n^1 \dots, \phi_n^d)_{0 \le n \le N}$ abhängt. Der Akzent liegt darauf, dass wir bei $j = 1$ zu summieren beginnen. Also spielt für den abdiskontierten Wert des Portfolios das Bankkonto S^0 gar keine Rolle. Dies sollte ja eigentlich auch so sein. Es gilt sogar folgendes Lemma:

Lemma 2.4 *Für jeden vorhersagbaren Prozess $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \le n \le N}$ und jedes $\mathcal{F}_0$-messbare Anfangsvermögen V_0 existiert ein eindeutiger vorhersagbarer Prozess $(\phi_n^0)_{0 \le n \le N}$, so dass die Strategie $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \le n \le N}$ selbstfinanzierend ist mit Anfangsvermögen V_0.*

Beweis von Lemma 2.4 Wegen Lemma 2.3 können wir einen (beliebigen) Wert eines abdiskontierten Portfolios $\tilde{V}_n(\phi)$ zur Zeit n auf zwei Arten darstellen:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\phi) =& \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \ldots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ =& V_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \ldots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d\right).\end{aligned}$$

Damit haben wir aber auch automatisch eine Darstellung für ϕ_n^0 gewonnen. Wir müssen aber noch überprüfen, ob ϕ^0 auch vorhersagbar ist. Dies ist aber klar, denn es gilt ja:

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \ldots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d\right) + \left(\phi_n^1(-\tilde{S}_{n-1}^1) + \ldots + \phi_n^d(-\tilde{S}_{n-1}^d\right).$$

Jetzt folgt die Vorhersagbarkeit von ϕ^0 aber sofort: V_0 ist $\mathcal{F}_0$-messbar; in der ersten Summe gehen wir jeweils nur bis $(n-1)$ und im letzten Ausdruck haben wir die Preise der Zeit $(n-1)$ und der Prozess $(\phi_n^l)_{n \geq 1}$ ist ja für alle $1 \leq l \leq d$ vorhersagbar.

Q.E.D.

Es folgt jetzt eine ganze Kaskade von Modellen mit den zugehörigen Annahmen. Aber erst in 2.4 werden wir diejenigen Modelle betrachten, in welchen sich ein grosser Teil der klassischen Finanzmathematik abspielt: den Modellen ohne Arbitrage. Wir werden uns im verbleibenden Teil von 2.3 auf Modelle in einer Periode konzentrieren ($N = 1$). Dabei geht es nur darum, kurz die Vorformen von arbitragefreien Märkten anzugeben. Auf Beweise wird hier verzichtet; der/die interessierte LeserIn wird auf Pliska, Kapitel 1 verwiesen. Beispiele dazu werden in den Übungen gerechnet.

2.3.2 Modelle mit eindeutigen Preisen

Die "primitivste" Klasse von Modellen sind diejenigen, bei welchen wir immerhin eindeutige Preise voraussetzen. Damit ist folgendes gemeint:

Definition 2.5 [eindeutige Preise (law of one price)] *In einem Modell gibt es genau dann eindeutige Preise, wenn für 2 beliebige Strategien $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ gelten muss: ist $V_1(\phi^{(1)}) = V_1(\phi^{(2)})$, so muss auch gelten dass $V_0(\phi^{(1)}) = V_0(\phi^{(2)})$.*

Dies ist eine sinnvolle Anforderung an ein Modell: Wenn in jedem Fall (für jedes ω) der Wert der beiden Portfolios zur Zeit 1 gleich ist, so muss das Portfolio auch zur Zeit 0 gleich viel Wert sein. Ein Beispiel eines Modelles, wo diese Eigenschaft verletzt ist, wird auf Übungsblatt 2 als Aufgabe 6 gerechnet.

2.3.3 Modelle ohne dominante Strategien

Wir haben in Kapitel 1 bereits eine dominante Strategie betrachtet. Wir wollen jetzt genau definieren, was wir darunter verstehen wollen:

Definition 2.6 [dominante Strategie (dominant strategy)] *Eine Strategie $\phi^{(1)}$ heisst dominant, falls es eine zweite Strategie $\phi^{(2)}$ gibt, so dass $V_0(\phi^{(1)}) = V_0(\phi^{(2)})$ und*

$$V_1(\phi^{(1)})(\omega) > V_1(\phi^{(2)})(\omega)$$

für alle $\omega \in \Omega$.

Solche Strategien will man natürlich nicht in einem Markt zulassen. Wir werden also fordern, dass es in einem Markt keine dominanten Strategien gibt. Wie ist nun der Zusammenhang zwischen einem Markt ohne dominante Strategien und einem Markt, in dem eindeutige Preise verlangt werden. Es gilt der folgende Satz:

Theorem 2.7 *Falls keine dominanten Strategien existieren, gilt das Gesetz der eindeutigen Preise.*

Beweis von Theorem 2.7 Siehe Pliska, Kapitel 1, Aussage (1.12).

In Anbetracht von Theorem 2.7 fragt man sich natürlich, ob auch die Umkehrung gilt. Die Antwort ist nein. Auf Übungsblatt 2 ist in Aufgabe 7 ein Modell vorgestellt, in dem zwar das Gesetz der eindeutigen Preise gilt, aber trotzdem eine dominante Strategie vorhanden ist.

2.4 Berechnungen im Modell (Analyse)

2.4.1 Arbitragestrategien

Wir werden im Weiteren nach wie vor Leerverkäufe zulassen. Hingegen werden wir verlangen, dass das gesammte Portfolio immer eine nichtnegative Zahl sein muss:

Definition 2.8 [zulässige Strategie (admissible strategy)] *Eine Strategie ϕ ist zulässig, wenn sie selbstfinanzierend ist und für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ gilt: $V_n(\phi) \geq 0$.*

Auf Grund der Definition 2.6 (dominante Strategien) sieht man sofort, dass man also in einem Markt mit dominanten Strategien mit 0 Geldeinheiten einsteigen kann, sich zur Zeit 0 nach Strategie $\phi^{(2)}$ verschulden kann und das Geld sofort nach Strategie $\phi^{(1)}$ anlegen sollte. Es resultiert immer (für jedes ω) ein positiver Gewinn zur Zeit 1. Dies darf nicht gelten.

Aber es wäre doch auch schon ungerecht, wenn es eine Strategie gäbe, bei der man mit 0 Geldeinheiten einsteigen kann, nie einen Verlust machen kann, aber trotzdem mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn machen kann. Auch dies wollen wir von jetzt an verbieten. Dazu definieren wir:

Definition 2.9 [Arbitragestrategie (arbitrage strategy)] *Eine Arbitragestrategie ist eine zulässige Strategie mit Anfangswert 0 und Endwert ungleich 0.*

Bemerkungen: Endwert ungleich 0 soll heissen: $\exists \omega : V_n(\phi)(\omega) > 0$. Die Arbitragestrategie muss ja schon zulässig sein, womit kein negativer Endwert vorhanden sein darf. Da wir allen ω's eine positive Wahrscheinlichkeit geben, haben wir umgangssprachlich: Arbitrage ist, wenn man mit 0 startet, immer "über 0" bleibt und am Schluss mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn machen kann. Man hat dabei also kein Risiko gehabt.

2.4.2 Martingale und Arbitragemöglichkeiten

Wir wollen offensichtlich Arbitrage ausschliessen. Aber wie wissen wir, ob ein Markt, den wir definieren, auch wirklich keine Arbitragemöglichkeiten zulässt? Da sowohl $N < \infty$ wie auch $|\Omega| < \infty$ könnte man zwar alle möglichen Strategien überprüfen. Dies ist sehr umständlich. Wir wollen ein handlicheres Argument finden und müssen uns dazu mit Martingalen auseinandersetzen.

2.4.2.1 Martingale und Martingaltransformationen

Zur Namensgebung [Martingal]: Im Departement Bouches-du-Rhone in Frankreich gibt es die Gemeinde "Martigues". Der provenzalische Name dieser Gemeinde ist Ursprung des Wortes "Martingal". Dieser Begriff hat mehrere Bedeutungen: einerseits die Hilfszügel beim Zaumzeug des Reitpferdes, Stoff- oder Ledergürtel. Andererseits bedeutet der Begriff auch eine Spielstrategie beim Roulette (genannt "jouga a la martegalo"). Die Strategie besteht darin, dass man für das nächste Spiel den doppelten Einsatz des verlorenen Einsatzes des letzten Spiels setzt. Darum geht es aber beim mathematischen Begriff nicht.

Definition 2.10 [Sub-, Super- und Martingal] *Eine Folge von $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$-adaptierten, reellwertigen Zufallsgössen $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ aus L^1 heisst:*

Martingal falls $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ *für alle* $n \leq N-1$;

Sub-Martingal falls $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq M_n$ *für alle* $n \leq N-1$;

Super-Martingal falls $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq M_n$ *für alle* $n \leq N-1$.

Neulinge beklagen (zu Recht), dass man doch die *zweite* Eigenschaft mit "Super-Martingal" bezeichnen sollte, da diese steigende, erwartete Aktienkurse anzeigt. Das ist doch eher "Super". Die Namensgebung ist insofern ungünstig!

Man kann die Definition kanonisch auch auf mehrere Dimensionen ausdehnen. Dann muss jede Komponente des Prozesses für sich ein Martingal sein.

Stellen wir uns doch mal vor, S_n wäre ein Aktienkurs. Aktien haben zwar langfristig die Tendenz zu steigen (siehe Kapitel 1, Sektion 5). Aber hier sei die Periode für die reale Welt sehr klein gewählt (10 Minuten). Damit ist der Wachstumstrend vernachlässigbar. Wenn nun der Preis bei 10 Geldeinheiten ist, und wir davon ausgehen, dass alle Marktteilnehmer alle Informationen zur Verfügung haben (und in die Preise einfliessen liessen), so bedeutet

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n$$

einfach, dass der erwartete Preis dieser Aktie in 10 Minuten, gegeben die jetzigen (und alle bisherigen) Informationen $\mathcal{F}_n$ auch 10 Geldeinheiten sein muss. Die jetzigen Informationen bestanden vor allem im aktuellen Preis von 10 Geldeinheiten. Dies ist ökonomisch eine gängige Modellvorstellung. Mathematisch bedeutet Sie, dass wir (zumindest in kurzen Zeitabschnitten), die Aktienkurse mittels Martingalen modellieren können.

Wenn wir nun die Information der Zukunft hätten ($\mathcal{F}_{n+1}$), so könnten wir jetzt schreiben:

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_{n+1}] = S_{n+1}.$$

In diesem Sinne muss die Filtration sinnvoll gewählt werden. Wir könnten in diesem Sinne die Aktienkurse vorhersagen.

Die folgenden Aussagen sind einfache Folgerungen aus obiger Definition und auf Übungsblatt 3 zu beweisen:

Lemma 2.11 [einfache Eigenschaften von Martingalen]

1. $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *ist ein Martingal genau dann wenn* $E[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = M_n$ *für alle* $j \geq 0$.

2. Wenn $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *ein Martingal ist, dann gilt für alle* $n : E[M_n] = E[M_0]$.

3. Die Summe zweier Martingale (bezüglich derselben Filtration) ist auch wieder ein Martingal (bezüglich der gleichen Filtration).

Beweis von Lemma 2.11 Aufgabe 9 auf Übungsblatt 3.

Wir werden jetzt die Martingaltransformation einführen und benötigen dazu zuerst folgende Definition:

Definition 2.12 [Vorhersagbarkeit (predictability)] *Eine adaptierte Folge von Zufallsgrössen* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ *heisst vorhersagbar, wenn für alle* $n \geq 1$ *gilt:* H_n *ist* $\mathcal{F}_{n-1}$*-messbar.*

Lemma 2.13 [Martingaleigenschaft der Martingaltransformierten] *Sei* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *ein Martingal und* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ *eine vorhersagbare Folge von Zufallsgrössen bezüglich der Filtration* $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. *Bezeichnen wir mit* $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$. *Die Folge* $(X_n)_{0\leq n\leq N}$:

$$\begin{aligned} X_0 :=& H_0 M_0 \\ X_n :=& H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \ldots + H_n \Delta M_n \quad \text{for } n \geq 1 \end{aligned}$$

ist ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$.

Man nennt (X_n) die *Martingaltransformierte* von (M_n) mit (H_n). Mit Lemma 2.3 iii) und Lemma 2.13 können wir jetzt folgern: Wenn die diskontierten Preise von Aktienkursen Martingale sind und wir eine selbstfinanzierende Strategie verfolgen, so wird das erwartete diskontierte Vermögen gleich dem Anfangsvermögen sein. **Vorsicht:** In Lemma 2.3 iii) haben wir ganze Vektoren von Preisen von Anlagen im Gegensatz zu Lemma 2.13. Lemma 2.13 kann aber auf jede einzelne Anlage angewandt werden; danach zählt man alle Anlagen zusammen.

Beweis von Lemma 2.13 $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ ist $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ adaptiert nach Konstruktion. Zudem gilt:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n] =& E[H_{n+1}\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[H_{n+1}(M_{n+1}-M_n)|\mathcal{F}_n] \\ =& H_{n+1}E[(M_{n+1}-M_n)|\mathcal{F}_n] = H_{n+1}(E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]-E[M_n|\mathcal{F}_n]) \\ =& H_{n+1}(M_n-M_n)=0. \end{aligned}$$

Weil H_{n+1} $\mathcal{F}_n$-messbar ist, durften wir es aus dem bedingten Erwartungswert "herausziehen". Danach haben wir benutzt, dass (M_n) selber ein Martingal ist. Jetzt folgt aber sofort, dass auch (X_n) ein Martingal sein muss.

Q.E.D.

Es folgt jetzt eine überraschend starke und sehr nützliche Charakterisierung von Martingalen:

Satz 2.14 [Charakterisierung von Martingalen] *Eine adaptierte Folge von reellwertigen Zufallsgrössen* (M_n) *ist genau dann ein Martingal, wenn für jede vorhersagbare Folge* (H_n) *gilt:*

$$E\big[\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n\big]=0.$$

Beweis von Satz 2.14 Sei zuerst (M_n) ein Martingal. Wir wollen Lemma 2.13 einsetzen und definieren dazu für einen beliebigen vorhersagbaren Prozess (H_n): $X_0:=0, X_n:=\sum_{j=1}^n H_j\Delta M_j\ \forall n\geq 1$. Nach Lemma 2.13 ist (X_n) ein Martingal. Damit gilt:

$$E\big[\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n\big]=E[X_N]=E[X_0]=0.$$

Für die Gegenrichtung definieren wir für $j\in\{1,\dots,N\}$ eine Folge (H_n): $H_n=0$ für alle $n\neq j+1$ und $H_{j+1}=\mathbf{1}_A$, für ein beliebiges $\mathcal{F}_j$-messbares A. (H_n) ist vorhersagbar und aus $E[\sum_{n=1}^N H_n\Delta M_n]=0$ erhalten wir mit diesem (H_n) die einfache Beziehung

$$E[\mathbf{1}_A(M_{j+1}-M_j)]=0.$$

Nach Definition des bedingten Erwartungswertes muss also gelten: $E[M_{j+1}-M_j|\mathcal{F}_j]=0$ und damit auch $E[M_{j+1}|\mathcal{F}_j]=M_j$.

Q.E.D.

2.4.2.2 Lebensfähige Märkte

Nach diesem Ausflug in die Martingaltheorie sind wir gerüstet für eine Charakterisierung von Märkten ohne Arbitrage. Wir wollen jedoch die negative Bezeichnung für diese Märkte aufgeben und definieren dazu:

Definition 2.15 [Lebensfähiger Markt (viable market)] *Ein Markt ist lebensfähig, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.*

Wir führen noch den Gewinnprozess ein:

Definition 2.16 [(Kummulierter diskontierter) Gewinnprozess (gain-process)] *Sei* $(\phi^1, \ldots .\phi^d)$ *ein beliebiger vorhersagbarer Prozess. Der kummulierte diskontierte Gewinnprozess* $\tilde{G}_n(\phi)$ *ist dann:*

$$\tilde{G}_n(\phi) := \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \ldots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d\right).$$

Bemerkung zu Definition 2.16 Gemäss Lemma 2.4 existiert nun zu diesem $(\phi^1, \ldots, \phi^d)$ ein eindeutiges ϕ^0, so dass die ganze Strategie selbstfinanzierend ist mit Anfangsvermögen 0. Wir können anhand Lemma 2.3 iii) folgern, dass das diskontierte Vermögen zur Zeit n in dem Fall gerade gleich $\tilde{G}_n(\phi)$ ist. Falls wir nun noch fordern, dass ϕ zulässig ist, so ist ja der Wert des Vermögens immer ≥ 0. Wenn wir in einem lebensfähigen Markt sind, so muss gelten $\tilde{G}_N(\phi) = 0$.

Ein diskontiertes Vermögen ist genau dann nichtnegativ (oder $= 0$), wenn das Vermögen selber nichtnegativ (oder $= 0$) ist. Es spielt also bei diesen Fragen rund um die Arbitrage keine Rolle, ob wir diskontierte Prozesse oder die Prozesse selber anschauen. Nur ist mit den diskontierten Prozessen wegen Lemmas 2.3 iii) alles einfacher aufzuschreiben.

Wir definieren noch:

Definition 2.17 [konvexer Konus der positiven Zufallsgrössen Γ] *Wir bezeichnen den konvexen Konus der positiven Zufallsgrössen mit* Γ. *Dabei heisst eine Zufallsgrösse* X *positiv falls einerseits* $X(\omega) \geq 0$ *für alle* ω *und andererseits muss ein* ω^* *existieren mit* $X(\omega^*) > 0$.

Mit Definition 2.17 können wir Definition 2.15 umschreiben auf: Ein Markt ist lebensfähig, wenn für jede zulässige Strategie ϕ gilt: $V_0(\phi) = 0 \Rightarrow V_N(\phi) \notin \Gamma$.

Bei der Definition von Arbitrage wundert man sich zu Recht ob der Forderung, dass die untersuchte Strategie auch zwischenzeitlich keine negativen Vermögen generieren dürfe. Dem Empfinden nach würde man doch bereits eine Situation als unfair und einen Markt als nicht lebensfähig bezeichnen, in dem man mit 0 Geldeinheiten startet und *am Schluss* mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn und sicher keinen Verlust macht. Was dazwischen geschieht, kann einem ja egal sein. In der Tat kann man diese Forderung in diskreten Modellen auch fallen lassen, wie nachfolgendes Lemma beweist.

Lemma 2.18 [Arbitrage: Anforderung an Zulässigkeit der Strategie nicht nötig] *Ein Markt ist genau dann lebensfähig, wenn für jeden vorhersagbaren Prozess* $(\phi^1, \ldots, \phi^d)$ *gilt:*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma. \tag{2.5}$$

Beweis von Lemma 2.18 Wenn (2.5) für jeden vorhersagbaren Prozess erfüllt ist, so auch für jede zulässige Strategie. Damit kann es aber wegen Lemma 2.3 iii) auch keine Arbitragestrategie geben.

Für die Gegenrichtung steigen wir mit einem Widerspruchsansatz ein: Wir nehmen also an, dass $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$. OE gelte $V_0 = 0$. Falls jetzt sogar gelten sollte, dass $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ für alle $n \in \{1, \ldots, N\}$, so ist der Markt wegen Lemma 2.3. iii) per Definitionem nicht lebensfähig. Ansonsten definieren wir ein k derart, dass

$$k := \max\left\{n | P\left[\tilde{G}_n(\phi) < 0\right] > 0\right\}.$$

Der Zeitpunkt k ist also der *letzte Zeitpunkt vor N*, wo der Gewinnprozess noch mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ ist (aber nicht sein *muss*). In dem Fall muss $k \leq N-1$ sein. Zudem muss auch gelten dass $P\big[\tilde{G}_k(\phi) < 0\big] > 0$ und $\tilde{G}_m(\phi) \geq 0$ für alle $m > k$. Wir werden nun eine Strategie ψ formulieren, welche erst dort zu investieren beginnt, wo es (vielleicht) wieder aufwärts geht: in k. Wir definieren also den Prozess ψ folgendermassen:

$$\psi_j(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } j \leq k \\ \mathbf{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & \text{falls } j > k, \end{cases}$$

wobei A das Ereignis $\tilde{G}_k(\phi) < 0$ bezeichne, also den Fall, wo der Prozess $(\tilde{G}_n(\phi))$ getaucht ist. Da ϕ vorhersagbar ist und auch A $\mathcal{F}_k$-messbar ist, ist auch ψ vorhersagbar. Jetzt gilt aber

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \leq k \\ \mathbf{1}_A\big(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_k(\phi)\big) & \text{falls } j > k. \end{cases}$$

Damit ist ψ aber zulässig und $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ auf A. Dies widerspricht aber der Lebensfähigkeit des Marktes.

Q.E.D.

Im nachfolgenden Theorem erhalten wir eine elegante Charakterisierung von lebensfähigen Märkten. Dazu müssen wir noch folgende Definition einführen:

Definition 2.19 [Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmassen] *Zwei Wahrscheinlichkeitsmasse P_1 und P_2 sind äquivalent genau dann wenn für jedes Ereignis A gilt:*

$$P_1(A) = 0 \Leftrightarrow P_2(A) = 0.$$

In unserem Zusammenhang heisst dies natürlich: P^* ist äquivalent zu P wenn für jedes ω gilt: $P^*[\{\omega\}] > 0$.

Theorem 2.20 [Charakterisierung lebensfähiger Märkte] *Ein Markt ist genau dann lebensfähig, wenn es ein Wahrscheinlichkeitmass P^* gibt, welches*

a) äquivalent zu P ist und

b) unter dem die diskontierten Preise der Anlagen Martingale sind.

Man nennt dann P^* ein Martingalmass oder ein risikoadjustiertes- oder risikoneutrales Mass.

Für den Beweis von Theorem 2.20 benötigen wir noch das Separationstheorem aus der linearen Algebra (oder Analysis), welches wir hier ohne Beweis anführen. Man findet den Beweis in "Dudley, R.M. (1989), *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole" auf Seite 152.

Theorem 2.21 [Separationstheorem] *Sei K eine konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und V ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Es gelte $V \cap K = \emptyset$. Dann existiert ein lineares Funktional ξ auf dem $\mathbb{R}^n$ derart, dass*

1. $\forall x \in K$ gilt $\xi(x) > 0$.

2. $\forall x \in V$ gilt $\xi(x) = 0$.

Insbesondere ist V in einer Hyperebene enthalten, welche K nicht schneidet.

Beweis von Theorem 2.21 Siehe "Dudley, R.M. (1989), *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole" auf Seite 152.

Beweis von Theorem 2.20 a) Wir nehmen zuerst an, dass wir ein Wahrscheinlichkeitsmass P^* haben, welches äquivalent zu P ist und unter dem die diskontierten Preise der Anlagen Martingale sind. Wenn wir eine selbstfinanzierende Strategie ϕ wählen, so lässt sich wegen Lemma 2.3 iii) der diskontierte Wert des Vermögens zur Zeit n, $\tilde{V}_n(\phi)$, folgendermassen darstellen:

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\tilde{S}_j.$$

Dies ist jetzt aber für jede einzelne der d risikobehafteten Anlagen j eine Martingaltransformierte von $(\tilde{S}_n^j)$ mit (ϕ_n^j). Da die diskontierten Anlagen nach Annahme P^*-Martingale sind, muss $(\tilde{V}_n(\phi))$ wegen Lemma 2.13 auch ein Martingal sein. Damit muss aber gelten, dass

$$E^*[\tilde{V}_N(\phi)] = E^*[\tilde{V}_0(\phi)]$$

(E^* bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmasses P^*). Wenn nun ϕ zulässig ist mit Anfangsvermögen 0, so haben wir auch $E^*[\tilde{V}_N(\phi)] = 0$ mit $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$. Da $P^*[\{\omega\}] > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, muss gelten dass $\tilde{V}_N(\phi) = 0$. Also ist der Markt lebensfähig.

Für die Gegenrichtung definieren wir $\mathcal{V}$ als die Menge der Zufallsgrössen $\tilde{G}_N(\phi)$, wobei ϕ ein vorhersagbarer Prozess in $\mathbb{R}^d$ ist. $\mathcal{V}$ ist sicher ein Untervektorraum aller Zufallsgrössen auf Ω. Wir dürfen jetzt voraussetzen, dass der Markt überlebensfähig ist; damit folgt aus Lemma 2.18 dass $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$. Damit gibt es auch keinen Schnittpunkt zwischen $\mathcal{V}$ und der konvexen, kompakten Menge $\mathcal{K} := \{X \in \Gamma | \sum_\omega X(\omega) = 1\}$. Wegen des Separationstheorems (Theorem 2.21) existiert nun $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$, so dass

1. $\forall X \in \mathcal{K},\ \sum_\omega \lambda(\omega)X(\omega) > 0$.

2. Für jedes vorhersagbares ϕ gilt:
$$\sum_\omega \lambda(\omega)\tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

Wegen Eigenschaft 1. können wir folgern, dass $\lambda(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Damit können wir aber mit

$$P^*[\{\omega\}] := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass definieren, welches äquivalent zu P ist. Des weiteren besagt doch Eigenschaft 2, dass für jeden vorhersagbaren Prozess $(\phi_n) \in \mathbb{R}^d$ gelten muss:

$$E^*\Big[\sum_{j=1}^{N} \phi_j \Delta\tilde{S}_j\Big] = 0.$$

Da dies für jeden vorhersagbaren Prozess (ϕ_n) gelten muss, muss es auch für einen Prozess gelten, welcher nur in eine bestimmte Anlage $i \in \{1, \ldots, d\}$ investiert; damit haben wir aber

$$E^*\Big[\sum_{j=1}^{N} \phi_j^i \Delta\tilde{S}_j^i\Big] = 0.$$

Wegen Satz 2.14 muss jetzt $\tilde{S}_j^i$ für jedes i ein P^*-Martingal sein.

Q.E.D.

Die Forderung nach Arbitragefreiheit der Märkte ist sinnvoll und kann ökonomisch begründet werden. Hingegen werden wir nun eine Forderung aufstellen, welche sehr restriktiv ist: wir wollen sogenannte "vollständige Märkte".

2.4.3 Vollständigkeit der Märkte und Optionspreisbewertung

2.4.3.1 Vollständige Märkte

Wir haben am Anfang dieses Kapitels *Kauf- und Verkaufsoptionen* eingeführt (Call und Put). Wenn diese Optionen nur zur Zeit N eingefordert werden können, so nennen wir sie europäisch; wenn sie zu jedem beliebigen Zeitpunkt $\{0, 1, \ldots, N\}$ eingefordert werden können, nennt man sie amerikanisch. Calls und Puts sind nur eine spezielle Form von Optionen. Allgemeiner definieren wir:

Definition 2.22 [Europäische Option] *Eine europäische Option (mit Maturität N) ist eine nichtnegative, $\mathcal{F}_N$-messbare Zufallsgrösse h.*

Damit können wir zum Beispiel eine europäische Call-Option ausdrücken durch: $h := (S_N^1 - K)_+$, wenn der Basiswert die Preise S^1 hat und der Ausübungspreis bei K liegt. Ein Put ist dann $h := (K - S_N^1)_+$. Wir nennen h auch (englisch) einen *contingent claim* (contingent=angehängt (an einen Basiswert), claim=Forderung).

Definition 2.23 [Erreichbar (attainable)] *Wir nennen einen contingent claim, welcher durch h ausgedrückt werden kann, erreichbar, wenn es eine zulässige Strategie gibt, welche zur Zeit N genau den Wert h hat. Wir sagen dann, dass ϕ h repliziert.*

Bemerkung 2.24 Wenn wir in einem lebensfähigen Markt sind, so reicht bereits die Anforderung, dass die Strategie selbstfinanzierend ist und Wert h hat zur Zeit N, damit der contingent claim erreichbar ist:
Sei nämlich ϕ selbstfinanzierend und P^* ein Wahrscheinlichkeitsmass, welches zu P äquivalent ist und unter dem die diskontierten Preise Martingale sind (existiert wegen Theorem 2.20), so ist $(\tilde{V}_n(\phi))$ ein P^*-Martingal, weil es eine Martingaltransformierte ist. Also gilt für alle $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$: $\tilde{V}_n(\phi) = E^*[\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n]$. Da $V_N(\phi) = h \geq 0$ gilt auch $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ und aus der Positivität der bedingten Erwartungswerte folgt jetzt auch $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0$ für alle $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, also ist ϕ sogar automatisch zulässig!

Definition 2.25 [Vollständigkeit eines Marktes (Completeness)] *Ein Markt heisst vollständig, wenn jeder contingent claim erreichbar ist.*

In Anbetracht dessen, dass wir völlig frei bei der Kreierung von contingent claims sind, ist die Forderung "Ein Markt ist vollständig" sehr stark. Die Annahme lebensfähiger Märkte konnten wir noch begründen (Angebot und Nachfrage). Diese neue Forderung kann ökonomisch schwer begründet werden. In vollständigen Märkten ist hingegen die Bewertung von contingent claims und die Entwicklung von Hedging-Strategien sehr einfach. Dies macht es sicher Wert, diese Märkte zu untersuchen. In 2.4.3.3 werden wir das Modell von Cox-Ross-Rubinstein untersuchen, welches einen vollständigen Markt definiert. Wir wollen nun eine einfache Charakterisierung von vollständigen Märkten finden.

Theorem 2.26 [Charakterisierung vollständiger Märkte] *Sei der Markt lebensfähig. Der Markt ist genau dann auch vollständig, wenn er genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P^* besitzt, welches äquivalent zu P ist und unter dem die diskontierten Preise Martingale sind.*

Wegen Theorem 2.20 (Charakterisierung lebensfähiger Märkte) sieht man sofort, dass der Unterschied zwischen lebensfähigen und vollständigen, lebensfähigen Märkten der ist, dass es in vollständigen, lebensfähigen Märkten nur *ein* solches Wahrscheinlichkeitsmass geben darf, während es in lebensfähigen Märkten eventuell sogar unendlich viele solche Wahrscheinlichkeitsmasse geben kann. Ein Beispiel eines Marktes, der zwar lebensfähig ist aber nicht vollständig, wird in Aufgabe 11 auf Übungsblatt 3 gerechnet. Dort gibt es sogar unendlich viele Martingalmasse! Es gibt vollständige Märkte, welche nicht lebensfähig sind (Trivialbeispiel ist Aufgabe 6)! Wir werden uns aber im Folgenden auf vollständige Märkte konzentrieren, welche auch lebensfähig sind.

Beweis von Theorem 2.26 a) Stellen wir uns zuerst vor, der Markt sei vollständig. Dann kann jede nichtnegative, $\mathcal{F}_N$-messbare Zufallsgrösse h als $h = V_N(\phi)$ ausgedrückt werden, wo ϕ eine zulässige Strategie ist, welche h repliziert. Da ϕ selbstfinanzierend ist, gilt wegen Lemma 2.3 iii):

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \phi_j.\Delta\tilde{S}_j.$$

Da der Markt lebensfähig ist, gibt es mindestens ein Martingalmass P_1. Falls es nur ein solches gibt, sind wir fertig. Ansonsten gibt es noch ein zweites, P_2. Damit gilt für $i \in \{1, 2\}$:

$$E_i[\tilde{V}_N(\phi)] = E_i[V_0(\phi)] = E_i[V_0(\phi)|\mathcal{F}_0] = V_0.$$

Wir haben benutzt, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Damit gilt aber auch

$$E_1\Big[\frac{h}{S_N^0}\Big] = E_2\Big[\frac{h}{S_N^0}\Big].$$

Dies gilt nach Voraussetzung für alle $\mathcal{F}_N$-messbaren h. Damit gilt aber $P_1 = P_2$ auf $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

b) Für die Gegenseite steigen wir mit einem Widerspruchsansatz ein: Wir stellen uns also vor, der Markt sei zwar lebensfähig aber nicht vollständig. Dann gibt es also eine Zufallsgrösse $h \geq 0$ welche nicht erreichbar ist. Bezeichnen wir nun mit $\tilde{\mathcal{V}}$ die Menge aller Zufallsgrössen, welche von der Form

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\tilde{S}_n,$$

wobei U_0 $\mathcal{F}_0$-messbar und $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ ein vorhersagbarer $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess sei. Mit Lemma 2.4 und Bemerkung 2.24 können wir folgern, dass h/S_N^0 nicht zu $\tilde{\mathcal{V}}$ gehört. Also ist $\tilde{\mathcal{V}}$ eine echte Teilmenge der Menge aller Zufallsgrössen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Sei nun P^* ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmass, unter dem die diskontierten Preise Martingale sind. Wir definieren folgendes Skalarprodukt auf der Menge der Zufallsgrössen: $(X, Y) \to E^*[XY]$. Dann muss es eine Zufallsgrösse $Z \neq 0$ geben, welche orthogonal zu $\tilde{\mathcal{V}}$ ist. Wir schreiben jetzt:

$$P^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2 \parallel Z \parallel_\infty}\right) P^*(\{\omega\}),$$

wobei $\parallel Z \parallel_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)|$. Da $E^*[Z] = 0$, haben wir damit ein neues Wahrscheinlichkeitsmass, welches zu P äquivalent aber nicht gleich P^* ist. Weiters gilt

$$E^{**}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\tilde{S}_n\right] = 0$$

für jeden vorhersagbaren Prozess $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$. Wegen Satz 2.14 ist $(\tilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ ein P^{**}-Martingal.

Q.E.D.

2.4.3.2 Optionspreisbewertung und Hedging in vollständigen, lebensfähigen Märkten

Sei der Markt lebensfähig und vollständig. Wir bezeichnen mit P^* das Martingalmass und mit h eine $\mathcal{F}_N$-messbare, nichtnegative Zufallsgrösse (den contingent claim); ϕ bezeichne die zulässige Strategie, welche h repliziert;

$$V_N(\phi) = h.$$

Die Folge $(\tilde{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ ist ein P^*-Martingal, daraus folgt:

$$V_0(\phi) = E^*[\tilde{V}_N(\phi)],$$

also $V_0(\phi) = E^*[h/S_N^0]$; allgemeiner:

$$V_n(\phi) = S_n^0 E^*\big[\frac{h}{S_N^0}|\mathcal{F}_n\big],\ n = 0, 1, \dots, N.$$

Zu jeder Zeit ist der Wert der h-replizierenden Strategie durch h selber determiniert. Es drängt sich auf, $V_n(\phi)$ als den Preis der Option zur Zeit n zu bezeichnen. Es ist derjenige Betrag, der gebraucht wird, um zur Zeit n einzusteigen, die Strategie ϕ zu verfolgen, um zur Zeit N genau den Betrag h zu besitzen. Wenn ein Händler zur Zeit 0 sich so verhält und diese Prämie verlangt, so hat er kein Risiko. Er ist "perfekt gehedged" (englisch: perfectly hedged, hedge=Schutzwall).

Bemerkung 2.27 Wir haben also oben für die Berechnung des Optionspreises nur das Mass P^* herangezogen; P selber, welches das "wahre, statistische Mass" sein kann, spielte soweit keine Rolle. Obiges Prinzip nennt man englisch auch "Risk-Neutral-Valuation-Principle" (Prinzip der risikoneutralen Bewertung), eben weil man das risikoneutrale Mass P^* benutzt. Des weiteren haben wir bis jetzt nicht gesagt, wie wir die Hedging-Strategie ϕ finden. Dies ist jedoch ein zentral wichtiger Punkt; man möchte das Risiko möglichst ausschalten. Unter Aspekten des Risk Managements wird sogar gesagt:

If you can't hedge it, don't price it!

Wir zeigen die Entwicklung der Hedging-Strategie Anhand eines speziellen Modelles, des Modelles von Cox-Ross-Rubinstein.

2.4.4 Das Modell von Cox-Ross-Rubinstein

Bevor wir uns dem Modell von Cox-Ross-Rubinstein zuwenden, beweisen wir eine Eigenschaft, welche wir in Zukunft immer wieder benötigen werden.

Lemma 2.28 [X in $E[\Phi(X,Y)|\mathcal{B}]$ einfach "herausziehbar"] *Sei X eine $\mathcal{B}$-messbare Zufallsgrösse mit Werten in $(E,\mathcal{E})$ und Y sei eine Zufallsgrösse, welche Werte in $(G,\mathcal{G})$ annimmt und von $\mathcal{B}$ unabhängig sei. Für eine beliebige, nichtnegative (oder beschränkte) Borel-Funktion Φ auf $(E\times G, \mathcal{E}\otimes\mathcal{G})$, definieren wir die Funktion ψ derart, dass für alle $x\in E$ gilt:*

$$\psi(x) := E[\Phi(x,Y)].$$

Die Funktion ψ ist nun selber eine Borelfunktion auf $(E,\mathcal{E})$ und es gilt:

$$E[\Phi(X,Y)|\mathcal{B}] = \psi(X)\ f.s..$$

Für $\Phi(x,y) = xy$ ist dies ein bekanntes Resultat über bedingte Erwartungswerte. Lemma 2.28 ist eine Verallgemeinerung.

Beweis von Lemma 2.28 Wir bezeichnen das von Y induzierte Mass als P_Y. Dann haben wir

$$\psi(x) = \int_F \Phi(x,y)dP_Y(y),$$

die Messbarkeit von ψ ist eine Folge der Theorems von Fubini. Sei Z eine nichtnegative $\mathcal{B}$-messbare Zufallsgrösse (zum Beispiel $Z = \mathbf{1}_B$ mit $B\in\mathcal{B}$). Bezeichnen wir mit $P_{X,Z}$ das von (X,Z) induzierte Mass, dann folgt aus der Unabhängigkeit von Y und (X,Z) dass:

$$\begin{aligned}
E[\Phi(X,Y)Z] &= \int\int \Phi(x,y)z dP_{X,Z}(x,z)dP_Y(y)\\
&= \int\Big(\int \Phi(x,y)dP_Y(y)\Big)z dP_{X,Z}(x,z)\\
&= \int \psi(x)z dP_{X,Z}(x,z)\\
&= E[\psi(X)Z].
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Q.E.D.

Das folgende Modell ist ein diskretes Analogon des Modells von Black-Scholes (Modell von Samuelson). Es wird auch als Binomialmodell bezeichnet. Im folgenden Markt haben wir nur eine risikobehaftete Anlage ($d = 1$). Die risikolose Anlage habe eine Verzinsung von r. Damit gilt jeweils $S_n^0 = (1+r)^n$. Wir modellieren die risikobehaftete Anlage folgendermassen: die relativen Änderungen von einer Periode zur nächsten sind entweder a oder b, wo $-1 < a < b$:

$$S_{n+1}^1 = \begin{cases} S_n(1+a) & \text{oder} \\ S_n(1+b) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

$a = -1$ wäre ja eine vollständige Entwertung; diese schliessen wir hier aus. S_0^1 sei gegeben. Die Menge der möglichen Ereignisse ist somit $\Omega := \{1+a, 1+b\}^N$. Jedes N-Tupel steht für eine Folge von Verhältnissen der Art S_{n+1}/S_n, wo $n = 0, 1, \ldots, (N-1)$. Wieder nehmen wir an, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Wir wählen für die Filtration $(\mathcal{F}_n)$ die von (S_n^1) erzeute σ-Algebra: $\mathcal{F}_n := \sigma\{S_i^1 | 0 \leq i \leq n\}$. Wir führen die Folge von Zufallsvariablen (T_n) ein mit $T_n := S_n/S_{n-1}$ für $n \in \{1, \ldots, N\}$. P sei positiv auf allen Elementen von Ω. Wenn nun $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Element von Ω ist, so gilt demnach $P[(x_1, \ldots, x_N)] = P[T_1 = x_1, \ldots, T_N = x_N]$. Wenn wir also P kennen, so kennen wir auch das Verteilungsgesetz des N-Tupels $(T_1, \ldots, T_N)$ und umgekehrt. Es gilt auch dass $\mathcal{F}_n := \sigma\{T_1, \ldots, T_n\}$.

2.4.4.1 Pricing und Hedging im Modell von Cox-Ross-Rubinstein

Wir werden nun in mehreren Schritten die Optionspreisbewertung und die Hedgingstrategie in diesem Modell entwickeln.

1. *Zuerst zeigen wir, dass die diskontierten Preise $(\tilde{S}_n)$ genau dann ein P^1-Martingal sind, wenn $E^1[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$, $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.*

$E^1[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n$ ist äquivalent zu $E^1[\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n] = 1$, da $\tilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n$-messbar ist. Aber aus $E^1[\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n] = 1$ folgt sofort $E^1[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$.

2. *Wir folgern jetzt, dass $r \in]a, b[$ sein muss, damit der Markt lebensfähig ist.*

Sei der Markt lebensfähig. Dann existiert ein Martingalmass P^*, welches äquivalent zu P ist. Wegen Schritt 1 (siehe oben) gilt nun $E^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$ und damit auch $E^*[T_{n+1}] = 1 + r$. Da T_{n+1} entweder gleich $1 + a$ oder $1 + b$ ist, und beides mit positiven Wahrscheinlichkeiten, muss gelten: $(1 + r) \in]1 + a, 1 + b[$.

3. *Wir setzen von jetzt an voraus, dass $r \in]a, b[$ und schreiben $p := (b-r)/(b-a)$. Wir zeigen nun dass $(\tilde{S}_n)$ genau dann ein P^1-Martingal ist, wenn $T_1, \ldots, T_N$ i.i.d. Zufallsgrössen sind und ihre Verteilung gegeben ist durch $P^1[T_1 = 1 + a] = 1 - P^1[T_1 = 1 + b] = p$. Danach folgern wir, dass dann der Markt lebensfähig und vollständig ist.*

Wenn die T_i's alle unabhängig und identisch verteilt sind nach $P^1[T_i = 1 + a] = 1 - P^1[T_i = 1 + b] = p$, dann gilt auch

$$E^1[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E^1[T_{n+1}] = p(1 + a) + (1 - p)(1 + b) = 1 + r,$$

und damit ist $(\tilde{S}_n)$ ein P^1-Martingal wegen Schritt 1.

Gegenrichtung: wenn nun für $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gilt $E^1[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$, dann gilt

$$(1 + a)E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + (1 + b)E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1 + r.$$

Gleichzeitig gilt aber

$$E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1,$$

was bedeutet dass $E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] = p$ und $E^1[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1-p$. Mit Induktion kann man zeigen, dass für jedes $x_i \in \{1+a, 1+b\}$ gilt:

$$P^1[T_1 = x_1, \ldots, T_n = x_n] = \Pi_{i=1}^n p_i$$

wobei $p_i = p$ wenn $x_i = 1+a$ und $p_i = 1-p$ wenn $x_i = 1+b$. Dies zeigt, dass die Zufallsgrössen (T_i) i.i.d. sind unter P^1 und $P^1[T_i = 1+a] = p$.

Wir haben gezeigt, dass wir aus dem Wissen, das $(\tilde{S}_n)$ ein P^1-Martingal ist, die Verteilung des N-Tupels $(T_1, \ldots, T_N)$ unter P^1 eindeutig herleiten können. Damit ist auch P^1 eindeutig festgelegt. Mit Theoremen 2.20 und 2.26 haben wir damit auch gezeigt, dass dieser Markt arbitragefrei und vollständig ist.

4. *Bezeichnen wir mit C_n bzw. P_n den Preis eines europäischen Calls bzw. Puts zur Zeit n, wenn der Basiswert eine Aktie ist, der Ausübungspreis sei K, die Maturität N.*

a) Wir beweisen zuerst die Put-Call Parität

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)},$$

wenn wir die Preise für einen Put und Call in der Darstellung als bedingte Erwartungswerte kennen.

Bezeichnen wir mit E^* das (einzige) Martingalmass, so haben wir

$$\begin{aligned} C_n - P_n =& (1+r)^{-(N-n)} E^*[(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n] \\ =& (1+r)^{-(N-n)} E^*[S_N - K | \mathcal{F}_n] \\ =& S_n - K(1+r)^{-(N-n)}. \end{aligned}$$

b) Jetzt zeigen wir, dass wir $C_n = c(n, S_n)$ schreiben können, mit einer geeigneten Funktion $c(K, a, b, r, p)$, wobei $p = p(a, b, r)$.

Dazu schreiben wir erst $S_N = S_n \Pi_{i=n+1}^N T_i$. Dann gilt:

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} E^* \left[\left(S_n \Pi_{i=n+1}^N T_i - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_n \right].$$

Unter P^* ist die Zufallsgrösse $\Pi_{i=n+1}^N T_i$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und da S_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist, können wir Lemma 2.28 anwenden und erhalten: $C_n = c(n, S_n)$, wobei c definiert ist als

$$\begin{aligned} \frac{c(n,x)}{(1+r)^{-(N-n)}} =& E^* \left[x \Pi_{i=n+1}^N T_i - K \right]_+ \\ =& \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} p^j (1-p)^{N-n-j} \left(x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K \right)_+. \end{aligned}$$

5. *Im folgenden beweisen wir, dass die replizierende Strategie (ϕ_n^0, ϕ_n^1) eines Calls durch eine Funktion $\phi_n^1 := \Delta(n, S_{n-1})$ zur Zeit n gegeben ist. Δ wird mit Hilfe der Funktion c ausgedrückt.*

Wir bezeichnen mit ϕ^0 den Betrag, der in's risikolose Bankkonto investiert wird (oder von dort ausgeliehen wird). Es muss gelten:

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^1 S_n = c(n, S_n). \tag{2.6}$$

Da ϕ_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, kann man ϕ_n mit Hilfe von $S_1, \ldots, S_{n-1}$ ausdrücken. Dazu kommt noch, dass S_n entweder gleich $S_{n-1}(1+a)$ oder gleich $S_{n-1}(1+b)$ ist. Daraus folgt jetzt von (2.6) dass sowohl

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^1 S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

wie auch

$$\phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^1 S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)).$$

Wenn man nun die Differenz obiger beider Ausdrücke bildet, so erhält man

$$\Delta(n, x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

Auf Übungsblatt 4 ist in Aufgabe 12 ein einfaches Beispiel dazu zu rechnen.

2.4.4.2 Die Formel von Black-Scholes als Limesresultat im Modell von Cox-Ross-Rubinstein

Wir werden jetzt mit einer geschickten Limesbildung ($N \to \infty$) die Black-Scholes Formel herleiten. Die Black-Scholes Formel ist eine Formel in stetiger Zeit. Um diesen Aspekt zu unterstreichen, werden wir die Maturität (das Ende der Laufzeit der Option) gleich mit $T, T > 0$, bezeichnen. Die Limesbildung darf nicht willkürlich geschehen; ein paar Parameter müssen in Abhängigkeit von N geschickt gewählt werden:

1. Wir wählen $r = RT/N$. Damit haben wir $e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N$. Dabei ist R die Wachstumsrate des Bankkontos zu jedem Zeitpunkt im Intervall $[0, T]$.
2. Zusätzlich wählen wir mit $\sigma, \sigma > 0$, eine Konstante, welche die Varianz von $\log(S_N)$ unter P^* im Limit bezeichne.
3. Dann arrangieren wir folgende Gleichungen, welche erfüllt sein müssen: $\log((1+a)/(1+r)) = -\sigma/\sqrt{N}$ und $\log((1+b)/(1+r)) = \sigma/\sqrt{N}$.

Man sieht sofort, dass diese Wahlen möglich sind (System nicht überbestimmt!). Wir definieren nun folgende Folge von Zufallsgrössen $(Y_N)_{N\geq 1}$:

$$Y_N := X_1^N + X_2^N + \ldots + X_N^N,$$

wobei für jedes N die Zufallsgrössen X_i^N i.i.d. sind und Werte in $\{-\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N}\}$ annehmen. Es gelte $E[X_i^N] = \mu_N$, wobei $\lim_{N\to\infty}(N\mu_N) = \mu$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Folge (Y_N) in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse konvergiert. Dazu bedienen wir uns der charakteristischen Funktionen; wir brauchen nur zu zeigen, dass die charakteristische Funktion ϕ_{Y_N} von Y_N gegen die charakteristische Funktion der Normalverteilung konvergiert.

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_N}(u) = E[\exp(iuY_N)] &= \Pi_{j=1}^N E[\exp(iuX_j^N)] \\
&= (E[\exp(iuX_1^N)])^N \\
&= (1 + iu\mu_N - \sigma^2 u^2/2N + o(1/N))^N.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\lim_{N\to\infty} \phi_{Y_N}(u) = \exp(iu\mu - \sigma^2 u^2/2)$.

Wir werden jetzt den asymptotischen Preis eines Puts und eines Calls zur Zeit 0 berechnen:

Für gegebenes N ist der Preis eines Puts zur Zeit 0 gegeben durch:

$$\begin{aligned} P_0^{(N)} =&(1+RT/N)^{-N} E^* \left[K - S_0 \Pi_{n=1}^N T_n \right]_+, \\ =&E^*[(1+RT/N)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N)]_+ \end{aligned}$$

wobei $Y_N = \sum_{n=1}^N \log(T_n/(1+r))$. Auf Grund unserer Annahmen haben wir $X_j^N = \log(T_j/(1+r))$ mit Werten in $\{-\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N}\}$. Zudem sind die (X_j^N) i.i.d. unter P^*. Es gilt

$$E^*[X_j^N] = (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Damit erfüllt die Folge (Y_N) die obigen Anforderungen mit $\mu = -\sigma^2/2$. Definieren wir nun $\psi(y) := (Ke^{-RT} - S_0 e^y)_+$, so können wir folgern:

$$\begin{aligned} |P_0^{(N)} - E^*[\psi(Y_N)]| =& \left| E^* \left[\Big((1+RT/N)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N) \Big)_+ - \Big(Ke^{-RT} - S_0 \exp(Y_N) \Big)_+ \right] \right| \\ \leq& K|(1+RT/N)^{-N} - e^{-RT}|. \end{aligned}$$

ψ ist eine beschränkte Funktion. Das ist der Grund, weshalb wir mit dem Put und nicht mit dem Call arbeiten. Es gilt nämlich: da ψ beschränkt und stetig ist und da die Folge (Y_N) in Verteilung konvergiert, haben wir

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} =& \lim_{N\to\infty} E^*[\psi(Y_N)] \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (Ke^{-RT} - S_0 e^{-\sigma^2/2 + \sigma y})_+ e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses Integral mit Hilfe der kummulierten Normalverteilung $\Phi_{\mathcal{N}}$ ausdrücken und erhalten

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT} \Phi_{\mathcal{N}}(-d_2) - S_0 \Phi_{\mathcal{N}}(-d_1),$$

wobei $d_1 := (\log(S_0/K) + RT + \sigma^2/2)/\sigma, d_2 := d_1 - \sigma$ und

$$\Phi_{\mathcal{N}}(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx.$$

Der Preis eines Calls folgt aus der Put-Call-Parität als $\lim_{N\to\infty} C_0^{(N)} = S_0 \Phi_{\mathcal{N}}(d_1) - Ke^{-RT} \Phi_{\mathcal{N}}(d_2)$.

Dies ist (beinahe) die berühmte Formel von Black-Scholes. Wir machen sie an der Tafel kompatibel mit derjenigen Standard-Darstellung, welche wir dann in Kapitel 3 kennenlernen werden (standardisierte Varianz). Wir werden sie hier nicht weiter diskutieren sondern verweisen dazu auf Kapitel 3 wo eine sehr ausführliche Diskussion dieses Resultats erfolgt. Es sei nur noch erwähnt, dass bei einem Call der Anteil Aktien bei der Hedging-Strategie genau $\Phi_{\mathcal{N}}(d_1)$ ist. Auf Blatt 4 ist mit Aufgabe 13 ein Beispiel dazu zu rechnen (mit der an der Tafel entwickelten Formel).

2.5 Wie bewähren sich die Modelle in der Praxis, Modifikationen, Hinterfragung der Annahmen, Robustheit

Das Modell von Cox-Ross-Rubinstein wird sowohl im Corporate Finance (dort geht es um die Beurteilung der Rentabilität von Investitionen in einem Unternehmen) wie auch zum Pricing und Hedging von Optionen verwendet.

2.6 Weiterführende Fragen

2.6.1 $|\Omega| = \infty$

Wir haben bis jetzt nur einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum betrachtet ($|\Omega| < \infty$). Was geschieht aber, wenn wir zwar diskrete Zeit haben, aber auch zulassen, dass $|\Omega| = \infty$? Zum Beispiel hat man zwar diskrete Zeitpunkte, aber die Werte, welche die Logarithmen der Aktienkurse zu diesen Zeitpunkten annehmen, könnten aus einer Normalverteilung stammen. Wir können uns dann fragen, ob auch dann ein Wahrscheinlichkeitsmass existiert, so dass die Aktienkurse Martingale sind. Diese Frage beantwortet das Theorem von Dalang-Morton-Willinger.

Theorem 2.29 [Charakterisierung lebensfähiger Märkte wenn $|\Omega| = \infty$ (von Dalang-Morton-Willinger)] *Der Markt ist genau dann lebensfähig, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmass P^* auf $(\Omega, \mathcal{F}_N)$ existiert, so dass*
i) $P^* \sim P$,
ii) $\forall n$ *gilt, dass* S_n^1 *bezüglich* P^* *integrierbar ist und für* $0 \leq n \leq N-1$

$$S_n^1 = E^*[S_{n+1}^1 | \mathcal{F}_n],$$

iii) die Dichte $\frac{dP^*}{dP}$ *ist beschränkt.*

Da $|\Omega| = \infty$ gibt es mit einem solchen Mass auch unendlich viele solche Masse. Damit ist der Markt nicht vollständig. Es ist auch nicht allzu überraschend, dass man mit endlich vielen Gelegenheiten zur Anpassung des Hedgings (Zeitachse diskret) und unendlich vielen Möglichkeiten für den Prozess sich zu verändern, keine Hedgingstrategie haben kann. Vergleiche dazu dann aber die Resultate in Kapitel 3. Dort wird man aber permanent die Hedgingstrategie anpassen können und (zumindest theoretisch) auch anpassen **müssen**!

Beweis von Theorem 2.29 Der Beweis findet sich herunterladbar auf "http://www.math.ethz.ch/finance/education-in-finance.html" bei "Continuous-Time-Models".

2.6.2 Aktien mit Dividenden

Die Fragen in Teil 2.4 betreffen Aktien ohne Dividendenzahlungen. In "Huang, C.F. and Litzenberger, R.H., (1988), *Foundations for Financial Economics*, North-Holland" werden dieselben Fragen mit Dividendenzahlungen besprochen.

2.6.3 Amerikanische Optionen

Wir werden aus Zeitgründen amerikanische Optionen nicht behandeln. Eine gute, kompakte Zusammenfassung findet sich in Kapitel 2 im Buch von Lamberton/Lapeyre, welches auch für Kapitel 2 und 3 in diesem Skript Pate gestanden hat. Wir erwähnen einfach die äusserst überraschende Tatsache, dass der Preis eines europäischen Calls und eines amerikanischen Calls (mit gleichem K, N) *gleich* sind. Dies obschon wir beim amerikanischen Call ja eigentlich einen Vorteil haben (wir können ihn jederzeit ausüben). Dies gilt nur wenn keine Dividenden gezahlt werden. Es gilt nicht für den Put noch für Optionen auf Währungen.

2.7 Zusammenfassung von Kapitel 2

Wir haben gesehen, dass in den Vorformen der arbitragefreien Märkte (eindeutige Preise, keine dominante Strategien) kaum sinnvoll Finanzmathematik betrieben werden kann. In Theorem 2.20 haben wir dann mit Hilfe von Martingalmassen die arbitragefreien Märkte charakterisiert. In Theorem 2.26 haben wir dann die vollständigen, arbitragefreien Märkte charakterisiert: es sind diejenigen, in denen es genau ein Martingalmass gibt. Das Risk-Neutral-Valuation-Principle gab uns den Preis eines contingent claims als abdiskontierter bedingter Erwartungswert des claims bezüglich des Martingalmasses. Im Modell von Cox-Ross-Rubinstein haben wir auch die entsprechende Hedging-Strategie entwickelt und als Limes die Black-Scholes Formel hergeleitet, welche uns jetzt in Kapitel 3 zentral beschäftigen wird.