3. Modelle in stetiger Zeit, Black Scholes

Nach einführenden Bemerkungen werden kurz die Brownsche Bewegung und Martingale in stetiger Zeit besprochen. Dann folgen die Entwicklung des stochastischen Integrals bezüglich der Brownschen Bewegung, der Kalkül von Itô und stochastische Differentialgleichungen. Damit stehen uns dann die Methoden zur Verfügung, um das Modell von Samuelson zu analysieren, das Modell also, in dem die Formel von Black-Scholes gilt. Der Höhepunkt des Kapitels wird die Optionspreisbewertung und die Entwicklung der Hedgingstrategie für eine europäische Call-Option darstellen. Danach folgt eine rigorose Besprechung der Formel von Black-Scholes.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, kurz eine simple Klassifikation der stochastischen Prozesse vorzunehmen. Im Wesentlichen hat man folgende Unterscheidungsmerkmale:

1. Ist die Zeit diskret ($n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$) oder stetig ($t \in [0, T]$)?
2. Ist der Zustandsraum abzählbar (z.B. $\mathbb{N}$) oder kontinuierlich (z.B. $\mathbb{R}$)?

Je nach Situation haben dann Begriffe wie zum Beispiel Rekurrenz eine andere Bedeutung. Daher sollte man in Gesprächen immer zuerst klären, in welcher Situation man ist.

Es gibt also 4 wesentliche Möglichkeiten:

1. diskrete Zeit und abzählbarer Zustandsraum; Beispiele: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, Markov-Ketten mit Übergangsmatrizen
2. diskrete Zeit und stetiger Zustandsraum; Beispiel: Zeitreihen
3. stetige Zeit und abzählbarer Zustandsraum; Beispiele: Poissonscher Zählprozess, Markov-Prozesse mit Q-Matrizen
4. stetige Zeit und stetiger Zustandsraum; Beispiel: Brownsche Bewegung

Wir haben uns in Kapitel 1 mit Modellen in diskreter Zeit auseinandergesetzt, in denen der Zustandsraum sowohl abzählbar wie auch kontinuierlich sein kann. In Kapitel 2 folgten Modelle mit diskreter Zeit und endlichem Zustandsraum (Ausnahme: Theorem 2.29 von Dalang-Morton-Willinger). In Kapitel 4 folgen mit den Zeitreihen Modelle in diskreter Zeit und kontinuierlichem Zustandsraum.

3.1 Warum Modelle in stetiger Zeit?

Die Preisänderungen auf den Finanzmärkten sind eigentlich keine stetigen Prozesse: es gibt üblicherweise kleinste Geldeinheiten, um welche die Preisänderungen mindestens von Statten gehen müssen (also stückweise stetig). Zum anderen ändert sich der Preis nicht permanent, sondern bleibt während einer gewissen kurzen Zeit konstant. Man hat also in der Realität Prozesse, welche stückweise stetig sind und auf diesen stetigen Zwischenstücken sind sie erst noch konstant (Treppenfunktionen)! Andererseits sind diese Preisänderungen normalerweise derart häufig und die Änderungen im Vergleich zum ganzen Preis derart klein, dass *je nach Problemstellung* doch ein Prozess in stetiger Zeit *und* mit stetigem Zustandsraum angebracht ist[1)]. Als weiterer Vorteil kommt noch dazu, dass wir in den Modellen stetiger Zeit explizitere Formeln erhalten als in den Modellen in diskreter Zeit.

3.2 Modellbildung, Annahmen

Mit der Forderung "keine Arbitrage" können viele Zusammenhänge hergeleitet werden; auch die Put-Call-Parität kann allein mit Arbitrageüberlegungen bewiesen werden. Hingegen können mit Arbitrageüberlegungen allein keine Preisbewertungsformeln hergeleitet werden. Auch die berühmte Black-Scholes-Formel kann *nicht* allein mit Arbitrage erklärt werden, obschon dies in ökonomischen Lehrbüchern mit viel Hokus Pokus immer wieder "gelingt". In Modellen stetiger Zeit können wir auch nicht mehr so einfache Sätze über

[1)] Neuerdings wird aber viel Wert auf sogenannte "Intraday"-Zeitreihen der Kurse der Finanzmärkte gelegt. Sind diese Intraday-Zeitreihen Gegenstand des Interesses, muss eine solche Wahl hinterfragt werden!

Lebensfähigkeit und Vollständigkeit beweisen, wie dies noch in Modellen diskreter Zeit möglich war (vgl. Theoreme 2.20 und 2.26). Mehr dazu findet man in folgenden Artikeln:

"Harrison, M.J. und Kreps, D.M. (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *J. of Economic Theory*, 29, pp. 381-408."
"Stricker, C. (1990), Arbitrage et lois de martingales, Ann. Inst. Henri Poincarré, 26, pp. 451-460."
"Delbaen, F. und Schachermayer, W. (1994), A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Math. Ann. 300*, pp. 463-520."
"Harrison, M.J. und Pliska, S.R. (1983), A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets, *Stochastic Processes and their Applications*, 15, pp. 313-316."

In einer einführenden Vorlesung sollte man sich deshalb auf Modelle stetiger Zeit konzentrieren, denen die sogenannte "Brownsche Bewegung" zugrunde liegt. In diesem Spezialfall können nämlich "relativ einfach" relevante Sätze bewiesen werden. Wir müssen dazu zuerst ein paar Vorbereitungen treffen:

In Kapitel 3 wird die Zeit Werte in $\mathbb{R}_+$ annehmen. Der Wahrscheinlichkeitsraum wird jeweils immer $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sein, wo im allgemeinen $|\Omega| = \infty$.

Definition 3.1 [Stochastischer Prozess] *Sei $(E, \mathcal{E})$ ein Messbarraum. Ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit ist eine Familie $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Zufallsgrössen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.*

Für gegebenes $\omega \in \Omega$ bezeichnet man die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ als Pfad des Prozesses. Wie in diskreter Zeit führen wir auch hier den Begriff der Filtration ein:

Definition 3.2 [Filtration] *Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist eine Familie von Sub-σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ von $\mathcal{A}$, so dass für $s < t$ gilt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Definition 3.3 [Adaptierter Prozess] *Wir nennen (X_t) einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozess, wenn $\forall t \geq 0$ X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

Bemerkung 3.4 [über die P-Nullmengen von $\mathcal{A}$] Wir werden von nun an nur noch mit Filtrationen arbeiten, welche die folgende Bedingung erfüllen: Falls $A \in \mathcal{A}$ mit $P[A] = 0$, so muss gelten dass $A \in \mathcal{F}_t$ $\forall t$. Mit anderen Worten: "$\mathcal{F}_t$ enthält alle P-Nullmengen." Der Grund für diese Annahme ist, dass wir damit folgern können: Wenn $X = Y$ P-f.s. und Y ist $\mathcal{F}_t$-messbar, dann ist auch X $\mathcal{F}_t$-messbar.

Wenn wir nun aber in bisheriger Manier die σ-Algebra derart wählen, dass $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \leq t\}$, also die vom Prozess (X_t) generierte σ-Algebra, so ist die Bedingung in Bemerkung 3.4 im Allgemeinen *nicht* erfüllt. Wenn wir aber mit $\mathcal{N}$ die σ-Algebra bezeichnen, welche von allen P-Nullmengen erzeugt wird, so können wir die sogenannte *natürliche Filtration* definieren; es ist diejenige, welche von $(\mathcal{F}_t)$ und $\mathcal{N}$ erzeugt wird. Diese erfüllt dann die Bedingung in Bemerkung 3.4. Wir werden von jetzt an immer voraussetzen, dass es sich bei der Filtration um diese natürliche Filtration handelt, auch wenn wir dies nicht jedesmal schreiben.

Definition 3.5 [Stoppzeit] *Die Zufallsgrösse $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)$, wenn $\forall t$ gilt*

$$\{\omega | \tau(\omega) \leq t\} =: \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Diese Definition besagt, dass τ eine Stoppzeit ist, wenn "sie nicht in die Zukunft schauen kann". Damit sind unfäire Spielsituationen ausgeschlossen.

Wir definieren noch die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ einer Stoppzeit τ als:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} | \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Diese σ-Algebra steht für alle Information vor der zufälligen Zeit τ. Die Aussagen des folgenden Lemmas können von vernünftigen Definitionen von $\mathcal{F}_\tau$ und von Stoppzeiten gefordert werden. Sie müssen aber bewiesen werden. Die Beweise sind zur Übung empfohlen auf Blatt 5, Aufgabe 14.

Lemma 3.6 [Eigenschaften von Stoppzeiten] *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.*
2. *Wenn $\tau \equiv t$ wo t deterministisch, dann gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.*
3. *Wenn S eine Stoppzeit ist, dann ist S $\mathcal{F}_S$-messbar.*
4. *Seien S und T Stoppzeiten derart, dass $S \leq T$ f.s.. Dann gilt $\mathcal{F}_S \in \mathcal{F}_T$.*
5. *Wenn S und T Stoppzeiten sind, dann ist auch $S \wedge T := \inf\{S, T\}$ eine Stoppzeit. Insbesondere gilt auch: Wenn S eine Stoppzeit ist und t eine deterministische Zeit, dann ist auch $S \wedge t$ eine Stoppzeit. Analoge Aussagen gelten für das Supremum.*

3.3 Brownsche Bewegung

Wie bereits angekündigt, werden wir uns auf Modelle in stetiger Zeit konzentrieren, denen die sogenannte Brownsche Bewegung zugrunde liegt. Die Brownsche Bewegung wird sowohl in Modellen für Aktien wie auch Wechselkursen oder Obligationen gebraucht. Wir werden sie in dieser einführenden Vorlesung nur für die Modellierung von Aktienkursen benutzen. Die Brownsche Bewegung wird in der Physik zur Modellierung der Bewegung eines Teilchens (Molekül) in einer Flüssigkeit oder einem Gas eingesetzt; die Bewegung kommt dann durch Zusammenstösse von Molekülen zustande. In dem Fall hat man eine Bewegung im $\mathbb{R}^3$. Die Brownsche Bewegung nennt man auch Wiener-Prozess. Der Name "Brownsche Bewegung" stammt vom schottischen Botaniker Robert Brown (1773-1858). Die Herkunft des Namens wird zwar korrekterweise meist mit Herrn Brown in Verbindung gebracht aber mit falscher Begründung. Die Geschichte der Herkunft des Namens findet sich auf http://www.sciences.demon.co.uk/wbbrowna.htm.

Definition 3.7 [Brownsche Bewegung (BB)] *Eine Brownsche Bewegung (BB) ist ein reellwertiger, stetiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Mathematischer:*

1. *Stetigkeit: P-f.s. gilt: die Abbildung $s \mapsto X_s(\omega)$ ist stetig.*
2. *Unabhängigkeit der Zuwächse: Wenn $s \leq t$, so ist $(X_t - X_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u | u \leq s\}$.*
3. *Stationarität der Zuwächse: Wenn $s \leq t$, dann haben $X_t - X_s$ und $X_{t-s} - X_0$ die gleiche Verteilung.*

Wenn man obige Definition liest, so denkt man sich vielleicht, eine BB sei "ein ziemlich beliebiger Prozess; praktisch alle Prozesse in stetiger Zeit seien demnach BB". Es ist ein ziemlich überraschendes Resultat, dass mit obiger Definition nicht irgendein beliebiger Prozess beschrieben ist, sondern dass er im Gegenteil sehr genaue Konturen hat. Es gilt nämlich folgendes Theorem:

Theorem 3.8 [Verteilungsgesetz der BB] *Wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ eine BB ist, so gilt: $(X_t - X_0)$ ist eine $\mathcal{N}(rt, \sigma^2 t)$-Zufallsgrösse. Dabei sind r und $\sigma, \sigma > 0$, reelle Konstanten.*

Beweis von Theorem 3.8 Der Beweis findet sich in "Gihman, I.I. und Skorohod, A.V., *Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires*, Mir, 1980."

Bemerkung 3.9 Wir nennen eine BB die Standard-Brownsche Bewegung, wenn gilt: $X_0 = 0$ P-f.s., $E[X_t] = 0$ und $E[X_t^2]) = t$. In obigem Theorem ist damit einfach $r = 0$ und $\sigma = 1$ zu setzen. Wir werden unter BB immer diese Standard-Brownsche Bewegung verstehen, ausser wir definieren explizit eine andere BB.

Wir haben oben gesehen, dass in einer BB für fixes t, X_t eine normalverteilte Zufallsgrösse ist. Es gilt sogar ein stärkeres Resultat:

Theorem 3.10 *Wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ eine BB ist und wenn $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, dann ist $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ein Gauss'scher Vektor.*

Beweis von Theorem 3.10 Wenn $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, dann ist der Zufallsvektor $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ wegen Definition 3.7 und Theorem 3.8 ein Vektor mit normalverteilten und unabhängigen Komponenten. Damit ist der Vektor $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ aber ein Gauss'scher Vektor und damit auch $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Q.E.D.

Wir werden noch die Definition der BB bezüglich einer Filtration benötigen.

Definition 3.11 [$(\mathcal{F}_t)$**-BB**] *Ein reellwertiger, stetiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ ist eine $(\mathcal{F}_t)$-BB falls:*

1. Für jedes $t \geq 0$ gilt, X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar.
2. Wenn $s \leq t$, so ist $(X_t - X_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.
3. Wenn $s \leq t$, dann haben $X_t - X_s$ und $X_{t-s} - X_0$ die gleiche Verteilung.

Aus dem ersten Punkt können wir folgern, dass gelten muss: $\sigma\{X_u | u \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$. Eine $(\mathcal{F}_t)$-BB ist auch eine BB bezüglich ihrer natürlichen Filtration.

3.4 Martingale in stetiger Zeit

Wir werden jetzt analog zu Kapitel 2 wieder Martingale definieren, diesmal in stetiger Zeit.

Definition 3.12 [Sub-, Super- und Martingal] *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Eine $(\mathcal{F}_t)$-adaptierte Familie von Zufallsgrössen $(M_t)_{t\geq 0}$ aus dem L^1 heisst:*

Martingal, wenn gilt: für alle $s < t$ ist $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$;

Submartingal, wenn gilt: für alle $s < t$ ist $E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$;

Supermartingal, wenn gilt: für alle $s < t$ ist $E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_S$.

Bemerkungen 3.13

1. Wie wir bereits in Kapitel 2 gesehen haben, spielt es in der Finanzmathematik eine grosse Rolle, bezüglich welchem Mass man einen Erwartungswert bildet. In der Folge wird deshalb normalerweise statt $\mathbb{E}$ beispielsweise $\mathbb{E}_Q$ geschrieben. Damit wird dann angegeben, dass wir den Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmasses Q bilden.
2. Die verwendete Filtration ist zentral in der Definition von Martingalen. Wechselt man die Filtration, geht die Martingaleigenschaft im allgemeinen verloren (keine Filtrationsinvarianz!).

Satz 3.14 [Beispiele von Martingalen] *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine (standard) $\mathcal{F}_t$-BB. Dann sind die folgenden Ausdrücke $\mathcal{F}_t$-Martingale:*

a) (X_t),

b) $(X_t^2 - t)$,

c) $\exp\big(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t\big)$.

Beweis von Satz 3.14 a) Wenn $s \leq t$, dann ist $X_t - X_s$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathcal{F}_s$. Damit gilt: $E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = E[X_t - X_s]$. Da (X_t) eine Standard BB ist, muss jetzt gelten $E[X_t - X_s] = 0$; damit ist die erste Behauptung bewiesen.

b) Für die zweite Behauptung steigen wir folgendermassen ein:

$$\begin{aligned} E[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s] =& E\big[(X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s\big] \\ =& E\big[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s\big] + 2X_s E\big[X_t - X_s|\mathcal{F}_s\big] \end{aligned}$$

Weil (X_t) ein Martingal ist, können wir nun folgern: $E\big[X_t - X_s|\mathcal{F}_s\big] = 0$. Damit haben wir

$$E[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s] = E\big[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s\big].$$

Weil die BB stationäre und unabhängige Zuwächse hat, können wir nun folgern dass

$$E\big[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s\big] = E\big[X_{t-s}^2\big] = t - s.$$

Damit haben wir $E[X_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = X_s^2 - s$ für $s < t$.

c) Wir notieren zuerst, dass gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2} dx = 1.$$

Damit gilt aber, wenn Y eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse ist:

$$E[e^{\lambda Y}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} dx = e^{\lambda^2/2}.$$

Andererseits haben wir auch, da X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist, dass für $s < t$ gilt

$$E[e^{\sigma X_t - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s] = e^{\sigma X_s - \sigma^2 t/2} E[e^{\sigma(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s].$$

Weil $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist, haben wir damit

$$\begin{aligned} E\big[e^{\sigma(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s\big] =& E\big[e^{\sigma(X_t - X_s)}\big] \\ =& E\big[e^{\sigma X_{t-s}}\big] \\ =& E\big[e^{\sigma Y \sqrt{t-s}}\big] \\ =& \exp\big(\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\big). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Es ist zentral wichtig, dass die Martingaleigenschaft ($E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$) nicht verloren geht, wenn s und t *beschränkte* Stoppzeiten sind. Diese Eigenschaft wird im folgenden Theorem ausgedrückt. Das Theorem heisst "Optional Sampling Theorem", weil man auf der Zeitachse zufällig Punkte wählt und auswertet.

Theorem 3.15 [Optional Sampling Theorem] *Sei $(M_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal stetiger Zeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Weiters seien τ_1 und τ_2 zwei Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, wobei T eine fixe, endliche, reelle Zahl sei. Dann ist M_{τ_2} in L^1 und es gilt:*

$$E[M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1},\ P - f.s.$$

Beweis von Theorem 3.15 Der Beweis findet sich in Karatzas und Shreve (1997).

Bemerkung 3.16 Dieses Resultat impliziert, dass wenn τ eine beschränkte Stoppzeit ist, dann gilt $E[M_\tau] = E[M_0]$. Dies scheint auf den ersten Blick trivial; die (vermeintliche) Schwierigkeit besteht darin, dass man in M_τ gleich *zwei* mal den Zufall im Spiel hat: im Prozess und in der Zeit des Stopps des Prozesses. Wenn wir aber in Theorem 3.15 $\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$ wählen, so erhalten wir das Resultat indem wir noch die Erwartungswerte bilden. Des weiteren gilt ein analoges Resultat für Sub- und Supermartingale.

Es ist sehr umständlich, wenn man mit Ausdrücken wie

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |M_s|$$

rechnen muss. (M_s) ist ja ein zufälliger Prozess und dann wird erst noch für jeden Pfad das Supremum genommen. Wie sollen da Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte berechnet werden? Häufig benötigt man aber "nur" eine obere Abschätzung für solche Grössen. Diese liefert das folgende Theorem:

Theorem 3.17 [Doob Ungleichung] *Sei $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein stetiges Martingal aus dem L^2. Dann gilt:*

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4E[|M_T|^2].$$

Beweis von Theorem 3.17 Der Beweis findet sich in Karatzas und Shreve (1997).

Doob ist Amerikaner und sein Name wird "Duub" ausgesprochen.

3.5 Das stochastische Integral bezüglich der Brownschen Bewegung und der Kalkül von Itô

Wir wollen zuerst begrifflich präzisieren, dass stochastische Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung als Itô-Integrale bezeichnet werden. Stochastische Integrale ohne Präzisierung sind viel allgemeinere Prozesse.

Es sei bereits jetzt folgendes vorausgeschickt: Der Name "Stochastisches Integral" könnte verleiten zu glauben, es handelt sich bei einem stochastischen Integral um eine reelle fixe Zahl. Dies ist aber nicht so; es steckt auch das Wort "stochastisch" drin. **Stochastische Integrale sind wie auch bedingte Erwartungswerte im Allgemeinen Zufallsgrössen!**

Wir wollen zuerst die Situation in den Modellen in diskreter Zeit in Erinnerung rufen. Dort gilt: Wenn $\phi = (H_n)_{0 \leq n \leq N}$ eine selbstfinanzierende Startegie ist, so ist der abdiskontierte Wert des Portfolios mit Anfangswert V_0 zur Zeit n gleich

$$V_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}).$$

Wenn wir ein Martingalmass besitzen (ein Mass, unter dem die diskontierten Preise der risikobehafteten Anlagen Martingale sind), so ist dieser Ausdruck die Martingaltransformierte von $\tilde{S}$ mit H und damit wieder ein Martingal. Wir werden nun in stetiger Zeit ein Analogon entwickeln, nämlich Ausdrücke der Art:

$$\int H_u d\tilde{S}_u$$

Was ist unter solch einem Integral zu verstehen? Die risikobehafteten Anlagen (von jetzt an Aktienkurse) werden wir derart modellieren, dass die Preise Funktionen von einer oder gar mehreren BB's sein werden. Es ist nun aber so, dass eine BB zwar **f.s. stetig, aber auch f.s. nirgendwo differenzierbar ist**! Dies sieht man heuristisch folgendermassen ein: Wenn wir eine (Standard-)BB (X_t) im Punkt 0 ableiten wollen, so ist ja $X_t = \sqrt{t}\epsilon$, wobei ϵ eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse sei. Damit können wir naiv versuchen abzuleiten:

$$X_0' := \lim_{h \searrow 0} \frac{\sqrt{h}\epsilon}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\epsilon}{\sqrt{h}}.$$

Dieser Limes kann nun "weder vom Zähler noch vom Nenner her" existieren! Damit können wir leider nicht einfach schreiben

$$\int_0^t f(s)dX_s = \int_0^t f(s)\frac{dX_s}{ds}ds,$$

um dann mit den bisherigen Regeln der Integralrechnung fortzufahren. In der Tat brauchen wir für die stochastischen Integrale einen völlig neuen Integrationskalkül.

3.5.1 Konstruktion des stochastischen Integrals bezüglich der Brownschen Bewegung

Wir werden in drei Schritten das stochastische Integral bezüglich der Brownschen Bewegung herleiten: zuerst mit *einfachen Prozessen*, dann in zwei weiteren Schritten bis zur endgültigen Form. Jeder Schritt wird eine Vergrösserung der Klasse der integrierbaren Funktionen mit sich bringen und es wird zentral sein zu zeigen, dass es sich wirklich um eine Vergrösserung der Klasse handelt. Auch sollten bei jedem Erweiterungsschritt alle bisherigen Eigenschaften des stochastischen Integrals erhalten bleiben. Diese letzte Anforderung wird leider zentral verletzt!

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine standard $\mathcal{F}_t$-BB auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Wir wollen jetzt einem Ausdruck der Art

$$\int_0^t f(s,\omega)dX_s$$

eine Bedeutung geben; dabei werden wir genau angeben, in welcher Klasse der stochastische Prozess $f(s,\omega)$ sein darf. In diesem ganzen Kapitel wird T eine positive, konstante, reelle Zahl sein.

Definition 3.18 [Einfacher Prozess] *Wir nennen $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ einen einfachen Prozess, wenn er eine Darstellung in der Form*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

besitzt, wobei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ und ϕ_i ist $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-messbar und beschränkt. p ist fix!

Jetzt definieren wir das stochastische Integral eines einfachen Prozesses H als den stetigen Prozess $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$, welcher auf $t \in]t_k, t_{k+1}]$ den Wert

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(X_t - X_{t_k})$$

annimmt. Wir können $I(H)_t$ auch als

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq p} \phi_i(X_{t_i\wedge t} - X_{t_{i-1}\wedge t})$$

schreiben; daraus folgt dann sofort die Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto I(H)_t$. Wir *schreiben* $\int_0^t H_s dX_s$ für $I(H)_t$. Offenbar gilt zum Beispiel $\int_0^t 1dX_s = X_t$ (dies ist so ziemlich das einzige stochastische Integral, welches man noch einfach ausrechnen kann). Das folgende Theorem ist fundamental in der ganzen Entwicklung des stochastischen Integrals. Es lohnt sich, sowohl die Aussagen wie auch die Beweise dazu gut zu verstehen, weil man in diesem (einfachen) Umfeld zum letzten Mal noch einigermassen anschaulich verstehen kann, was vor sich geht.

Satz 3.19 [Eigenschaften von stochastischen Integralen von einfachen Prozessen] *Sei $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ ein einfacher Prozess. Dann gelten:*

a) $\left(\int_0^t H_s dX_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *ist ein stetiges $\mathcal{F}_t$-Martingal,* *b)* $E\big[\big(\int_0^t H_s dX_s\big)^2\big] = E\big(\int_0^t H_s^2 ds\big)$,

c) $E\big[\sup_{0\leq t\leq T}\big|\int_0^t H_s dX_s\big|^2\big] \leq 4E\big[\int_0^T H_s^2 ds\big]$.

Bemerkungen 3.20 a) ist das Pendant zu den Martingaltransformationen aus Kapitel 2 (siehe Lemma 2.13), denn die BB ist ja selber ein Martingal. In b) ist zu bemerken, dass es sich dabei auf der rechten Seite der Gleichung um ein normales Lebesgue-Integral handelt. Damit ist ein einfacher Weg gegeben, den Ausdruck auf der linken Seite auszurechnen. c) kommt von der Doob-Ungleichung.

Beweis von Satz 3.19 a) Um diesen Satz zu beweisen, können wir auf Prozesse in diskreter Zeit zurückgreifen. Betrachten wir dazu zuerst die erste Aussage. Zu zeigen ist, dass $\big(\int_0^t H_s dX_s\big)$ ein Martingal ist, also dass für $s < t$ gilt:

$$E\Big[\int_0^t H_u dX_u | \mathcal{F}_s\Big] = \int_0^s H_u dX_u.$$

Wir sind frei, s und t in die Unterteilung $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \ldots < t_p = T$ einzubauen. Wenn wir jetzt $M_n := \int_0^{t_n} H_s dX_s$ und $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{t_n}$ für $0 \leq n \leq p$ setzen, so haben wir das Problem in der Tat darauf reduziert, dass jetzt M_n ein $\mathcal{G}_n$-Martingal sein muss. Dies zeigen wir im Folgenden:

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s dX_s = \sum_{i=1}^n \phi_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$$

wobei ϕ_i $\mathcal{G}_{i-1}$ messbar ist. Da (X_t) eine BB ist, ist auch $Y_n := X_{t_n}$ ein $\mathcal{G}_n$-Martingal. Damit ist aber M_n die Martingaltransformierte von $(Y_n)_{n\in\{0,1,\ldots,p\}}$ mit ϕ. Wegen Lemma 2.13 ist damit auch M_n ein Martingal.

b) Es gilt:

$$E[M_n^2] = E\big[\big(\sum_{i=1}^n \phi_i(Y_i - Y_{i-1})\big)^2\big] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[\phi_i\phi_j(Y_i - Y_{i-1})(Y_j - Y_{j-1})].$$

Für $i < j$ haben wir dann

$$\begin{aligned} E[\phi_i\phi_j(Y_i - Y_{i-1})(Y_j - Y_{j-1})] =& E\big[E[\phi_i\phi_j(Y_i - Y_{i-1})(Y_j - Y_{j-1})|\mathcal{G}_{j-1}]\big] \\ =& E\big[\phi_i\phi_j(Y_i - Y_{i-1})E[(Y_j - Y_{j-1})|\mathcal{G}_{j-1}]\big] \end{aligned}$$

Da Y_j ein Martingal ist, haben wir $E[(Y_j - Y_{j-1})|\mathcal{G}_{j-1}] = 0$. Damit wird der ganze obige Ausdruck für $i < j$ Null. Dies gilt selbstverständlich auch für $j < i$. Wir müssen also nur noch den Fall $j = i$ untersuchen:

$$E[\phi_i^2(Y_i - Y_{i-1})^2] = E[E[\phi_i^2(Y_i - Y_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1}]] = E[\phi_i^2 E[(Y_i - Y_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1}]].$$

Es gilt aber $E[(Y_i - Y_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1}] = E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2] = t_i - t_{i-1}$. Insgesamt haben wir also

$$E\big[\big(\sum_{i=1}^n \phi_i(Y_i - Y_{i-1})\big)^2\big] = E\big[\sum_{i=1}^n \phi_i^2(t_i - t_{i-1})\big] = E[\int_0^t H_s^2 ds].$$

Die Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \int_0^t H_s dX_s$ folgt aus der Definition des stochastischen Integrals von einfachen Prozessen.

c) Anwendung der Doob-Ungleichung (Theorem 3.17) auf das Martingal $(\int_0^t H_s dX_s)_{t\geq 0}$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.21 Wir *definieren* noch

$$\int_t^T H_s dX_s := \int_0^T H_s dX_s - \int_0^t H_s dX_s.$$

Falls $t \leq T$ und $A \in \mathcal{F}_t$, dann ist der Prozess $s \mapsto \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{t<s\}} H_s$ auch ein einfacher Prozess und man kann von der Definition her einsehen, dass gilt:

$$\int_0^T \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{t<s\}} H_s dX_s = \mathbf{1}_A \int_t^T H_s dX_s. \tag{3.1}$$

Wir kommen jetzt zu einem **ersten Erweiterungsschritt: wir werden die Klasse der integrierbaren Funktionen massiv vergrössern!** Dazu definieren wir die folgende Klasse von adaptierten Prozessen:

$$\mathcal{H} := \Big\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} - \text{adaptierter Prozess}, E\big[\int_0^T H_s^2 ds\big] < +\infty \Big\}.$$

Satz 3.22 [$\exists$! und Eigenschaften von stochastischen Integralen von Prozessen aus $\mathcal{H}$] *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{F}_t$-BB. Dann gibt es eine lineare Abbildung J von $\mathcal{H}$ in den Raum der stetigen $\mathcal{F}_t$-Martingalen auf $[0, T]$, so dass:*

a) Wenn $(H_t)_{t \leq T}$ ein einfacher Prozess ist, dann gilt $P - f.s.$ dass für jedes $0 \leq t \leq T$, $J(H)_t = I(H)_t$.

b) Wenn $t \leq T$, dann gilt: $E[J(H)_t^2] = E\big[\int_0^t H_s^2 ds\big]$.

Diese lineare Abbildung ist eindeutig in dem Sinne, dass wenn sowohl J wie auch J' obige Bedingungen erfüllen, dann muss $P - f.s.$ gelten:

$$\forall\, 0 \leq t \leq T, J(H)_t = J'(H)_t.$$

Wir schreiben für $H \in \mathcal{H}$: $\int_0^t H_s dX_s := J(H)_t$.

Des weiteren haben wir noch folgende Eigenschaften:

Satz 3.23 [Weitere Eigenschaften des stochastischen Integrals von Prozessen aus $\mathcal{H}$] *Wenn $(H_t)_{0\leq t \leq T}$ aus $\mathcal{H}$ ist, so gilt auch*

a)

$$E\big[\sup_{0 \leq t \leq T} \big| \int_0^t H_s dX_s \big|^2\big] \leq 4E\big[\int_0^T H_s^2 ds\big]. \tag{3.2}$$

b) Wenn τ eine $\mathcal{F}_t$-Stoppzeit ist, so gilt $P - f.s.$:

$$\int_0^{\tau \wedge T} H_s dX_s = \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dX_s. \tag{3.3}$$

Bemerkungen zu den Sätzen 3.22 und 3.23 Mit Satz 3.22 a) sieht man, dass wir eine *Erweiterung* der Klasse vorgenommen haben. Diese Erweiterung ist sogar unter den gewählten Einschränkungen eindeutig. Wir müssen nun noch untersuchen, inwiefern die Eigenschaften von Satz 3.19 alle auch für die erweiterte Klasse ihre Gültigkeit behalten: in Satz 3.22 geht die Abbildung in den Raum der stetigen Martingale; somit ist die erste Eigenschaft in Satz 3.19 auch hier erfüllt. Die zweite Eigenschaft ist dank Satz 3.22 b) erfüllt. Die dritte Eigenschaft ist dank Satz 3.23 a) ebenfalls erfüllt. Wir haben also für *diese* Erweiterung der Klasse keinen Preis bezahlen müssen.

Beweis von Satz 3.22 und 3.23 Wir werden folgende Aussage als bekannt voraussetzen: Wenn $(H_s)_{s\leq T}$ aus $\mathcal{H}$ ist, dann gibt es eine Folge $(H^n_s)_{s\leq T}$ von einfachen Prozessen, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds\big] = 0.$$

Ein Beweis hiervon findet sich sonst in Karatzas und Shreve (1997). Sei $H \in \mathcal{H}$ und $(H^n)_{n\geq 0}$ eine Folge von einfachen Prozessen, welche wie oben angegeben gegen H konvergieren. Dann können wir schliessen dass

$$E\big[\sup_{t\leq T} |I(H^{n+p})_t - I(H^n)_t|^2\big] \leq 4E\big[\int_0^T |H_s^{n+p} - H_s^n|^2 ds\big]. \tag{3.4}$$

Damit gibt es aber eine Unterfolge $H^{\phi(n)}$ derart, dass

$$E\big[\sup_{t\leq T} |I(H^{\phi(n+1)})_t - I(H^{\phi(n)})_t|^2\big] \leq \frac{1}{2^n}.$$

Damit ist aber die Folge $\big(I(H^{\phi(n+1)}) - I(H^{\phi(n)})\big)$ f.s. uniform konvergent. Folglich konvergiert $I(H^{\phi(n)})_t$ gegen eine **stetige** Funktion; diese ist aber per Definitionem die Abbildung $t \mapsto J(H)_t$. Wenn man jetzt in (3.4) den Limes nimmt ($p \to \infty$), erhält man:

$$E\big[\sup_{t\leq T} |J(H)_t - I(H^n)_t|^2\big] \leq 4E\big[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds\big]. \tag{3.5}$$

Damit folgt auch, dass $(J(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ nicht von der approximierenden Funktion abhängt. Des weiteren ist $(J(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ ein **Martingal**, denn einerseits haben wir

$$E[I(H^n)_t|\mathcal{F}_s] = I(H^n)_s.$$

Zusätzlich gilt für jedes t: $\lim_{n\to\infty} I(H^n)_t = J(H)_t$ in der $L^2(\Omega, P)$-Norm. Weil die Bildung des bedingten Erwartungswertes eine stetige Funktion in $L^2(\Omega, P)$ ist, haben wir in der Tat, dass unsere lineare Abbildung in den Raum der Martingale geht. Von (3.5) und weil $E[I(H^n)_t^2] = E[\int_0^t |H_s^n|^2 ds]$, können wir jetzt schliessen, dass $E[J(H)_t^2] = E[\int_0^t |H_s|^2 ds]$. Von (3.5) und weil $E[\sup_{t\leq T} I(H^n)_t^2] \leq 4E[\int_0^T |H_s^n|^2 ds]$, können wir jetzt auf (3.2) schliessen. **Damit sind also die Aussagen von Satz 3.22 b) und Satz 3.23 a) bewiesen.** Die **Eindeutigkeit** folgt daraus, dass die Menge der einfachen Funktionen dicht ist in $\mathcal{H}$. Das wir eine **Erweiterung der Klasse vorgenommen haben (Satz 3.22 a))** folgt durch die Wahl $H^n = H\ \forall n$ trivialerweise. Im Rest des Beweises geht es um die Aussage von Satz 3.23 b):

Wir halten zuerst fest, dass (3.1) richtig bleibt für Prozesse aus $\mathcal{H}$. Dies folgt aus (3.5) und der Tatsache, dass die einfachen Prozesse dicht sind in $\mathcal{H}$. Für τ eine beliebige Stoppzeit, wählen wir vorerst auf $[0, T]$ eine Unterteilung derart, dass $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Wir definieren weiter $\tilde{\tau} := \tau \wedge T$ (dies ist wieder eine Stoppzeit wegen Lemma 3.6). Jetzt definieren wir

$$\tau_n = \sum_{1\leq i\leq n-1} t_i \mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}} + t_n \mathbf{1}_{\{t_{n-1}\leq\tilde{\tau}\leq t_n\}} =: \sum_{1\leq i\leq n}^{*} t_i \mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}} \tag{3.6}$$

Mit $\sum^*_{1\leq i\leq n}$ wollen wir angeben, dass man im letzten Summand im Indikator den rechten Rand mit einschliesst. Wir werden (3.3) zuerst für eine Stoppzeit τ_n beweisen. Beobachten wir zuerst, dass gilt:

$$\int_0^T \mathbf{1}_{\{s>\tau_n\}} H_s dX_s = \int_0^T \big(\sum_{1\leq i\leq n}^{*} \mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}} \mathbf{1}_{\{s>t_i\}}\big) H_s dX_s.$$

Des weiteren ist ein Ausdruck der Art $\mathbf{1}_{\{s>t_i\}}\mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}}H_s$ immer auch adaptiert (er ist Null für $s \leq t_i$ und ansonsten gleich $\mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}}H_s$) und somit Element von $\mathcal{H}$. Damit folgt

$$\int_0^T \mathbf{1}_{\{s>\tau_n\}}H_s dX_s = \sum_{1\leq i\leq n}^{*} \int_0^T \mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}}\mathbf{1}_{\{s>t_i\}}H_s dX_s = \sum_{1\leq i\leq n}^{*} \mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tilde{\tau}<t_i\}} \int_{t_i}^T H_s dX_s = \int_{\tau_n}^T H_s dX_s$$

und damit auch $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}H_s dX_s = \int_0^{\tau_n} H_s dX_s$ (nach Konstruktion gilt $\tau_n \leq T$). Wir wollen jetzt das Resultat für beliebige Stoppzeiten τ beweisen. Dazu halten wir zuerst mal fest, dass $\tilde{\tau}$ durch eine fallende Folge von Stoppzeiten der bisherigen Art (3.6) approximiert werden kann. Mit

$$\tau_n := \sum_{0\leq k\leq 2^n}^{*} \frac{(k+1)T}{2^n}\mathbf{1}_{\left\{\frac{kT}{2^n}\leq\tilde{\tau}<\frac{(k+1)T}{2^n}\right\}}$$

sehen wir, dass τ_n f.s. gegen $\tilde{\tau}$ konvergiert. Auf Grund der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \int_0^t H_s dX_s$ können wir folgern, dass auch $\int_0^{\tau_n} H_s dX_s$ f.s. gegen $\int_0^{\tilde{\tau}} H_s dX_s$ konvergiert. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} E\Big[\Big|\int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}}H_s dX_s - \int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}H_s dX_s\Big|^2\Big] =& E\Big[\Big|\int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tilde{\tau}\}}H_s dX_s - \int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}H_s dX_s\Big|^2\Big] \\ =& E\Big[\int_0^T \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}<s\leq\tau_n\}}H_s^2 ds\Big]. \end{aligned}$$

Auf Grund der majorisierten Konvergenz konvergiert dieser Ausdruck gegen 0. Damit haben wir $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}}H_s dX_s$ konvergiert gegen $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}}H_s dX_s$ in $L^2(\Omega, P)$ (eine Unterfolge konvergiert f.s.).

Q.E.D.

In der Finanzmathematik reicht leider die Klasse $\mathcal{H}$ nicht vollständig aus. Wir werden sie **nochmals vergrössern (dies ist der zweite (und letzte) Erweiterungsschritt)**. Dazu definieren wir

$$\tilde{\mathcal{H}} := \left\{(H_t)_{0\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} - \text{adaptierter Prozess}, \int_0^T H_s^2 ds < +\infty\ P - \text{f.s.}\right\}.$$

Satz 3.24 [**$\exists$! und Eigenschaften von stochastischen Integralen von Prozessen aus** $\tilde{\mathcal{H}}$] *Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{J}$ von $\tilde{\mathcal{H}}$ in den Vektorraum der stetigen Prozesse auf* $[0,T]$*, so dass:*

a) Erweiterung: Wenn $(H_t)_{t\leq T}$ ein einfacher Prozess ist, dann gilt $P-$f.s. dass für jedes $0 \leq t \leq T$, $\tilde{J}(H)_t = I(H)_t$.

b) Stetigkeit: Sei $(H^n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Prozessen aus $\tilde{H}$, so dass $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 *konvergiert. Dann konvergiert auch* $\sup_{t\leq T}|\tilde{J}(H^n)_t|$ *gegen 0 in Wahrscheinlichkeit.*

Wir schreiben für $H \in \tilde{\mathcal{H}}$: $\int_0^t H_s dX_s := \tilde{J}(H)_t$.

Bemerkung 3.25 Wir müssen hier leider feststellen, dass die Martingaleigenschaft nicht mehr gelten muss. Der Erwartungswert existiert ja eventuell gar nicht mehr. Bei diesem Erweiterungsschritt mussten wir also einen Preis bezahlen. Selbstverständlich bleibt die Martingaleigenschaft bei Funktionen aus der Klasse $\mathcal{H}$ auch mit diesem "neuen" stochastischen Integral erhalten. Aber für die ganze Klasse $\tilde{\mathcal{H}}$ haben wir diese Eigenschaft verloren. Wir haben in Satz 3.24 nur die Erweiterung von den einfachen Prozessen aus gefordert. Es ist aber wegen dieser Erweiterung und der Stetigkeit einfach zu zeigen, dass auch gilt: für $H \in \mathcal{H}$ gilt P-f.s. dass $\forall\, t \leq T, \tilde{J}(H)_t = J(H)_t$.

Beweis von Satz 3.24 Sei $H \in \tilde{\mathcal{H}}$. Wir definieren $T_n := \inf\{0 \le s \le T, \int_0^s H_u^2 du \ge n\}$ $(= +\infty$ falls diese Menge leer sein sollte) und $H_s^n = H_s \mathbf{1}_{\{s \le T_n\}}$.

Wir werden zuerst zeigen, dass T_n eine Stoppzeit ist. Die Menge $\{T_n \le t\}$ ist einfach die Menge $\{\int_0^t H_u^2 du \ge n\}$. Damit müssen wir nur noch zeigen dass $\int_0^t H_u^2 du$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Dies ist so für einfache Prozesse und weil diese dicht sind in $\mathcal{H}$ gilt es auch für Prozesse aus $\mathcal{H}$. Falls nun $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, so ist $\int_0^t H_s^2 ds$ auch $\mathcal{F}_t$-messbar, weil es f.s. der Limes von $\int_0^t (H_u \wedge K)^2 du$ ist für $K \to \infty$. Die Prozesse H_s^n sind adaptiert und gehören wegen der Limitierung zu $\mathcal{H}$. Des weiteren gilt:

$$\int_0^t H_s^n dX_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \le T_n\}} H_s^{n+1} dXs$$

und mit (3.3) erhalten wir

$$\int_0^t H_s^n dXs = \int_0^{t \wedge T_n} H_s^{n+1} dX_s.$$

Also gilt auf der Menge $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$, dass für $t \le T$ $J(H^n)_t = J(H^{n+1})_t$. Da $\cup_{n \ge 0} \{\int_0^T H_u^2 du < n\} = \{\int_0^T H_u^2 du < +\infty\}$, können wir f.s. einen Prozess $\tilde{J}(H)_t$ konstruieren: auf $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$ setzen wir für alle $t \le T$: $\tilde{J}(H)_t := J(H^n)_t$. Der Prozess $t \mapsto \tilde{J}(H)_t$ ist per Definitionem f.s. stetig. Die Erweiterungsanforderung ist nach Konstruktion erfüllt. Wir müssen noch die Stetigkeitsanforderung von $\tilde{J}$ beweisen: Es gilt:

$$P\big[\sup_{t \le T} |\tilde{J}(H)_t| \ge \epsilon\big] \le P[\int_0^T H_s^2 ds \ge 1/N] + P\big[\mathbf{1}_{\{\int_0^T H_u^2 ds < 1/N\}} \sup_{t \le T} |\tilde{J}(H)_t| \ge \epsilon].$$

Definieren wir $\tau_N := \inf\{s \le T, \int_0^s H_u^2 du \ge 1/N\}$ ($+\infty$ falls diese Menge leer ist), so haben wir wegen (3.3) auf der Menge $\{\int_0^T H_u^2 du < 1/N\}$ für $t \le T$:

$$\int_0^t H_s dX_s = \tilde{J}(H)_t = J(H^1)_t = \int_0^t H_s^1 \mathbf{1}_{\{s \le \tau_N\}} dX_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{\{s \le \tau_N\}} dX_s.$$

Wenn wir nun (3.2) auf den Prozess $s \mapsto H_s \mathbf{1}_{\{s \le \tau_N\}}$ anwenden, so haben wir:

$$\begin{aligned} P\big[\sup_{t \le T} |\tilde{J}(H)_t| \ge \epsilon\big] &\le P\Big[\int_0^T H_s^2 ds \ge 1/N\Big] + 4/\epsilon^2 E[\int_0^T H_s^2 \mathbf{1}_{\{s \le \tau_N\}} ds] \\ &\le P\Big[\int_0^T H_s^2 ds \ge 1/N\Big] + \frac{4}{N\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt: wenn $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, dann konvergiert auch $\sup_{t \le T} |\tilde{J}(H^n)_t|$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Die Linearität von $\tilde{J}$ folgt folgendermassen: seien H und K zwei Prozesse aus $\tilde{H}$ und H^n und K^n zwei Folgen von Prozessen, welche wie am Anfang des Beweises konstruiert werden. Es gilt damit dass $\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds$ und $\int_0^T (K_s^n - K_s) ds$ beide in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergieren. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{J}$ können wir nun den Limes in $J(\lambda H^n + \mu K^n)_t = \lambda J(H^n)_t + \mu J(H^n)_t$ bilden und erhalten damit die Linearität von $\tilde{J}$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{J}$ und da für $H \in \tilde{H}$ gilt $\int_0^T (H_t - H_t^n)^2 dt$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0, haben wir Eindeutigkeit der Erweiterung.

Q.E.D.

Zusammenfassung 3.26 Wir wollen hier kurz zusammenfassen, wann das stochastische Integral gebildet werden kann und wann es sogar ein Martingal ist: Sei X_t eine $\mathcal{F}_t$-BB und $(H_t)_{0 \le t \le T}$ ein $\mathcal{F}_t$ adaptierter Prozess. Sobald $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ P-f.s. können wir das stochastische Integral $(\int_0^t H_s dX_s)_{0 \le t \le T}$ definieren.

Der Prozess $(\int_0^t H_s dX_s)_{0\le t\le T}$ ist sogar ein Martingal, wenn $E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$. Es kann gezeigt werden, dass diese Bedingung zu streng ist, sie ist nicht notwendig. Zudem führen wir noch ohne Beweis an, dass gilt: $E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$ genau dann wenn auch

$$E\big[\sup_{0\le t\le T}(\int_0^t H_s dX_s)^2\big] < \infty.$$

3.5.2 Der Kalkül von Itô

Wir führen jetzt ein Kalkül ein - eine Sammlung von Rechenregeln für das stochastische Integral. Man nennt dieses Kalkül auch Kalkül von Itô. Zentraler Bestandteil ist die Itô-Formel. Die Itô-Formel erlaubt uns, Funktionen der Art $t \mapsto f(X_t)$ abzuleiten, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist. Untersuchen wir doch zuerst anhand eines einfachen Beispiels, weshalb eine naive Erweiterung des bisherigen Differentialkalküls nicht funktioniert: Wir versuchen die Funktion $t \mapsto X_t^2$ abzuleiten (unter "Mithilfe" von dX_t). Im bisherigen Differentialkalkül gilt: wenn $f(0) = 0$, so haben wir:

$$f(t)^2 = 2\int_0^t f(s)\dot{f}(s)ds = 2\int_0^t f(s)df(s).$$

Wenn wir nun aber eine BB haben, so sind solche Rechenregeln, also $X_t^2 = 2\int_0^t X_s dX_s$, nicht möglich: Wir wissen nämlich, dass $\int_0^t X_s dX_s$ ein Martingal ist ($E[\int_0^t X_s^2 ds] < +\infty$), welches Null ist bei $t = 0$. Wenn es aber gleichzeitig gleich X_t^2 ist, so haben wir ein nicht-negatives Martingal, welches Null ist bei $t = 0$. Dies kann nicht sein, ausser das Martingal ist die Nullfunktion (was die BB nicht ist (und somit ist auch X_t^2 nicht die Nullfunktion)!).

Wir werden jetzt die Klasse von Prozessen definieren, auf welche die Itô-Formel angewendet werden kann.

Definition 3.27 [Itô-Prozess] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, ausgestattet mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$. X_t sei eine $\mathcal{F}_t$-BB. Wir nennen einen Prozess $(Z_t)_{0\le t\le T}$ einen $\mathbb{R}$-wertigen Itô-Prozess, wenn er eine Darstellung der Form*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dX_s \tag{3.7}$$

$P - f.s$ für alle $t \le T$ hat. Dabei muss gelten:

* Z_0 *ist* $\mathcal{F}_0$ *messbar.*
* $(K_t)_{0\le t\le T}$ *und* $(H_t)_{0\le t\le T}$ *sind* $\mathcal{F}_t$*-adaptierte Prozesse.*
* $\int_0^T |K_s|ds < +\infty\ P - f.s.$
* $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty\ P - f.s.$

Es ist möglich, folgenden starken Satz zu zeigen:

Satz 3.28 *Sei $(M_t)_{0\le t\le T}$ ein stetiges Martingal, welches eine Darstellung der Art*

$$M_t = \int_0^t K_s ds$$

hat mit $\int_0^T |K_s|ds < \infty$ P-f.s.. Dann gilt P-f.s.

$$\forall\, t \le T,\ M_t = 0.$$

Beweis von Satz 3.28 Karatzas und Shreve (1997)

Bemerkung 3.29 [Konsequenzen von Satz 3.28] *Wegen Satz 3.28 gelten nun:*

- Die Zerlegung eines Itô-Prozesses wie in Definition 3.27 ist eindeutig in dem Sinne, dass falls

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dX_s = Z_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dX_s,$$

dann müssen gelten: $Z_0 = Z_0'$ $P-f.s.$, $H_s = H_s'$ $ds \times P$-*f.ü.*, $K_s = K_s'$ $ds \times P$-*f.ü.*.

- Wenn $(M_t)_{0 \le t \le T}$ *ein Martingal ist mit Darstellung* $M_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dX_s$, *dann ist* $K_t = 0$ $dt \times P$-*f.ü.*.

Aufmerksame LeserInnen werden gemerkt haben, dass mit Hilfe von Satz 3.28 allein diese Konsequenzen nicht so allgemein folgen; nur wenn an Stelle von $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ $P-f.s.$ und $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ $P-f.s.$ sogar gilt $E[\int_0^T |K_s| ds] < +\infty$ und $E[\int_0^T |H_s|^2 ds] < +\infty$, können wir mit Hilfe von Satz 3.28 diese Schlussfolgerungen machen. Sie gelten aber auch unter den schwächeren Bedingungen.

Wir werden jetzt die Itô-Formel für den Fall von stetigen Martingalen angeben:

Theorem 3.30 [Itô-Formel] *Sei* $(Z_t)_{t \ge 0}$ *ein Itô-Prozess*

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dX_s,$$

f *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Z_s) d\langle Z, Z \rangle_s, \tag{3.8}$$

wobei per Definition gelten soll: $\langle Z, Z \rangle_s := \int_0^s H_y^2 dy$, *und*

$$\int_0^t f'(Z_s) dZ_s := \int_0^t f'(Z_s) K_s ds + \int_0^t f'(Z_s) H_s dX_s.$$

Dazu kommt noch folgende Regel: Falls die Abbildung $(t, x) \mapsto f(t, x)$ *zweimal stetig nach* x *und einmal stetig nach* t *abgeleitet werden kann* ($f \in C^{1,2}$), *dann erhalten wir*

$$f(t, Z_t) = f(0, Z_0) + \int_0^t f_s'(s, Z_s) ds + \int_0^t f_x'(s, Z_s) dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}''(s, Z_s) d\langle Z, Z \rangle_s. \tag{3.9}$$

Beweis von Theorem 3.30 Karatzas und Shreve (1997).

3.5.3 Beispiele zur Formel von Itô

Wir wollen zuerst diesen Satz auf die Situation $f(x) = x^2$ und $Z_t = X_t$ anwenden. Wir müssen zuerst in diesem Fall die Identifikation von Z_t mit unserer (eindeutigen) Darstellung (3.7) als Itô-Prozess erreichen. Dies gelingt uns mit $K_s = 0$ und $H_s = 1$ da $\int_0^t 1 dX_s = X_t$ gilt. Wir wenden jetzt (3.8) an und erhalten

$$X_t^2 = 2 \int_0^t X_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds.$$

Damit erhalten wir also

$$X_t^2 - t = 2\int_0^t X_s dX_s.$$

Wir haben ein zweites Resultat in einer ganzen Sammlung von Zusammenhängen rund um die stochastischen Integrale erhalten (das erste Resultat war $\int_0^t dX_s = X_t$). Des weiteren gilt ja $E[\int_0^t X_s^2 ds] < \infty$. Damit ist wie bereits bemerkt der Ausdruck $\int_0^t X_s dX_s$ ein Martingal. Damit ist aber auch $X_t^2 - t$ ein Martingal (dies wussten wir schon von Satz 3.14 b)). Auf Übungsblatt 7 sind ein paar einfache Rechnungen zur Formel von Itô durchzuführen.

Wir wenden uns jetzt wieder ein bisschen mehr der Finanzmathematik zu: Wir wollen, ohne das (mathematische) Umfeld bereits voll zu verstehen, folgende stochastische Differentialgleichung lösen:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dX_s). \tag{3.10}$$

Wir suchen also nach einem adaptierten, stochastischen Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$, so dass einerseits die Integrale $\int_0^t S_s ds$ und $\int_0^t S_s dX_s$ existieren und andererseits für jede Zeit t P-f.s. gilt

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dX_s.$$

Diese stochastische Differentialgleichung (3.10) wird häufig (fast immer) in *symbolischer* Form folgendermassen geschrieben:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dX_t),\ S_0 = x_0. \tag{3.11}$$

Nochmals: dies ist nur eine Schreibweise! Es geht nicht darum, dass man eine Funktion, welche nirgends differenzierbar sein wird, doch irgendwie ableiten kann. Mit Gleichungen wie (3.11) ist *immer* die Integralform (3.10) gemeint.

Wie bei deterministischen Differentialgleichungen kann man wegen Sätzen von Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen (später mehr, Theorem 3.35) auch hier "einfach mal formal drauf los rechnen und schauen was passiert": Wir schreiben erst mal $Y_t := \log(S_t)$, wo S_t eine Lösung von (3.10) sei. S_t ist ein Itô-Prozess mit $K_s = \mu S_s$ und $H_s = \sigma S_s$. Wir nehmen jetzt mal an, S_t sei nicht-negativ. Mit der Wahl $f(x) = \log(x)$ werden wir nun (3.8) anwenden (f ist wegen des Nullpunktes nicht zweimal stetig differenzierbar, wir machen es trotzdem und schauen, was passiert). Wir erhalten:

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{-1}{S_s^2})\sigma^2 S_s^2 ds.$$

Wir benutzen jetzt (3.11) und erhalten:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2)ds + \int_0^t \sigma dX_s,$$

und damit

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t.$$

Wir können also mit Vorsicht vermuten, dass

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t)$$

eine Lösung von (3.10) ist. Dies wollen wir jetzt überprüfen: Wir wählen $S_t = f(t, X_t)$ mit

$$f(t,x) = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x).$$

Wir wenden (jetzt legalerweise) Formel (3.9) an und erhalten:

$$S_t = f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

Hier gilt (wieder) $\langle X, X\rangle_s = s$; somit erhalten wir

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu - \sigma^2/2)ds + \int_0^t S_s\sigma dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t S_s\sigma^2 ds.$$

Damit haben wir also

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s\mu ds + \int_0^t S_s\sigma dX_s.$$

Damit haben wir also die Existenz einer Lösung von (3.10) bewiesen. Wir wollen auch die Eindeutigkeit haben. Dafür wenden wir uns zuerst der Formel für partielle Integration zu.

Theorem 3.31 [Partielle Integration] *Seien U_t und V_t zwei Itô-Prozesse; $U_t = U_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dX_s$ sowie $V_t = V_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dX_s$. Dann gilt:*

$$U_tV_t = U_0V_0 + \int_0^t U_s dV_s + \int_0^t V_s dU_s + \langle U, V\rangle_t,$$

wenn wir vereinbaren, dass $\langle U, V\rangle_t := \int_0^t H_sH'_s ds$.

Beweis von Theorem 3.31 Mit der Itô-Formel erhält man:

$$(U_t + V_t)^2 = (U_0 + V_0)^2 + 2\int_0^t (U_s + V_s)d(U_s + V_s) + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds,$$

$$U_t^2 = U_0^2 + 2\int_0^t U_s dU_s + \int_0^t H_s^2 ds,$$

$$V_t^2 = V_0^2 + 2\int_0^t V_s dV_s + \int_0^t {H'}_s^2 ds.$$

Wenn wir nun die zweite und dritte Gleichung von der ersten subtrahieren, erhalten wir

$$U_tV_t = U_0V_0 + \int_0^t U_s dV_s + \int_0^t V_s dU_s + \int_0^t H_sH'_s ds.$$

Q.E.D.

Wir haben jetzt die Methoden zur Verfügung, um zu zeigen, dass die weiter oben gefundene Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.10) sogar eindeutig ist. Wir erinnern uns, dass

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t)$$

eine Lösung von (3.10) ist. Wir nehmen jetzt an, A_t sei eine andere Lösung. Wir wollen jetzt das *stochastische Differential* von A_t/S_t berechnen (eigentlich die Integralform davon). Wir definieren

$$W_t := \frac{S_0}{S_t} = \exp((-\mu + \sigma^2/2)t - \sigma X_t),$$

und $\mu' := -\mu + \sigma^2$, $\sigma' := -\sigma$. Damit haben wir $W_t = \exp((\mu' - \sigma'^2/2)t + \sigma' X_t)$ und von früher wissen wir bereits dass

$$W_t = 1 + \int_0^t W_s(\mu' ds + \sigma' dX_s) = 1 + \int_0^t W_s((-\mu + \sigma^2)ds - \sigma dX_s)$$

gelten muss. Mit Hilfe der Formel für die partielle Integration können wir jetzt das stoachastische Differential (Schreibweise!) von $A_t W_t$ berechnen und erhalten:

$$d(A_t W_t) = A_t dW_t + W_t dA_t + d\langle A, W\rangle_t.$$

Wir haben

$$\langle A, W\rangle_t = \langle \int_0^\cdot A_s \sigma dX_s, -\int_0^\cdot W_s \sigma dX_s\rangle_t = -\int_0^t \sigma^2 A_s W_s ds.$$

Damit gilt

$$d(A_t W_t) = A_t W_t((-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dX_t) + A_t W_t(\mu dt + \sigma dX_t) - A_t W_t \sigma^2 dt = 0.$$

Damit ist aber $A_t W_t$ gleich $A_0 W_0$, dies wiederum bedeutet $\forall t \geq 0$ dass $P-$ f.s.

$$A_t = x_0 / W_t = S_t.$$

Da A_t und W_t stetig sind, bedeutet dies dass $P-$ f.s. gilt, dass $\forall t \geq 0$

$$A_t = x_0 / W_t = S_t.$$

Damit haben wir also folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 3.32 [*Die* **stochastische Differentialgleichung der Finanzmathematik**] *Seien μ und σ zwei reelle Zahlen, $(X_t)_{t\geq 0}$ eine BB und T eine positive Konstante. Dann existiert ein eindeutiger Itô-Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ derart, dass für $t \leq T$ gilt:*

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dX_s).$$

Es ist dies der Prozess

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t).$$

Bemerkungen 3.33

1. Mit diesem S_t wird im Modell von Samuelson (das Modell in dem die Black-Scholes-Formel gilt) der Aktienkurs modelliert.
2. Wenn $\mu = 0$ ist, so ist S_t ein Martingal (siehe Satz 3.14). Man nennt S_t dann das *Exponentialmartingal der Brownschen Bewegung.*

3.5.4 Saloppe Rechenregeln und ihre exakte mathematische Ausformulierung

3.5.4.1 "$(dX_t)^2 = dt$"

Da die BB stationäre Zuwächse hat, können wir einen "beliebig kleinen Zuwachs" von 0 aus betrachten: $X_{u+t} - X_u$ hat die gleiche Verteilung wie X_t. Wir betrachten nun einerseits

$$E[X_t^2] = t,$$

weil X_t eine $\mathcal{N}(0,t)$-Verteilung besitzt. Andererseits gilt auch

$$V[X_t^2] = t^2(3-1) = 2t^2 = o(t).$$

Damit gilt also, dass mit kleinem t X_t^2 sich immer näher an den Erwartungswert (t) anschmiegt; *und zwar* geht der Unterschied schneller gegen Null ($o(t)$) als t selber. Damit folgt dann in gewisser Weise mit $t \to 0$ dass "$(dX_t)^2 = dt$".

3.5.4.2 "$(dX_t) = O(\sqrt{dt})$"

Wegen Theorems 3.8 [Verteilungsgesetz der BB] hat X_t eine $\mathcal{N}(0,t)$-Verteilung. Wenn nun ϵ eine $\mathcal{N}(0,1)$ Zufallsgrösse ist, so hat X_t die gleiche Verteilung wie $\sqrt{t}\epsilon$. Damit gilt aber für kleine t (auch für grosse) $X_t = O(\sqrt{t})$. Salopp schreibt man dann $(dX_t) = O(\sqrt{dt})$.

3.5.4.3 "$dX_t \times dt = 0$", "$dt \times dX_t = 0$" und "$dt \times dt = 0$"

In Campbell, Lo und MacKinlay (1997), *The econometrics of financial markets*, ist auf Seiten 339 ff. eine leicht lesbare, aber mit Vorsicht zu geniessende, heuristische Einführung in diese "Rechenregeln".

3.6 Stochastische Differentialgleichungen

Wir haben bereits in 3.5 *die* stochastische Differentialgleichung (sDGL) der Finanzmathematik behandelt. Es war dies die sDGL

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dX_s).$$

Die eindeutige Lösung war dann (siehe Theorem 3.32)

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t).$$

Wir werden jetzt allgemein definieren, was wir unter einer stochastischen Differentialgleichung (sDGL) verstehen wollen:

Definition 3.34 [stochastische Differentialgleichung (sDGL), Drift, Diffusionskoeffizient, Lösung einer sDGL, Diffusion] *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, ausgestattet mit einer Filtration $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$. Des weiteren seien $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, U eine $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsgrösse und $(X_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{F}_t$-adaptierte BB. Wir nennen dann eine Gleichung der Art*

$$V_t = U + \int_0^t b(s, V_s)ds + \int_0^t \sigma(s, V_s)dX_s \tag{3.12}$$

eine stochastische Differentialgleichung, abgekürzt sDGL. b nennt man die Drift und σ den Diffusionskoeffizienten. Eine Lösung von (3.12) ist ein $\mathcal{F}_t$-adaptierter Prozess $(V_t)_{t\geq 0}$, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt:

Für alle $t \geq 0$ existieren die Integrale $\int_0^t b(s, V_s)ds$ und $\int_0^t \sigma(s, V_s)dX_s$:

$$\int_0^t |b(s, V_s)|ds < \infty \text{ und } \int_0^t |\sigma(s, V_s)|^2 ds < \infty \; P - f.s.$$

und $(V_t)_{t\geq 0}$ erfüllt (3.12):

$$\forall t \geq 0 \; P - f.s. \; V_t = U + \int_0^t b(s, V_s)ds + \int_0^t \sigma(s, V_s)dX_s.$$

Eine Lösung von (3.12) nennt man auch Diffusion.

Formal schreibt man Gleichung (3.12) auch als

$$dV_t = b(t, V_t)dt + \sigma(t, V_t)dX_t,\ V_0 = U.$$

Mit Hilfe von Gleichungen der Art (3.12) können die meisten Untersuchungsobjekte der Finanzmathematik modelliert werden: Aktienkurse, Obligationen und so weiter. Der Spezialfall (3.10) ist der Standardfall für die Modellierung von Aktienkursen. Mit (3.10) sollte man nicht Obligationen modellieren.

Das folgende Theorem ist für unsere weiteren Untersuchungen zentral. Es formuliert hinreichende Bedingungen an b und σ, damit (3.12) eine eindeutige Lösung besitzt.

Theorem 3.35 [Theorem von Itô] *Seien b und σ stetige Funktionen. Wenn eine (Lipschitz-) Konstante $K < +\infty$ existiert, so dass*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$$

und wenn $E[U^2] < \infty$, dann gilt für beliebiges $T > 0$, dass es zu (3.12) eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $[0,T]$ gibt. Diese Lösung $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ hat die Eigenschaft dass

$$E[\sup_{0\leq s\leq T} |V_s|^2] < \infty.$$

Mit "Eindeutigkeit" der Lösung ist gemeint, dass wenn A_t und B_t zwei Lösungen von (3.12) sind, dann gilt dass P-f.s. für alle $t \in [0,T]$ gilt $A_t = B_t$.

Beweis von Theorem 3.35 Lamberton und Lapeyre (1996)

3.7 Das Modell von Samuelson

3.7.1 Eine diskrete Version des Modells von Samuelson

In Bemerkung 3.33 haben wir bereits erwähnt, dass im Modell von Samuelson der Aktienkurs mit folgendem Prozess modelliert wird:

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t).$$

Die sDGL dazu lautet

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dX_t).$$

Wenn wir die Zeit diskretisieren (den Zustandsraum lassen wir gleich; $|\Omega| = \infty!$) so drängt sich folgendes Modell auf:

$$\Delta S_t = S_t\mu\Delta t + S_t\sigma\Delta X_t = S_t\mu\Delta t + S_t\sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon,$$

wobei ϵ eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse sei. Das letzte Gleichheitszeichen in obiger Gleichung sollte eigentlich bedeuten, dass die *Verteilung* gleich ist. Wir berechnen *heuristisch* die erwarteten Zuwächse gegeben alle Information zur Zeit t und das zweite Moment (der "Δ-Operator" nehme jeweils die Differenz zur Zeit $t+\Delta$ und t):

$$E[\Delta S_t|\mathcal{F}_t] = S_t\mu\Delta t \tag{3.13}$$

$$E[(\Delta S_t)^2|\mathcal{F}_t] = S_t^2\sigma^2(\Delta X_t)^2 + o(\Delta t) \tag{3.14}$$

Bei (3.14) haben wir die "Beziehung" $(dX_t)^2 = dt$ benutzt (zudem haben wir von $(\Delta X_t)^2$ nicht den Erwartungswert genommen; es ist ja nur eine heuristische Rechnung). Wenn wir nun mit dem Zeitintervall gegen 0 gehen, so "erhalten" wir aus (3.13) die Beziehung $E[dS_t|\mathcal{F}_t] = S_t\mu dt$ und aus (3.14) $E[(dS_t)^2|\mathcal{F}_t] = S_t^2\sigma^2 dt$.

3.7.2 Das Modell von Samuelson (stetiges Modell)

Im Modell von Samuelson gibt es eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit (eine Aktie mit Preis S_t zur Zeit t) und eine risikolose Anlagemöglichkeit (Bankkonto mit Preis S_t^0 zur Zeit t). Das Bankkonto entwickle sich nach folgender (deterministischer) DGL:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \tag{3.15}$$

wobei r eine nichtnegative Konstante sei. Die Lösung dieser DGL ist natürlich einfach $S_t^0 = e^{rt}$, weil wir definieren, dass $S_0^0 = 1$. r ist die Rendite in stetiger Zeit. Man darf diese Rendite nicht mit der Rendite in diskreter Zeit aus Kapiteln 1 und 2 verwechseln! Als wir in 2.4.4.2 die Formel von Black-Scholes als Limesresultat im Modell von Cox-Ross-Rubinstein hergeleitet haben, wählten wir für die Rendite in stetiger Zeit das Symbol R und forderten, dass $e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N$ zu gelten habe. Damals war r noch die Rendite in diskreter Zeit. Wir wollen aber jetzt für die Rendite in stetiger Zeit den Buchstaben r gebrauchen. Wie bereits mehrfach angekündigt, werden wir fordern, dass der Aktienkurs folgender sDGL genügt:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dX_t). \tag{3.16}$$

Dabei sind μ und σ zwei Konstanten und X_t die BB. Das Zeitintervall, in dem wir uns jetzt aufhalten werden, ist $[0,T]$; dabei wird T die Maturität der Option sein. Wir haben in Theorem 3.32 gesehen, dass wir zu (3.16) eine eindeutige Lösung der Form

$$S_t = S_0 \exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t\big) \tag{3.17}$$

haben. Wir wollen Gleichung (3.17) ein bisschen analysieren:

1. Berechnen wir erst mal den Erwartungswert von S_t, wenn S_0 als konstanter, gegebener Wert betrachtet werden kann:

$$E[S_t] = E[S_0 \exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t\big)] = S_0 e^{\mu t} E[\exp\big(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma X_t\big)] = S_0 e^{\mu t}.$$

Beim letzten Schritt haben wir Satz 3.14 c) benutzt: $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$ ist ein Martingal. Offenbar haben wir in (3.17) einen deterministischen Trendteil (die Drift, welche genau dem Erwartungswert entspricht) und einen Martingalteil.

2. Auf Aufgabenblatt 8 ist in Aufgabe 20 die Varianz von S_t zu berechnen, wenn S_0 eine feste, gegebene Zahl ist. Man erhält:

$$V(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

und damit $sd(S_t) = S_0 e^{\mu t}\sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1}$. Ein "typisches Beispiel" sind Werte von $\sigma = 0.25$ und $\mu = 0.08$. Man erhält dann eine wöchentliche Standardabweichung ($t = 1/52$) von 3.47% und eine jährliche von 27.5%.

3. S_t hat eine Lognormalverteilung; das heisst $\log(S_t)$ hat eine Normalverteilung (genauer eine $\mathcal{N}(\log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$-Verteilung.

Wegen Definition 3.8 sind auch folgende Eigenschaften erfüllt:

4. Die Pfade von S_t sind P-f.s. stetig.

5. Die *relativen Zuwächse sind unabhängig*: sei $u \leq t$; dann gilt dass S_t/S_u oder auch $(S_t - S_u)/S_u$ unabhängig von $\sigma\{S_v, v \leq u\}$ sind.

6. Die *relativen Zuwächse sind stationär*: sei $u \leq t$; dann gilt dass die Verteilung von $(S_t - S_u)/S_u$ gleich ist wie die Verteilung von $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Die letzten drei Eigenschaften (4., 5. und 6.) sind die exakte mathematische Ausformulierung von Eigenschaften, welche von Black-Scholes als Hypothesen formuliert wurden, nach denen sich die Aktienkurse bewegen sollen.

3.8 Selbstfinanzierende Strategien in stetiger Zeit

In Anlehnung an die Definition in diskreter Zeit wollen wir unter einer Strategie einen Prozess $\phi := (\phi_t)_{0\leq t\leq T} := (H_t^0, H_t)$ mit Werten in $\mathbb{R}^2$ verstehen. Der Prozess sei adaptiert bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t$ unserer BB; die Komponenten stehen für den Betrag an Geldern auf dem Bankkonto H_t^0 zur Zeit t, beziehungsweise Anteile von Aktien H_t zur Zeit t. Damit ist der Wert des Portfolios zur Zeit t, V_t, gegeben durch

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

In Modellen diskreter Zeit haben wir die Bedingung der Selbstfinanzierung durch die Gleichung

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n)$$

charakterisiert, wobei wir auf der rechten Seite der Gleichung skalare Multiplikation haben. Die Änderung des Vermögens im Intervall $[n, n+1]$ rührt also ausschliesslich von der Änderung der Preise in diesem Intervall her. Die Strategie ist in diesem Intervall fest und wir haben weder Konsum noch Zuschuss von Geldern. In stetiger Zeit werden wir analog fordern, dass gelten muss:

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t. \tag{3.18}$$

Diesem Ausdruck (eine stochastische Differentialgleichung) müssen wir zuerst eine exakte mathematische Bedeutung geben: Dazu fordern wir, dass sowohl

$$\int_0^T |H_t^0| dt < \infty \; f.s.$$

wie auch

$$\int_0^T H_t^2 dt < \infty \; f.s..$$

Damit können wir der Integralform von (3.18) folgende Bedeutung geben:

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

und das stochastische Integral

$$\int_0^T H_t dS_t := \int_0^T (H_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dX_t$$

darf gebildet werden, weil die Abbildung $t \mapsto S_t$ stetig ist auf $[0, T]$, also auch beschränkt.

Definition 3.36 [Selbstfinanzierende Strategie (self-financing strategy) in stetiger Zeit] *Eine selbstfinanzierende Strategie ist ein Paar ϕ von adaptierten Prozessen $(H_t^0)_{0\leq t\leq T}$ und $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ derart, dass*

1. $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ *f.s. und*

2. $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$ *f.s. für alle* $t \in [0, T]$.

Wir werden mit $\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t$ den diskontierten Preis der Aktie bezeichnen. Das folgende Lemma ist das Pendant zu Lemma 2.3 in stetiger Zeit.

Lemma 3.37 *Sei* $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\le t\le T}$ *ein adaptierter Prozess in* $\mathbb{R}^2$*, wobei* $\int_0^T |H_t^0|dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$ *f.s.. Wir definieren* $V_t(\phi) := H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ *und* $\tilde{V}_t(\phi) := e^{-rt} V_t(\phi)$*. Dann gilt:* ϕ *ist eine selbstfinanzierende Strategie genau dann wenn*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \tag{3.19}$$

f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Beweis von Lemma 3.37 Sei ϕ eine selbstfinanzierende Strategie. Wegen Theorem 3.31 über die partielle Integration haben wir

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt} dV_t(\phi).$$

Damit haben wir

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -re^{-rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t = H_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) = H_t d\tilde{S}_t,$$

womit (3.19) gilt. Die andere Richtung folgt aus denselben Gleichungen.

Q.E.D.

Im Kapitel 2 haben wir in diskreter Zeit Martingalmasse gesucht, mit deren Hilfe wir Optionen einen Preis zuordnen konnten und Hedging-Strategien entwarfen. In 3.9 werden wir die mathematischen Methoden vorstellen, mit deren Hilfe wir in stetiger Zeit analog verfahren können. Man beachte, dass wir uns aber im Gegensatz zu Kapitel 2 in einem ganz speziellen Modell - dem Modell von Samuelson - aufhalten werden.

3.9 Das Theorem von Girsanov und die Repräsentation von Brownschen Martingalen

3.9.1 Äquivalente Wahrscheinlichkeitsmasse

Definition 3.38 [Absolute Stetigkeit und Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmassen] *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Wahrscheinlichkeitsmass* Q *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *heisst absolut stetig bezüglich* P *(in Zeichen* $Q \ll P$*), wenn für alle* $A \in \mathcal{A}$ *gilt:*

$$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0.$$

Wenn sowohl $P \ll Q$ *wie auch* $Q \ll P$*, dann nennt man die beiden Masse* P *und* Q *äquivalent.*

Das Zeichen $\ll$ kann folgendermassen interpretiert werden: P ist deshalb "grösser", weil wenn $P(A)$ null ist, dann muss auch $Q(A)$ schon null sein (eben weil P grösser ist als Q).

Satz 3.39 [Satz von Radon-Nikodym] Q *ist genau dann absolut stetig bezüglich* P*, wenn es eine nicht-negative Zufallsgrösse* Z *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *gibt, so dass für alle* $A \in \mathcal{A}$ *gilt:*

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega).$$

Z *nennt man die Radon-Nikodym-Ableitung (oder Dichte) von* Q *bezüglich* P *und schreibt dafür symbolisch auch* dQ/dP.

Beweis von Satz 3.39 Die Bedingung ist offensichtlich hinreichend. Die Notwendigkeit findet man in Williams, D., *Probability with Martingales*, CUP, 1991.

Bemerkung 3.40 Wenn $Q \ll P$ mit Dichte Z, dann sind P und Q genau dann äquivalent wenn $P[Z > 0] = 1$.

3.9.2 Das Theorem von Girsanov

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, ausgestattet mit der natürlichen Filtration der Standard-BB $(X_t)_{0\le t\le T}$.

Theorem 3.41 [Theorem von Girsanov] *Sei $(\theta_t)_{0\le t\le T}$ ein adaptierter Prozess mit $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ f.s., so dass der Prozess $(L_t)_{0\le t\le T}$, definiert als*

$$L_t := \exp\big(-\int_0^t \theta_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\big)$$

ein Martingal sei. Dann gilt: wenn das Wahrscheinlichkeitsmass $P^{(L)}$ die Dichte L_T hat bezüglich P, so ist der Prozess $(W_t)_{0\le t\le T}$, definiert als $W_t := X_t + \int_0^t \theta_s ds$, eine Standard-BB bezüglich des Masses $P^{(L)}$.

Beweis Theorem 3.41 Karatzas und Shreve (1997).

Bemerkung 3.42 Eine hinreichende Bedingung, dass $(L_t)_{0\le t\le T}$ ein Martingal ist, ist das

$$E\big[\exp\big(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\big)\big] < \infty.$$

Ein Beweis davon findet sich auch in Karatzas und Shreve (1997).

3.9.3 Repräsentation von Brownschen Martingalen

Sei $(X_t)_{0\le t\le T}$ eine Standard-BB auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ die natürliche Filtration von X_t. Bei der Konstruktion des stochastischen Integrals haben wir gesehen (Satz 3.22), dass wenn $(H_t)_{0\le t\le T}$ ein adaptierter Prozess ist, dann ist $(\int_0^t H_s dX_s)_t$ ein quadratisch integrierbares Martingal, 0 bei $t = 0$, sobald $E[\int_0^T H_t^2 dt] < \infty$. Im folgenden Theorem wird ausgesagt, dass jedes Brownsche Martingal (d.h. Martingal bezüglich der natürlichen Filtration einer Standard-BB) als stochastisches Integral dargestellt werden kann.

Theorem 3.43 [Repräsentation von Brownschen Martingalen] *Sei $(M_t)_{0\le t\le T}$ ein quadratisch integrierbares Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. Dann existiert ein adaptierter Prozess $(H_t)_{0\le t\le T}$ so dass $E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$ und für alle $t \in [0, T]$ gilt:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s \tag{3.20}$$

f.s..

Beweis Theorem 3.43 Karatzas und Shreve (1997).

Bemerkungen zu Theorem 3.43 Zentral ist, dass wir Martingale bezüglich der natürlichen Filtration einer Standard-BB haben. Bei allgemeinen Filtrationen gilt dieses Resultat im Allgemeinen nicht.

Mit Hilfe dieses Theorems können wir jetzt schliessen, dass wenn U eine $\mathcal{F}_T$-messbare, quadratisch integrierbare Zufallsgrösse ist, dann haben wir eine Darstellung als

$$U = E[U] + \int_0^T H_s dX_s$$

f.s., wobei (H_t) ein adaptierter Prozess ist mit $E[\int_0^T H_t^2 dt] < \infty$. Um dies einzusehen muss man nur das Martingal $M_t := E[U|\mathcal{F}_t]$ betrachten.

Diese Vorlesung ist, wie bereits betont, eine einführende Übersichtsveranstaltung in Finanzmathematik. Viele Beweise aus "zuliefernden" mathematischen Gebieten werden nicht ausgeführt. Dies ist bewusst und m.E. richtig. Aber besonders an *dieser* Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass im ganzen Teil 3.9 sehr viel schwierige Mathematik versteckt ist.

3.10 Herleitung der Formel von Black-Scholes

3.10.1 Eine Wahrscheinlichkeit, unter der $(\tilde{S}_t)$ ein Martingal ist

Wir wenden uns jetzt wieder dem Modell von Samuelson zu. Wir wollen zeigen, dass eine Wahrscheinlichkeit P^* existiert, welche äquivalent zu P ist, und unter der der diskontierte Aktienkurs $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t$ ein Martingal ist. Aufgrund der sDGL, welcher S_t genügt, haben wir

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dX_t).$$

Wir definieren $W_t := X_t + (\mu - r)t/\sigma$; damit gilt

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t. \tag{3.21}$$

Mit Hilfe des Theorems von Girsanov können wir jetzt mit $\theta_t := (\mu - r)/\sigma$ folgern, dass ein P^* äquivalent zu P existiert, unter dem $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Standard-BB ist. In Karatzas und Shreve (1997) wird gezeigt, dass die Definition des stochastischen Integrals invariant unter äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmassen ist. Aus (3.21) folgern wir nun, dass $(\tilde{S}_t)$ ein Martingal bezüglich P^* ist und dass

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2).$$

3.10.2 Optionspreisbewertung

Wir werden uns, wie bereits angekündigt, auf europäische Optionen beschränken. Eine europäische Option ist eine nicht-negative, $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsgrösse h. Meist kann h als $f(S_T)$ dargestellt werden. Beispielsweise stellt man einen europäischen Call mit der Funktion $f(x) = (x - K)_+$ und einen Put mit der Funktion $f(x) = (K - x)_+$ dar. Aus rein technischen Gründen werden wir uns auf folgende zulässigen Strategien beschränken:

Definition 3.44 [Zulässige Strategie (admissible strategy)] *Eine Strategie $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist zulässig, wenn sie selbstfinanzierend ist und wenn für den diskontierten Wert $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$ des Porfolios gilt: für alle $t \in [0, T]$ ist $\tilde{V}_t$ nichtnegativ und $\sup_{t \in [0,T]} \tilde{V}_t$ ist quadratisch integrierbar bezüglich P^*.*

Wie in diskreter Zeit werden wir den Preis einer Option durch die Kosten der Replikation (des Hedgings) bestimmen. Wir nennen wieder eine Option replizierbar, wenn es eine zulässige Strategie gibt, deren Wert am Schluss genau dem Wert der Option entspricht. Damit muss diese Option sicher quadratisch integrierbar sein unter P^*. Da $E^*[S_T^2] < \infty$ gilt dies für einen Call; ein Put ist sogar beschränkt, womit diese Einschränkung sowieso erfüllt ist.

Theorem 3.45 [Vollständigkeit des Modells von Samuelson] *Im Modell von Samuelson ist jede europäische Option, das heisst, quadratisch integrierbare (bzgl. P^*), nichtnegative und $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsgrösse h durch eine zulässige Strategie replizierbar. Der Wert der replizierenden Strategie (und damit der Option) zur Zeit t ist gegeben durch*

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t].$$

Bemerkung 3.46 Wir bezeichnen deshalb den Ausdruck V_t als Wert der Option zur Zeit t, weil es sonst Arbitragemöglichkeiten gibt (Aufgabe 22). Wir fordern also, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.

Beweis von Theorem 3.45 Wir nehmen zuerst an, dass es eine zulässige Strategie (H^0, H) gibt, welche die Option repliziert. Der Wert dieses Portfolios (H_t^0, H_t) zur Zeit t ist demzufolge

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t,$$

zudem haben wir nach Voraussetzung, dass $V_T = h$. Wir definieren mit $\tilde{V}_t := e^{-rt} V_t$ den diskontierten Wert, also

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t.$$

Da die Strategie selbstfinanzierend ist, haben wir von Lemma 3.37 und (3.21), dass

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u = V_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u.$$

Weil wir eine zulässige Strategie haben, ist $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ per Definitionem quadratisch integrierbar bezüglich P^*. Wegen der letzten Gleichung gilt nun offenbar, dass (V_t) ein stochastisches Integral bezüglich (W_t) ist. Man kann zeigen, dass der Prozess $H_u \sigma \tilde{S}_u$ aus $\mathcal{H}$ ist (siehe Teil 3.5.1). Damit folgt aus Satz 3.22, dass $(\tilde{V}_t)$ ein quadratisch integrierbares Martingal unter P^* ist. Somit gilt

$$\tilde{V}_t = E^*[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t],$$

und damit

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]. \tag{3.22}$$

Damit haben wir also bewiesen, dass wenn das Portfolio (H^0, H) die Option h repliziert, dann muss der Wert der Option durch (3.22) gegeben sein.

Um den Beweis zu vervollständigen, müssen wir noch zeigen, dass es eine replizierende Strategie überhaupt gibt. Wir suchen also Prozesse (H_t^0) und (H_t), welche eine zulässige Strategie definieren, so dass

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = E^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

Wir definieren dazu einen Prozess (M_t) derart, dass $M_t := E^*[e^{-rT} h | \mathcal{F}_t]$. Unter dem Mass P^* ist dieser Prozess ein quadratisch integrierbares Martingal. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)$, welche die natürliche Filtration der Brownschen Bewegung (X_t) ist, ist auch die natürliche Filtration von (W_t). Damit können wir Theorem 3.43 über die Repräsentation von Brownschen Martingalen anwenden. Es existiert also ein adaptierter Prozess $(K_t)_{0\le t\le T}$ derart, dass $E^*[\int_0^T K_s^2 ds] < \infty$ und für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s$$

f.s. . Wir definieren jetzt die Strategie $\phi = (H^0, H)$ derart, dass $H_t := K_t/(\sigma \tilde{S}_t)$ und $H_t^0 := M_t - H_t \tilde{S}_t$. Wegen Lemma 3.37 und (3.21) ist diese Strategie selbstfinanzierend. Der Wert der Strategie zur Zeit t ist

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = E^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

Damit ist $V_t(\phi)$ sicher eine nicht-negative Zufallsgrösse; $\sup_{0\le t\le T} V_t(\phi)$ ist unter P^* quadratisch integrierbar und $V_T(\phi) = h$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.47 Wenn h als Funktion von S_T ausgedrückt werden kann (also zum Beispiel bei europäischen Call- und Put-Optionen), dann können wir den Wert der Option zur Zeit t als Funktion von t und S_t ausdrücken. Sei also $h = f(S_T)$. Es gilt:

$$V_t = E^*[e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t] = E^*[e^{-r(T-t)} f\big(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)}\big)|\mathcal{F}_t].$$

Die Zufallsgrösse S_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar; zudem ist $W_T - W_t$ unter P^* unabhängig von $\mathcal{F}_t$. Damit folgt aus Lemma 2.28, dass

$$V_t = F(t, S_t),$$

wobei

$$F(t,x) := E^*[e^{-r(T-t)} f\big(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)}\big)]. \tag{3.23}$$

Unter P^* ist $W_T - W_t$ eine $\mathcal{N}(0, T-t)$-Zufallsgrösse. Damit gilt:

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\big(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}\big) \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Im Falle eines Calls ist $f(x) = (x-K)_+$. Damit folgt für diesen Spezialfall aus (3.23)

$$F(t,x) = E^*[e^{-r(T-t)} \big(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} - K\big)_+] = E[(x e^{\sigma\sqrt{\theta} g - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta})_+],$$

wobei g eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse sei und $\theta := (T-t)$ die Restlaufzeit der Option. Wir setzen jetzt

$$d_1 := \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

und $d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$. Wenn wir mit diesen Notationen weiterfahren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E[(x e^{\sigma\sqrt{\theta} g - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta}) 1_{\{g + d_2 \geq 0\}}] \\ &= \int_{-d_2}^{\infty} (x e^{\sigma\sqrt{\theta} y - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} (x e^{-\sigma\sqrt{\theta} y - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy. \end{aligned}$$

Man schreibt jetzt üblicherweise diese Formel, indem man sie als Differenz zweier Integrale darstellt und im ersten Teil die Substitution $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$ vornimmt. Man erhällt dann

Die Formel von Black-Scholes

$$F(t,x) =: C_t = x N(d_1) - K e^{-r\theta} N(d_2), \tag{3.24}$$

wobei $N(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-u^2/2} du$. Für einen Put erhält man durch ähnliche Rechnungen (Aufgabe 23) die Formel

$$F(t,x) = K e^{-r\theta} N(-d_2) - x N(-d_1). \tag{3.25}$$

Die Formel für den Put erhält man auch durch die Put-Call-Parität (2.2).

Nachdem die Formel von Black-Scholes (3.24) in der traditionellen Form steht, kann man sie wieder mit derjenigen Formel in Kapitel 2 vergleichen, als wir die Formel von Black-Scholes als Limesresultat im Modell von Cox-Ross-Rubinstein entwickelten. Dort war das σ vom Zeithorizont abhängig. Man muss das dortige σ noch mit $\sqrt{\theta}$ skalieren, um auf (3.24) zu kommen. Das σ war dort die Volatilität zur Zeit T.

3.10.3 Hedging einer Option

Im Beweis von Theorem 3.45 mussten wir nur die Existenz einer replizierenden Strategie zeigen. Dazu genügte das Theorem über die Repräsentation von Brownschen Martingalen. In der Praxis will man aber diese Strategien konstruieren können. Wir setzen hier voraus, dass die Option h eine Darstellung der Art $f(S_T)$ besitzt. Wir werden jetzt zeigen, dass man dann eine explizite Hedging-Strategie entwickeln kann.

Ein replizierendes Portfolio muss zu jedem Zeitpunkt t den abdiskontierten Wert

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t)$$

besitzen. Dabei ist F die Funktion, welche in (3.23) definiert wurde. Unter sehr allgemeinen Bedingungen an f (insbesondere im Fall einer Call- oder Put-Option mit der Formel von Black-Scholes als Resultat) gilt, dass die Funktion F in C^∞ auf $[0,T[\times]0,\infty[$ ist. Wir setzen

$$\tilde{F}(t,x) := e^{-rt} F(t, xe^{rt})$$

und erhalten damit $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ und für $t < T$ erhalten wir aus der Formel von Itô

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u) d\tilde{S}_u + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u,\tilde{S}_u) du + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u,\tilde{S}_u) d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_u.$$

Weil $d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$ (Formel (3.21)) haben wir

$$d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_u = \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du,$$

womit $\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$ geschrieben werden kann als

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du.$$

Da $\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$ ein Martingal unter P^* ist, muss der Prozess K_u null sein (Satz 3.28). Damit gilt

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u dW_u = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u) d\tilde{S}_u.$$

Der natürliche Kandidat für einen Hedging-Prozess (H_t) ist damit

$$H_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t).$$

Wenn wir jetzt noch $H_t^0 = \tilde{F}(t,\tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t$ wählen, so ist das Porfolio (H_t^0, H_t) selbstfinanzierend und der diskontierte Wert ist $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$.

Wenn wir uns jetzt auf den Spezialfall einer europäischen Call-Option konzentrieren, so erhalten wir dafür (längere Rechnungen!)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = N(d_1);$$

im Fall eines Puts erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -N(-d_1).$$

Erst jetzt sind wir mit der Formel von Black-Scholes wirklich fertig. Denn aus Sicherheitsgründen gilt:

If you can't hedge it, don't price it!

Man kann zeigen, dass diese Hedging-Strategie P-f.s. eindeutig ist.

Im Folgenden Teil werden wir nun diese Formel *innerhalb des Modells von Samuelson* analysieren. Es wird noch nicht darum gehen, zu diskutieren, wie gerechtfertigt gewisse Annahmen gewesen sind. Das folgt dann in 3.12. Hier geht es darum, gegeben das Modell von Samuelson, Eigenschaften zu beschreiben.

3.11 Analyse der Formel von Black-Scholes im Modell von Samuelson, "the greeks"

Wir beginnen mit ein paar Definitionen, welche sich in der Fachwelt durchgesetzt haben. Sei $\Psi(t, S_t)$ der Wert eines Portfolios zur Zeit t (bei unserer Option hatten wir $\Psi(t, S_t) = F(t, S_t)$). Dann definieren wir ($\Psi(t, x)$):

$$\text{delta} := \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, S_t),$$

$$\text{gamma} := \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, S_t),$$

$$\text{theta} := \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, S_t),$$

$$\text{rho} := \frac{\partial \Psi}{\partial r}(t, S_t),$$

$$\text{vega} := \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(t, S_t).$$

3.11.1 "delta"

Bei einer europäischen Call-Option ist das "delta" also gleich $N(d_1)$ und gleichzeitig auch die "Anzahl" Aktien, welche man im Portfolio halten muss, um eine Option perfekt zu hedgen (wenn man als Bank eine "short position" eingegangen ist). Diese "Anzahl" Aktien liegt immer im Intervall [0,1] (da es ja eine kumulierte Normalverteilung ist). Das "delta" gibt an, wie stark der Preis des Portfolios schwankt, wenn der Preis der Aktie schwankt. Wenn wir ein "delta" von 0.5 haben und der Preis der Aktie um eine Geldeinheit steigt (fällt), so steigt (fällt) der Wert der Option um (lineare Approximation) 0.5 Geldeinheiten. Wenn der Aktienkurs viel kleiner als der Ausübungspreis ist (far out of the money), dann ist die Option fast wertlos. Das "delta" ist dann auch sehr klein. Wenn der Aktienkurs hingegen viel grösser ist als der Ausübungspreis (deep in the money), dann ist das "delta" sehr gross (nahe bei 1).

3.11.2 "gamma"

Bei einer europäischen Call-Option ist das "gamma" gleich $\frac{n(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$, wobei n die Dichte der Standardnormalverteilung sei. Das "gamma" ist immer grösser als Null. Wenn die Option "out of the money" ist, dann ist "gamma" noch klein. Es wird etwa "at the money" am grössten und wird dann "in the money" wieder kleiner. Weil "gamma" ja die nochmalige Ableitung von "delta" nach dem Basiswert ist, gibt ein grosses "gamma" an, dass "delta" sich mit dem Basiswert stark ändert (und damit auch die Hedging-Strategie häufiger angepasst werden muss).

3.11.3 "theta"

Bei einer europäischen Call-Option ist das "theta" gleich

$$\theta = \frac{S_t \sigma}{2\sqrt{T-t}} n(d_1) + Kre^{-r(T-t)} n(d_2).$$

Es ist immer grösser Null; manchmal wird es in der Praxis auch negativ *definiert* (weil die Restlaufzeit ja abnimmt in Zeitrichtung). Sei $\tau := T - t$. Wir haben einerseits $\lim_{\tau \to 0} C_t = (S_t - K)_+$ und andererseits $\lim_{\tau \to \infty} C_t = S_t$. Daraus kann man die bekannte Darstellung aus der Praxis (Bild) begründen.

3.11.4 "rho"

Bei einer europäischen Call-Option ist das "rho" gleich $\sqrt{T-t}Ke^{-r(T-t)}n(d_2)$ und damit immer grösser als Null. Das "rho" ist vor allem bei Derivativen auf Obligationen von Bedeutung. Dort ist das "rho" natürlich anders.

3.11.5 "vega"

Bei einer europäischen Call-Option ist das "vega" gleich $S_t n(d_1)\sqrt{T-t}$ und damit immer grösser als Null. Dieses "grösser als Null" ist eine zentral wichtige Eigenschaft, wie wir weiter unten in 3.12.1 noch erkennen werden, denn damit lässt sich die Formel von Black-Scholes invertieren. Des weiteren gelten noch $\lim_{\sigma\to 0} C_t = (S_t - Ke^{-r\tau})_+$ und $\lim_{\sigma\to\infty} C_t = S_t$. Die Bedeutung der ersten Gleichung ist, dass wenn wir keinen Zufall mehr haben, dann handelt es sich um ein risikoloses Abdiskontieren. Bei der zweiten Gleichung ist die Interpretation diejenige, dass wenn der Preis der Aktie sehr stark schwankt (unendlich stark), dass dann das K keine Rolle mehr spielt. Auch bei einem europäischen Put ist das "vega" immer positiv.

3.11.6 Skaleninvarianz

Die Formel von Black-Scholes ist offensichtlich skaleninvariant in dem Sinne, dass das "delta" gleich bleibt, ob man nun in Franken oder in Rappen rechnet.

Wenn man die Formel von Black-Scholes untersucht, so stellt man schnell fest, dass alle Parameter bis auf einen (σ) gegeben sind: der momentane Aktienkurs S_t, der Ausübungspreis K, die Restlaufzeit $(T-t)$, der risikolose Zinssatz r. Der risikolose Zinssatz kann zwar auch schwanken. Es gibt Modelle, in denen dieser Zinssatz deterministisch oder stochastisch modelliert wird. Ein zentrales Problem ist jedoch die Schätzung der Volatilität (das σ); damit kommen wir zum nächsten Teil.

3.12 Wie bewähren sich die Modelle in der Praxis, Modifikationen, Hinterfragung der Annahmen, Robustheit

3.12.1 Wie schätzt man das σ?

Es gibt zwei Ansätze, um das σ zu schätzen:

1. **Der historische Ansatz:** Im Modell von Samuelson ist die Varianz von $\log(S_t)$ gleich $\sigma^2 t$. Weiter sind die Zufallsgrössen $\log(S_{T/N}/S_0), \log(S_{2T/N}/S_{T/N}), \ldots, \log(S_T/S_{T(N-1)/N})$ i.i.d. Damit kann man aber die Volatilität σ mit statistischen Methoden schätzen. Definieren wir für $i \in \{1,\ldots,N\}$ $y_i := \log(S_{iT/N}/S_{(i-1)T/N})$, dann ist der trivialste Schätzer mit $\overline{y} := \sum_{i=1}^N y_i/N$ gleich
$$\hat{\sigma} := \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (y_i - \overline{y})^2}}{\sqrt{T/N}}.$$
Die Schätzung des σ's ist jedoch mittlerweile eine Wissenschaft für sich. *Eine* einfache Modifikation besteht darin, Werte, welche noch nicht allzu weit in der Vergangenheit sind, stärker zu gewichten.
2. **Die implizite Volatilität:** Wir haben weiter oben gesehen, dass der Preis einer Call-Option (auch eines Puts) eine streng monoton wachsende Funktion von σ ist. Damit kann man also die Formel von Black-Scholes invertieren und erhält damit die sogenannte "implizite Volatilität". Es ist diejenige Volatilität, mit der die Marktteilnehmer rechnen (das heisst nicht, dass es die "richtige" Volatilität ist!). Weiter setzt diese Methode liquide Märkte voraus.

Insgesamt gibt es vier verschiedene Arten von Volatilität: die historische und die implizite (siehe jeweils gleich oben); dann noch die erwartete (personenabhängige) - und die zukünftige (die tatsächlich dann realisierte) Volatilität.

3.12.2 Zwei Folgen aus der Invertierung der Formel von Black-Scholes

Die zweite Methode zur Schätzung der Volatilität (implizite Volatilität) offenbart uns aber gleich eine seltsame Inkonsistenz des Modelles von Black-Scholes mit der Realität: die implizite Volatilität ist abhängig vom Ausübungspreis K! Dies kann im Modell von Samuelson mit der Anwendung der Black-Scholes-Formel nicht sein. Die Volatilität ist zwar unbekannt aber doch fest vorhanden. Es ist eine *Eigenschaft der Aktie*. "Die Aktie weiss doch (im Modell) nicht, was für Optionen und zu welchem Ausübungspreis mit der Aktie als Basispreis noch laufen." Während die Aktie im Modell sehr wohl die Option beeinflusst, ist das Umgekehrte schlichtweg ausgeschlossen. Die Abhängigkeit ist im übrigen derart, dass bei einem Call die Volatilität (und damit der Preis der Option) steigt, wenn $|S - K|$ gross wird. Dies ist wohl mit psychologischen Faktoren, vor allem mit der Angst vor grossen Ausschlägen zu erklären. Weiter hängt die implizite Volatilität auch von der Restlaufzeit ab, was aus denselben Gründen nicht sein kann. Die Abhängigkeit ist derart, dass die implizite Volatilität grösser wird, wenn die Restlaufzeit vergrössert wird. Es werden wieder psychologische Faktoren (längere Unbestimmtheit) als Erklärung herbeigezogen.

3.12.3 Sind die Logreturns normalverteilt?

Aktienkurse haben "die Tendenz zu steigen". Dadurch werden auch die Ausschläge nach oben und nach unten immer grösser. Deshalb macht es Sinn, die relativen Zuwächse zu betrachten. Aus Formel (3.17) können wir zudem schliessen, dass die sogenannten "Logreturns" folgende Verteilung haben müssten:

$$\log(S_t/S_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/2, \sigma^2).$$

Häufig werden nicht die Logreturns betrachtet, sondern $(S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$. Da $\log(1 + x) \doteq x$ für kleine x, ist dies approximativ auch richtig. Wir werden aber mit den Logreturns weiterfahren, weil sie mathematisch exakt sind. Wir werden jetzt eine ganze Folge von solchen Logreturns betrachten: $Y_i := \log(S_i/S_{i-1})$, $i \in \{1, \ldots, T\}$, wobei T ohne Einschränkung eine ganze, grössere Zahl sei. Man kann dann untersuchen, ob diese Logreturns $(Y_i)_{1\leq i\leq T}$ tatsächlich i.i.d. sind und zwar aus einer Normalverteilung. Man ist sich einig, dass dies nicht so ist. In der Tat hat man (mehr dazu in Kapitel 4) folgende Eigenschaften:

1. **Heavy tails:** Es hat viel zu starke Ausschläge nach oben und nach unten (Kurtosis). Die Langschwänzigkeit nimmt sogar zu, wenn man die Zeitintervalle verkürzt. Zudem hat man auch eine asymmetrische Verteilung (**Schiefe (squewed)**). Sei $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ eine Stichprobe aus einer beliebigen Verteilung. Man definiert dann als empirisches Mass der Schiefe den folgenden Ausdruck:

$$T^S := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^3/(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2)^{3/2},$$

   und für die empirische Kurtosis ist es

$$T^K := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^4/(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2)^2.$$

   Für eine Stichprobe aus einer Normalverteilung müssten für T^S Werte um Null resultieren; für $T^K - 3$ ebenfalls. Damit ist insbesondere gesagt, dass Langschwänzigkeit von Verteilungen und Schiefe immer in Bezug auf die Normalverteilung angegeben werden. Die Formel von Black-Scholes ist relativ robust bezüglich dieser falschen Annahmen.
2. **Komplizierte Abhängigkeitsstrukturen:** Auf Grund der Unabhängigkeit der Folgenglieder würde man auch Unkorreliertheit dieser Folgenglieder erwarten. Dies trifft in der Tat zu. Hingegegen hat man Abhängigkeitsstrukturen in den Logreturns derart, dass die Folge der $(|Y_i|)$ und der (Y_i^2) nicht unkorreliert sind. Bei i.i.d. müsste dies gelten. Diverse Untersuchungen befassen sich auch mit sogenannten "Long-Range-Correlations". Deren Existenz ist aber umstritten. Daran ändert sich auch nichts, wenn sich deren Verfechter zur Untermauerung in die Chaostheorie flüchten.

3. **High-density-Data, "tick by tick"** Es gibt sich widersprechende Untersuchungen über das Vorhandensein von zusätzlicher Struktur in "tick by tick"-Daten. Führend bei diesen Datensätzen ist die in Zürich ansässige Firma "Olsen and Associates".

3.12.4 Ununterbrochenes Hedging im Modell von Black-Scholes - und in der Realität

Die Hedging-Strategie muss theoretisch permanent angepasst werden. In der Praxis ist das aus zwei Gründen nicht möglich:

1. Transaktionskosten
2. Illiquide Märkte: es findet sich unter Umständen kein Käufer oder Verkäufer auf dem Markt. Der Wert von "Bid" (zu wieviel kann man verkaufen) und "Ask" (zu wieviel darf man kaufen) sind zu weit auseinander. Nur wenn man massive Konzessionen macht, könnte man ein Papier kaufen oder verkaufen.

In der Tat wird man aus diesen Gründen die Hedging-Strategie nur anpassen, wenn der Aktienkurs ein gewisses Band verlässt. Man verlangt wegen der Kosten und der Illiquidität dafür am Anfang auch eine höhere Prämie beim Verkauf der Option.

3.12.5 Stochastische Volatilität

Das σ ist in der Realität nicht konstant. Man versucht mit Modellen wie ARCH und GARCH dies zu berücksichtigen. Mehr dazu folgt in Kapitel 4.

3.12.6 "Market frictions"

In der Realität hat man noch Transaktionskosten, Abgaben, Dividenden und Restriktionen bezüglich Leerverkäufen (von den Behörden und von internen Risk-Management-Officers). Diese sind zu kompliziert und vielfältig (und langweilig), als dass sie in dieser Vorlesung Platz hätten.

3.12.7 Verstärkung von Marktbewegungen durch Hedging

Wenn man einen Call hedgt, so muss man Aktien kaufen, wenn der Preis per Aktie steigt und verkaufen, wenn der Preis per Aktie fällt. Damit verstärkt man die "natürlichen" Marktbewegungen. Wie stark diese "unerwünschte" Verstärkung ist, hängt davon ab, wie bedeutend die Aktienkäufe/-verkäufe zu Hedging-Zwecken sind im Vergleich zu anderen Käufen und Verkäufen von Aktien.

3.13 Weiterführende Fragen

3.13.1 FX-Optionen - das Modell von Garman-Kohlhagen

"FX" steht für foreign-exchange, also für die Devisenmärkte. Auch dort werden Optionen (und Futures) eingesetzt. Das bekannteste Modell zur Optionspreisbewertung und zum Hedgen in den Devisenmärkten ist das Modell von Garman-Kohlhagen (1983). Mehr dazu findet man in Form einer längeren, geführten Aufgabe im Lamberton/Lapeyre auf Seiten 81 ff.

3.13.2 Strategien mit Konsum

Wir haben uns auf selbstfinanzierende Strategien beschränkt. Strategien mit Konsum werden (wieder) in Form einer längeren, geführten Aufgabe im Lamberton/Lapeyre auf Seiten 86 ff. besprochen.

3.13.3 Asiatische Optionen

Bei asiatischen Optionen ist der Ausübungspreis der Durchschnitt der Aktienpreise während der Laufzeit der Option (oder zumindest eine Funktion davon). Damit ist h eine Funktion von $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ und nicht mehr nur eine Funktion von S_T (wie bei "Terminal Value Options"). Mehr dazu findet man in Form einer längeren, geführten Aufgabe im Lamberton/Lapeyre auf Seiten 91 ff.

3.13.4 Amerikanische Optionen

Der Übergang von diskreten Modellen zu stetigen Modellen ist bei amerikanischen Optionen viel schwieriger als bei europäischen Optionen. Deshalb begnügt man sich in der Praxis bei konkreten Berechnungen von amerikanischen Optionen häufig mit approximativen diskreten Modellen (Modell von Cox-Ross-Rubinstein). Mehr zu amerikanschen Optionen in stetiger Zeit findet man in Kapitel 4 von Lamberton/Lapeyre. Zuerst sollte jedoch Kapitel 2 (diskrete Modelle) ebendort studiert werden.

3.13.5 PDE's und die Optionspreisbewertung

Neben dem in diesem Skript gewählten Zugang zur Optionspreisbewertung (von der Stochastik her) gibt es auch den Zugang über die partiellen Differentialgleichungen ("Wärmeleitungsgleichung"). Via diesen Zugang kommen dann auch numerische Methoden zum Zug. Mehr zur Optionspreisbewerung und PDE's findet man in Kapitel 5 von Lamberton/Lapeyre.

3.13.6 Zinsmodelle

Mit Zinsmodellen werden Absicherungsstrategien für Obligationen und Optionen auf denselben entwickelt. Diese sind in der Praxis sehr wichtig. Mehr zu Zinsmodellen findet man in Kapitel 6 von Lamberton/Lapeyre.

3.13.7 Modelle mit Sprüngen

Im Modell von Samuelson folgt der Aktienkurs mit Wahrscheinlichkeit 1 einem stetigen Pfad. In der Realität beobachtet man aber Sprünge. Gründe dafür sind zum Beispiel die Publikation von wirtschaftsrelevanten Kennzahlen (Zinsentscheide der Notenbank), wichtige politische Ereignisse, Kriege und Naturkatastrophen. Diese Sprünge können nicht weggehedget werden. Diese Märkte sind nicht vollständig. In Kapitel 7 von Lamberton/Lapeyre sind Konzepte beschrieben, mit denen man versucht, diesen Problemkreisen einigermassen Herr zu werden.

3.13.8 "Alternatives to the Black-Scholes Option-Pricing Model and When to use them"

Auf der Website

http://inetarena.com/∼doughoch/options/ATBS.html

findet man eine direkt als Website ausdruckbare Zusammenfassung über Alternativen zu Black-Scholes.

3.14 Zusammenfassung von Kapitel 3

Nach der Bereitstellung der mathematischen Grundlagen (Brownsche Bewegung, Martingale in stetiger Zeit, stochastisches Integral) haben wir im Modell von Samuelson die Formel von Black-Scholes mit der dazugehörigen Hedging-Strategie entwickelt. Sowohl in Kapitel 2 mit dem Modell von Cox-Ross-Rubinstein wie auch mit dem Modell von Samuelson und der Formel von Black-Scholes haben wir ein in der Praxis zwar relevantes, aber doch (zu) einfaches Modell betrachtet. Man bezeichnet das Modell von Samuelson auch als das "Plain Vanilla"-Modell. Es ging deshalb darum, die Eigenschaften des theoretischen Modells zu analysieren und die Modellannahmen intensiv zu diskutieren. Die Modelle von Cox-Ross-Rubinstein und die Formel von Black-Scholes werden in der Praxis eingesetzt; die Praktiker nehmen aber an den Parametern Korrekturen vor und verlangen "Sicherheitsprämien", um die Modellfehler auszugleichen. Es existieren mittlerweile weitaus schwierigere Modelle; und immer hat man die beiden Probleme: welchen Preis sollte man einem Wertpapier geben und wie kann man hedgen (sich absichern).